

E. CATALAN

Note sur les fractions continues périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 126-130

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__126_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur les fractions continues périodiques ;

PAR E. CATALAN.

—

Pour établir cette proposition : *toute fraction continue périodique est égale à l'une des racines d'une équation du second degré*, la plupart des auteurs emploient la démonstration suivante, que je reproduis textuellement d'après l'un d'eux :

« Soient $a, b, c, \dots$ les premiers quotients, qui forment la partie non périodique ; et soient p, q , les quotients suivants, qui reviennent périodiquement. Posons :

$$\begin{array}{ccc}
 x = a + \frac{1}{b +} & & y = p + \frac{1}{q +} \\
 \vdots & & \vdots \\
 + \frac{1}{p + \text{etc.}} & & + \frac{1}{p + \text{etc.}}
 \end{array}$$

(*) En effet si b était $< a$ on insérerait les moyens entre b et a , ce qui conduirait aux mêmes résultats, et l'on aurait alors $q + x > 1$.

Il est clair que dans ces deux expressions, on pourra remplacer par y la suite $p + \text{etc.}$ de sorte qu'on aura

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{y}}}, \quad y = p + \frac{1}{q + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{y}}}.$$

Dans cette démonstration, le raisonnement suivant, dont j'ai déjà cité des exemples (III, 571), et qui paraît peu *clair*, est évidemment sous-entendu : *le nombre des périodes étant infini, il est permis d'en prendre une de plus ou une de moins; donc, etc.*

En cherchant une démonstration rigoureuse de la proposition dont il s'agit, je suis arrivé à plusieurs théorèmes qui n'avaient pas, je pense, été remarqués.

1. Soit, pour fixer les idées, la fraction continue périodique *simple* :

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$$

Représentons par $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$ les valeurs que l'on obtient, quand on limite cette fraction à la première période, ou à la seconde, ou à la troisième, etc. Soient aussi $\frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}, \frac{P}{P'}$ les réduites répondant aux termes c, d, e de la première période, de manière que

$$y_1 = \frac{P}{P'}, \quad P = Ne + M, \quad P' = N'e + M', \quad y_2 = \frac{Ne + M}{N'e + M'}.$$

Si, dans cette valeur de y_1 , nous remplaçons e par $c + \frac{1}{y_1}$, nous obtiendrons y_2 ; donc

$$x_2 = \frac{N \left(e + \frac{1}{x_1} \right) + M}{N' \left(e + \frac{1}{x_1} \right) + M'} = \frac{Px_1 + N}{P'x_1 + N'}.$$

De même, si dans x_1 nous remplaçons e par $e + \frac{1}{x_2}$, nous obtiendrions x_3 , etc. Donc, en général,

$$x_n = \frac{Px_{n-1} + N}{P'x_{n-1} + N'} \quad (1)$$

2. Soit $\frac{Q}{Q'}$ la fraction irréductible équivalente à x_{n-1} ; nous aurons :

$$x_n = \frac{PQ + NQ'}{P'Q + N'Q'}; \quad (2)$$

et je dis que la fraction contenue dans le second membre sera irréductible.

Soient R, R' les deux termes de cette fraction, savoir :

$$R = PQ + NQ', \quad R' = P'Q + N'Q'. \quad (3)$$

Entre ces équations, éliminons successivement Q et Q' ; nous trouverons :

$$RP' - R'P = (NP' - N'P)Q', \quad RN' - R'N = -(NP' - N'P)Q.$$

Or $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$ sont deux réduites consécutives; donc

$NP' - N'P = \pm 1$ (*). Par suite,

$$RP' - R'P = \pm Q', \quad RN' - R'N = \mp Q. \quad (4)$$

Ces équations prouvent que tout facteur commun à R et R' devrait diviser Q et Q' . Si donc, comme nous l'avons supposé, la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible, $\frac{R}{R'}$ sera pareillement irréductible.

(*) Le signe + répond au cas où le nombre des termes de la période est impair.

D'ailleurs, la fraction $\frac{P}{P'}$ qui donne la valeur de la première période, est une réduite; donc toutes les fractions obtenues successivement par l'application de la formule (1) sont des réduites.

3. Soient, comme précédemment,

$$x_{n-1} = \frac{Q}{Q'}, x_n = \frac{R}{R'}; \text{ d'où } x_n - x_{n-1} = \frac{RQ' - R'Q}{R'Q'}.$$

$$\text{Soit ensuite } x_{n+1} = \frac{S}{S'}; \text{ d'où } x_{n+1} - x_n = \frac{SR' - S'R}{S'R'}.$$

Pour comparer ces deux différences, j'observe que, d'après les équations (3),

$$S = PR + NR', \quad S' = P'R + N'R';$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} SR' - S'R &= (PR + NR')R' - (P'R + N'R')R \\ &= R(PR' - P'R) + R'(NR' - N'R); \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad SR' - S'R = \mp (RQ' - R'Q),$$

à cause des équations (4).

$$\text{Nous obtenons ainsi } x_{n+1} - x_n = \mp \frac{RQ' - R'Q}{S'R'}.$$

En comparant cette valeur et celle de $x_n - x_{n-1}$, on voit qu'elles ont même numérateur; donc le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives x_{n-1} , x_n , est constant.

4. Si nous retranchons x_1 de x_2 , nous obtenons, d'après la formule (2) :

$$x_2 - x_1 = \frac{P^2 + NP'}{P'(P' + N')} - \frac{P}{P'} = \frac{P'(NP' - N'P)}{P^2(P' + N')} = \pm \frac{P'}{P^2(P' + N')}.$$

Par suite, la valeur constante du numérateur de la différence entre x_{n-1} et x_n est P' , et nous avons

$$x_n - x_{n-1} = \pm \frac{P'}{R'Q'} \quad (*) \quad (5)$$

5. La première des équations (4) fait voir que si Q' est divisible par P' , R' sera pareillement divisible par ce facteur. Or le dénominateur de x_2 est $P'(P' + N)$: donc *les dénominateurs de toutes les réduites sont divisibles par P'* ; et conséquemment

$$x_n - x_{n-1} = \pm \frac{1}{R'Q'}, \quad (6)$$

en posant $Q' = P'Q''$.

6. Les équations (5) et (6) prouvent que la différence entre x_n et x_{n-1} diminue indéfiniment, à mesure que n augmente. Nous pourrions donc écrire :

$$x_n = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{x_n + \delta}}}}}$$

δ étant une quantité qui a pour limite zéro. Et si nous nommons y la *valeur* de la fraction continue, ou la limite de x_n , nous aurons :

$$y = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{y}}}}}$$

(*) Dans l'application de cette formule, on devra prendre le signe —, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et si ce nombre est *impair*, on prendra le signe + ou le signe —, selon que n sera *pair* ou *impair*.