

MENTION

Note sur l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle et sur la parabole inscrite à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 252-255

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__252_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

*sur l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle et sur la
parabole inscrite à un triangle ,*

PAR M. MENTION.

Théorème I. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur la courbe. Ce théorème résulte du suivant :

« Le cercle des neuf points d'un triangle inscrit dans une
 » hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole
 » (voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 43) ; et inversement, si,
 » ce cercle passe par le centre de l'hyperbole, que deux des
 » sommets du triangle soient situés sur la courbe, le troisième
 » y sera aussi. »



Théorème II. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est situé sur la directrice de cette courbe. Si l'un des côtés du triangle est la tangente au sommet, la proposition se démontre aisément ; elle sert de lemme pour la proposition générale.

Les côtés du triangle forment en effet, avec la tangente au sommet, un quadrilatère auquel on applique le théorème suivant :

« Quatre droites situées dans un même plan forment quatre
 » triangles, dans chacun de ces triangles existe un point de
 » rencontre des hauteurs ; les quatre points de rencontre sont
 » sur une même droite. »

Il n'y a donc qu'à démontrer le théorème lorsque l'un des côtés du triangle circonscrit est la tangente au sommet (*fig. 45*). Évidemment le point de rencontre se trouve sur une perpendiculaire à la directrice. Soient MAB le triangle circonscrit, et I le point où la hauteur perpendiculaire à la directrice rencontre cette dernière ; prouvons que AI est perpendiculaire à MB ou parallèle à FB ; F est le foyer de la parabole. A', B' étant les points où FA, FB rencontrent la directrice, $MA' = MB' = MF$; ainsi I est le milieu de A'B' ; dès lors AI, joignant les milieux A et I de deux côtés FA', A'B' d'un triangle, est parallèle au troisième côté FBB'....

c. q. f. d.

Note. Démonstrations analytiques :

Théorème I. Toutes les hyperboles équilatères circon-

scrites à un triangle se coupent au point de rencontre des hauteurs du triangle.

Démonstration. Soit ABC le triangle, prenons le sommet A pour origine, la direction AB pour axe des $+x$, les coordonnées rectangulaires, et faisons $AB = E$; deux hyperboles équilatères passant par les points A et B, auront pour équations :

$$y^2 + Bxy - x^2 + Dy + Ex = 0; \quad y^2 + B'xy - x^2 + D'y + Ex = 0;$$

donc les deux autres points d'intersection sont situés sur la droite $x(B - B') + D - D' = 0$, c'est-à-dire sur une droite perpendiculaire à AB; mais C est un point d'intersection, donc le second point est sur la hauteur du triangle passant par C; de même sur la hauteur passant par A, etc. c. q. f. d.

Théorème II. Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un triangle passent par le point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

Démonstration. Soit ABC le triangle, prenons A pour origine, AB pour axe des $+x$, BC pour axe des $+y$, l'équation de la parabole peut être mise sous la forme :

$$p^2y^2 - 2pqxy + q^2x^2 - 2py - 2qx + 1 = 0; \quad (1)$$

l'équation de la directrice est :

$$y(q + p \cos \gamma) + x(p + q \cos \gamma) + \cos \gamma = 0. \quad (2)$$

(t. II, p. 433.)

Soit $dy + ex + f = 0$ l'équation de la droite BC, la condition de tangence donne :

$$dfq + efp - de = 0, \quad (3)$$

éliminant q entre (2) et (3), on a :

$$pf[y(d \cos \gamma - e) + x(d - e \cos \gamma)] + d[ey + ex \cos \gamma + f \cos \gamma] = 0;$$

or, cette droite passe constamment par le point d'intersection des deux droites :

$$y(d \cos \gamma - e) + x(d - e \cos \gamma) = 0, \quad ey + ex \cos \gamma + f \cos \gamma = 0.$$

La première est l'équation de la hauteur du triangle passant par l'origine A, et la seconde est l'équation de la hauteur passant par B ; donc, etc. Tm.