

TERQUEM

Question d'examen sur les racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 518-520

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__518_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN

sur les racines des équations.

—

PROBLÈME. Trouver l'équation aux moyennes géométriques des racines de l'équation $x^4 + 2 = 0$.

Solution. Soient x' , x'' deux racines de l'équation, et faisons $y = x'x''$; on a $x'^4 + 2 = 0$; $x''^4 + 2 = 0$. Éliminons x' et x'' ; il vient $x' = \frac{y}{x''}$; $y^4 + 2x''^4 = 0$. Il faut remplacer x'' par ses quatre valeurs; donc l'équation est $(y^4 - 4)^4 = 0$. Il en faut ôter les valeurs de y qui répondent à $x' = x''$, c'est-à-dire, l'équation aux carrés des racines de la proposée. Cette équation est $(y^2 + 2)^2$; donc l'équation cherchée est :

$$\frac{(y^4 - 4)^4}{(y^2 + 2)^2} = (y^2 - 2)^4 (y^2 + 2)^2,$$

ou simplement .

$$(y^2 - 2)^2 (y^2 + 2) = 0.$$

Telle est l'équation aux produits des racines prises deux à deux; faisant $y = z^2$, il vient $(z^4 - 2)^2 (z^4 + 2) = 0$. C'est l'équation cherchée.

Vérification. Les quatre racines sont :

$$x = \sqrt[4]{2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} (1 + \sqrt{-1}) \right] = a,$$

$$x = \sqrt[4]{2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} (1 - \sqrt{-1}) \right] = b,$$

$$x = \sqrt[4]{2} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{2} (1 + \sqrt{-1}) \right] = c,$$

$$x = \sqrt[4]{2} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{2} (1 - \sqrt{-1}) \right] = d.$$

$$ab = \sqrt{2}; \quad ac = -\sqrt{-2}; \quad ad = -\sqrt{2};$$

$$bc = -\sqrt{2}; \quad bd = \sqrt{-2}; \quad cd = \sqrt{2};$$

d'où

$$(y - \sqrt{2})^2 (y + \sqrt{2})^2 (y + \sqrt{-2}) (y - \sqrt{-2}) = (y^2 - 2)^2 (y^2 + 2) = 0$$

comme ci-dessus.

Autrement. On a :

$$y^4 - 4 = 0; \quad \text{d'où } y = \pm \sqrt{2}.$$

Soient x' , x'' , x''' , x^{iv} les quatre racines ; donc $x'x''x'''x^{iv}=2$.
 mais $x'x''=\sqrt{2}$; donc $x'''x^{iv}=\sqrt{2}$; il y a donc deux racines égales à $\sqrt{2}$, deux racines égales à $-\sqrt{2}$; l'équation complète est :

$$(y^4-4)(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})=(y^4-4)(y^2-2)=(y^2+2)(y^2-2)^2.$$