

LEBESGUE

Remarque sur la question 161

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 225-227

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__225_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUE SUR LA QUESTION 161.

(*Théorème Joachimsthal*, p. 114)

PAR M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

—

Dans les équations $np + n'p' = 2d^2$ et $np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = \text{const.} = 2(a^2 + b^2)$ relatives à l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, on reconnaît de suite que les facteurs n, n' pouvant devenir aussi grands qu'on voudra, du moins pour la première équation, les produits $np, n'p', n''p'', n'''p'''$ ne sont pas essentiellement positifs. Cela tient à ce que p , qui n'est autre chose que la projection du rayon central AO sur la normale AN, peut tomber sur AN ou sur son prolongement; de là une discussion nécessaire pour déterminer les signes.

Pour plus de généralité, prenons la surface à centre $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$. Le plan tangent en A (x, y, z) ayant pour

équation, en représentant par X, Y, Z les coordonnées courantes $\frac{Xx}{a} + \frac{Yy}{b} + \frac{Zz}{c} = 1$, il en résultera :

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\}}}.$$

De même, la normale en A , ayant pour équation

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b}} = \frac{Z-z}{\frac{z}{c}}.$$

Si l'on représente par α, β, γ les coordonnées d'un point N de la normale en A , en posant de plus $AN = n$, on aura :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = n^2;$$

et par conséquent,

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a}} = \frac{y-\beta}{\frac{y}{b}} = \frac{z-\gamma}{\frac{z}{c}} = \frac{\pm n}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} = \pm np = u;$$

de là encore :

$$\frac{x}{a} = \frac{\alpha}{a-u}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\beta}{b-u}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\gamma}{c-u};$$

ce qui change l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

en

$$\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2} + \frac{c\gamma^2}{(c-u)^2} = 1; \quad (a)$$

ou bien encore :

$$u^6 - 2(a+b+c)u^5 + \dots + a^2b^2c^2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{a} - \frac{\beta^2}{b} - \frac{\gamma^2}{c} \right\} = 0.$$

Donc

1° La somme des u ou $\pm np$ est constante.

2° Le produit des u reste le même tant que le point N se trouve sur une surface $\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = K$ concentrique et semblable à la surface donnée.

On demande une discussion complète de l'équation (a).

En rapportant la conique à centre à deux axes obliques tangents à la courbe aux points A et A', on trouve très-simplement $np \pm n'p' = 2b^2$. Le signe est mis en évidence. Comme b^2 est $<$ ou $= a^2$, puisque np peut surpasser $2a^2$, il faut bien que le terme $n'p'$ puisse devenir négatif. Le signe — se présente quand N est hors de l'ellipse. Même démonstration pour l'hyperbole.