

MENTION

Solution du problème 102

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 654-656

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__654_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 102. (V. p. 370.)

PAR M. MENTION,

élève en spéciales.

Quatre points sont sur une même circonférence ; dans chacun des triangles formés par ces quatre points trois à trois existe un point de rencontre des hauteurs : ces quatre points

de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

I. *Lemme.* Dans tout triangle, la distance du cercle circonscrit, à l'un des côtés, est égale à la moitié du segment de la hauteur parallèle à cette distance ; segment compris entre le sommet et le point de rencontre des trois hauteurs.

Soit un triangle ABC dans lequel O est le point de rencontre des hauteurs, O' le centre du cercle circonscrit, je dis que nous aurons : $O'E = \frac{AO}{2}$, $O'D = \frac{BO}{2}$.

En effet, joignant ED, nous aurons deux triangles O'DE, AOB qui sont semblables ; donc nous aurons :

$$O'D:BO::DE:AB::O'E:BO.$$

$$\text{Mais } ED = \frac{AB}{2} ; \text{ donc } O'D = \frac{BO}{2}, O'E = \frac{AO}{2}.$$

Il en est de même de la troisième distance.

II. Soit un quadrilatère inscrit ABCD : E, G, F, H sont les points d'intersection des hauteurs. Il suffit de démontrer que le quadrilatère EGFH a ses côtés parallèles et égaux à ceux du quadrilatère donné.

1° Je vais démontrer, par exemple, que EG est parallèle à AB : d'abord AG et BE sont parallèles ; il faut donc prouver que BE = AG.

Or, d'après le lemme précédent, O étant le centre du cercle, nous avons BE = 2 OI, AG = 2 OI ; donc BE = AG. Démontrons encore que FH est parallèle à DC : il faut faire voir que CH = DF. Or DF = 2 OK ; CH = 2 OK ; donc DF = CH.

2° La circonférence circonscrite à ce nouveau quadrilatère est égale à la première. En effet, si nous prenons les deux triangles GEH, ADB ; ces deux triangles sont égaux, et quand deux triangles sont égaux, les rayons des cercles circonscrits à ces triangles sont égaux.

Le théorème est donc entièrement démontré.

Si le quadrilatère a deux angles droits , la démonstration est immédiate.

Le quadrilatère est alors BFDE.

DF étant perpendiculaire à BC sera parallèle à AB :

BE étant perpendiculaire à AD sera parallèle à DC :

BF sera de même parallèle à AD , ainsi que DE à BC.

(Prochainement la solution du problème 101, par le même.)