

A. VACHETTE

## Solution du problème 173

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 7  
(1848), p. 13-14

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1848\\_1\\_7\\_\\_13\\_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__13_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 173 (t. IV, p. 455),

PAR M. A. VACHETTE,

Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

Une droite de longueur déterminée étant divisée en  $m$  parties égales par des points rouges, et en  $n$  parties égales par des points noirs, trouver la plus petite distance entre un point noir et un point rouge.

On suppose nécessairement  $m$  et  $n$  premiers entre eux ; s'ils avaient un plus grand commun diviseur  $d$ , il y aurait  $d$  coïncidences d'un point noir avec un point rouge.

Soit  $m < n$  ; chaque division rouge est  $\frac{1}{m}$  de la droite, et chaque division noire en est  $\frac{1}{n}$ . Du numéro 0 au numéro 1 rouge, il y a autant de divisions noires que d'entiers dans le quotient  $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ , ou dans  $\frac{n}{m}$  ; si  $n = mq + r$ , il y aura  $q$  divisions noires, et entre le  $q^{\text{ème}}$  numéro noir et le 1<sup>er</sup> numéro rouge la distance sera la fraction  $\frac{r}{mn}$  de la

droite ; entre le  $2q^{\text{ème}}$  numéro noir et le  $2^{\text{ème}}$  numéro rouge, la distance  $\frac{2r}{mn}$  ; entre le  $mq^{\text{ème}}$  numéro noir et le  $m^{\text{ème}}$  numéro ( extrémité de la droite ), la distance  $\frac{mr}{mn} = \frac{r}{n}$  égale à  $r$  divisions noires. Comme  $n$  et  $m$ ,  $r$  et  $m$  sont premiers entre eux ; donc les nombres  $r, 2r, 3r \dots \dots (m-1)r$  divisés par  $m$  donneront, dans un ordre quelconque, les restes différents  $1, 2, 3 \dots \dots (m-1)$  ; la plus petite distance entre un point noir et un point rouge répondra à celui des nombres  $r, 2r, \dots \dots (m-1)r$ , qui, divisé par  $m$ , donne le reste 1.

Cette plus petite distance est double, car on peut commencer par l'une ou l'autre des extrémités de la droite.

Si  $n=m+1$ , on a le Vernier ; la plus petite distance est entre les deux premières divisions, noire et rouge. Si  $n=mq+1$ , la plus petite distance a la même position.

Pour  $m=13$  et  $n=60$ , on trouve  $r=8$  ; c'est le nombre  $5r$  ou  $40$  qui, divisé par  $13$ , donne pour reste 1 ; la plus petite distance est entre le  $23^{\text{ème}}$  numéro noir et le  $5^{\text{ème}}$  numéro rouge (\*).