

Rayons de courbure dans les coniques, d'après le professeur Strehlke

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 399-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__399_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RAYONS DE COURBURE DANS LES CONIQUES.

D'après le professeur Strehlke (Crelle, tom. II, pag. 380. 1827).

I. *Lemme.* Soit $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ l'équation d'un cercle, axes rectangulaires; $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \alpha'', \beta''$ étant les coordonnées de trois points pris sur la circonférence, on déduit :

$$2p + \frac{2(\beta - \beta')}{\alpha - \alpha'} q = \alpha + \alpha' + \frac{\beta^2 - \beta'^2}{\alpha - \alpha'},$$

$$2p + \frac{2(\beta - \beta'')}{\alpha - \alpha''} q = \alpha + \alpha'' + \frac{\beta^2 - \beta''^2}{\alpha - \alpha''}.$$

II. Soit $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$ l'équation d'une ellipse, axes rectangulaires; $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \alpha'', \beta''$ trois points pris sur cette ellipse. Faisant $x = a \cos \varphi$, on aura $y = b \sin \varphi$; donc aussi :

$$\alpha = a \cos \varphi, \quad \beta = b \sin \varphi; \quad \alpha' = a \cos \varphi', \quad \beta = b \sin \varphi';$$

$$\alpha'' = a \cos \varphi'', \quad \beta'' = b \sin \varphi'';$$

d'où

$$\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = -\frac{b}{a} \cot \frac{\varphi + \varphi'}{2},$$

$$\alpha + \alpha' = a (\cos \varphi + \cos \varphi'),$$

$$\frac{\beta^2 - \beta'^2}{\alpha - \alpha'} = -\frac{b^2}{a} (\cos \varphi + \cos \varphi').$$

Faisant passer une circonférence par ces trois points, on aura, d'après le lemme I :

$$2p - \frac{2b}{a} \cot \frac{\varphi + \varphi'}{2} q = \frac{a^2 - b^2}{a} (\cos \varphi + \cos \varphi'),$$

$$2p - \frac{2b}{a} \cot \frac{\varphi + \varphi''}{2} q = \frac{a^2 - b^2}{a} (\cos \varphi + \cos \varphi'');$$

d'où l'on tire :

$$q = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sin \frac{\varphi + \varphi''}{2};$$

et de là :

$$p = -\frac{a^2 - b^2}{a} \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2} \left[\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sin \frac{\varphi + \varphi''}{2} \right]$$

et

$$r = (\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2.$$

Faisant $\varphi = \varphi' = \varphi''$, on a pour le cercle osculateur :

$$q = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \varphi; \quad p = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi;$$

$$R = \frac{(a^3 \sin^2 \varphi + b^3 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{ab}.$$

III. *Hyperbole*. Soit $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$ l'équation; faisant :

$$\alpha = \frac{a}{\cos \varphi}; \quad \beta = b \tan \varphi;$$

$$\alpha' = \frac{a}{\cos \varphi'}; \quad \beta' = b \tan \varphi';$$

$$\alpha'' = \frac{a}{\cos \varphi''}; \quad \beta'' = b \tan \varphi'';$$

et procédant de la même manière, on trouve finalement :

$$q = -\frac{a^2 + b^2}{b} \tan^3 \varphi; \quad p = \frac{a^2 + b^2}{a \cos \varphi^3}; \quad R = \frac{(\alpha \tan^3 \varphi + b^2 \sec^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{ab}.$$

IV. *Parabole*. Soit $y^2 = px$ l'équation ;

$$\beta^2 = p\alpha,$$

$$\beta'^2 = p\alpha',$$

$$\beta''^2 = p\alpha'';$$

d'où l'on tire :

$$q = -\frac{4x^2}{p^{\frac{1}{2}}}; \quad p = \frac{6x + p}{2}; \quad R = \frac{(p + 4x)^{\frac{1}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}.$$

(Voir Geronio, t. II, p. 170.)