

LÉON ANNE

**Détermination des n derniers chiffres
de $\sqrt[n]{N}$ par une simple division**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 561-564

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4_561_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION

Des n derniers chiffres de $\sqrt[m]{N}$ par une simple division.

PAR M. LÉON ANNE,

Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Quand on a obtenu $(n + \mu + 1)$ chiffres de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre N , n étant le nombre des chiffres qui restent à obtenir, et μ le nombre des chiffres du nombre m ;

Si l'on divise le reste R auquel on est parvenu par m fois la $(m-1)^{\text{ième}}$ puissance de la partie obtenue [cette $(m-1)^{\text{ième}}$ puissance étant, bien entendu, suivie de $(m-1)$ fois n zéro] le quotient de cette division diffère de la partie qu'il reste à obtenir de moins d'une unité en plus ou en moins.

Soit a la partie obtenue, b celle qu'il reste à obtenir, r la différence entre N et la plus grande $m^{\text{ième}}$ puissance exacte contenue dans N et soit posé $a \cdot 10^n = A$, on a d'après l'énoncé :

$$N = (a \cdot 10^n + b)^m + r = (A + b)^m + r,$$

$$\frac{N - A^m}{m A^{m-1}} = b + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b^2}{A} + \dots + \frac{b^m}{m \cdot A^{m-1}} + \frac{r}{m \cdot A^{m-1}},$$

r peut être égal ou supérieur à $m(A + b)^{m-1}$ sans que $(A + b)$ cesse d'être le nombre le plus grand dont la $m^{\text{ième}}$ puissance peut se retrancher de N , ainsi le second membre de cette égalité peut être b ou $(b + 1)$. Comme il va être démontré qu'il est toujours inférieur à $(b + 2)$, et comme l'on ne prend que la partie entière du quotient $\frac{N - A^m}{m \cdot A^{m-1}}$ pour complément de la partie obtenue, il s'ensuit que cette méthode donne

$(A + b)$ ou $(A + b + 1)$ pour $\sqrt[m]{N}$, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement supérieur ou immédiatement inférieur à $\sqrt[m]{N}$. N étant au plus égal à $(A + b + 1)^m - 1$, il suffit pour établir le théorème de prouver que

$$\frac{(A + b + 1)^m - 1 - A^m}{m \cdot A^{m-1}} < b + 2,$$

ou

$$(A + b + 1)^m < A^m + m \cdot A^{m-1} (b + 1) + m \cdot A^{m-1} + 1;$$

supprimant $A^m + m \cdot A^{m-1} (b + 1)$ dans les deux membres, et les divisant ensuite tous les deux par A^m et enfin posant $(b + 1) = B$, on a :

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{B}{A}\right)^3 + \dots + \left(\frac{B}{A}\right)^m < \frac{m}{A} + \frac{1}{A^m}$$

cette inégalité sera à fortiori vérifiée si elle existe en remplaçant chaque coefficient du premier membre par un coefficient plus grand, et si en même temps l'on diminue le second membre de $\frac{1}{A^m}$; car les inégalités $M < N$, $N < P$, $P < Q$ donnent évidemment $M < Q$; or

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{B}{A}\right)^3 + \dots < \left(\frac{mB}{A}\right)^2 + \left(\frac{mB}{A}\right)^3 + \dots$$

donc l'inégalité précédente sera à fortiori vérifiée si l'on a :

$$\left(\frac{mB}{A}\right)^2 + \left(\frac{mB}{A}\right)^3 + \dots + \left(\frac{mB}{A}\right)^m < \frac{m}{A};$$

le produit de deux facteurs a autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis ou un de moins; b ayant n chiffres, $B = (b + 1)$ en a n ou $(n + 1)$, donc mB en a au plus $(\mu + n + 1)$, et comme A en a $(2n + \mu + 1)$, il s'ensuit que $\left(\frac{mB}{A}\right)$ est une fraction proprement dite [son numéra-

teur ayant moins de chiffres que son dénominateur] et l'on peut mettre l'inégalité précédente sous la forme :

$$\frac{\left(\frac{mB}{A}\right)^2 - \left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1}}{1 - \left(\frac{mB}{A}\right)} < \frac{m}{A},$$

ou

$$\frac{m^2 B^2}{A^2} + \frac{m^2 B}{A^2} - \left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1} < \frac{m}{A},$$

ou, multipliant les deux membres par $\frac{A^2}{m}$,

$$m(B^2 + B) - \frac{A^2}{m} \left(\frac{mB}{A}\right)^{m+1} < A;$$

si B a n chiffres, sa plus grande valeur est $(10^n - 1)$, et dans cette hypothèse

$$B^2 + B = B(B + 1) = (10^n - 1) 10^n,$$

c'est-à-dire, est un nombre formé de n chiffres 9 à la suite desquels sont écrits n zéro, au total $2n$ chiffres; donc $(B^2 + B)$ ne peut avoir plus de $2n$ chiffres, et par suite $m(B^2 + B)$ ne peut en avoir plus de $(\mu + 2n)$; ainsi $m(B^2 + B)$ ayant au moins un chiffre de moins que A , l'inégalité précédente est vérifiée.

Dans le cas où $B = (b + 1)$ aurait $(n + 1)$ chiffres, on aurait au plus $B = 10^n$, alors

$$mB^2 + mB = m \cdot 10^{2n} + m \cdot 10^n;$$

cette somme ne peut avoir au plus que $(2n + \mu + 1)$ chiffres, c'est-à-dire autant que A , à moins que l'indice m de la racine ne soit un nombre formé de plus de n chiffres 9 (n est le nombre de chiffres qui restent à obtenir). Ce cas est donc le seul qui puisse offrir quelque incertitude, mais alors il est facile de la lever en calculant un chiffre de plus, c'est-à-dire $(n + \mu + 2)$ au lieu de $(n + \mu + 1)$.

Remarque. Dans l'extraction d'une racine dont l'indice est inférieur à 10, c'est-à-dire dont l'indice n'a qu'un chiffre, il faut, d'après ce qui précède, que la partie obtenue ait au moins deux chiffres de plus que la partie qui reste à obtenir pour pouvoir achever l'opération par une simple division; cependant cette condition se simplifie pour la racine carrée, car il suffit que la partie obtenue ait un seul chiffre de plus que la partie restant à obtenir.

Pour le prouver, prenons le cas le plus défavorable :

$$N = (10^n \cdot a + b)^2 + 2(10^n \cdot a + b),$$

$$N = 10^{2n} \cdot a^2 + 2 \cdot 10^n \cdot a \cdot b + b^2 + 2 \cdot 10^n \cdot a + 2b,$$

$$\frac{N - 10^{2n} \cdot a^2}{2 \cdot 10^n \cdot a} = b + 1 + \frac{b^2 + 2b}{2 \cdot 10^n \cdot a};$$

la plus grande valeur de b est $(10^n - 1)$ nombre formé de n chiffres 9, dans cette hypothèse

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 \\ 2b &= 2 \cdot 10^n - 2 \end{aligned} \right\} b^2 + 2b = 10^{2n} - 1;$$

ainsi le numérateur de la fraction $\frac{b^2 + 2b}{2 \cdot 10^n \cdot a}$ est alors un nombre formé de $2n$ chiffres 9, et comme le dénominateur a $(2n+1)$ ou $(2n+2)$ chiffres, il s'ensuit que cette fraction est plus petite que l'unité, donc le quotient de la division $\frac{N - 10^{2n} \cdot a^2}{2 \cdot 10^n \cdot a}$ est b ou $(b+1)$, c'est-à-dire que cette méthode donne ou $(10^n \cdot a + b)$ ou $(10^n \cdot a + b + 1)$ pour $\sqrt{N}$; donc enfin l'on trouve le nombre entier immédiatement inférieur ou immédiatement supérieur à $\sqrt{N}$.