

RISPAL

Quadrature de la logarithmique $y = a^x$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 117-120

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__117_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUADRATURE DE LA LOGARITHMIQUE $y = a^x$.

PAR M. RISPAL,

élève de l'École normale.

—

Nous supposons a positif et > 1 . On sait que la courbe se compose d'une branche MAN (*fig. 12*) qui coupe l'axe des y au point A pour lequel $AO = 1$, et qui a pour asymptote la partie négative de l'axe des x .

Supposons que nous voulions déterminer l'aire comprise entre OA et une ordonnée quelconque PQ.

Je partage l'abscisse QO en n parties égales à h ; et par les points de division, j'élève des perpendiculaires, et je construis les rectangles représentés par la figure. Il est évident que plus h sera petit, plus la somme de ces rectangles s'approchera de la surface de la courbe, et qu'enfin à la limite pour $h = 0$, cette somme représentera exactement la surface cherchée. Or, les ordonnées successives étant

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n,$$

on a $y_1 = a^h, y_2 = a^{2h}, \dots, y_n = a^{nh}$;

et la somme des aires est

$$S = h(a^h + a^{2h} + \dots + a^{nh}),$$

ou
$$S = \frac{h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1}.$$

Or
$$nh = x;$$

donc
$$S = (a^x - 1) \frac{h}{a^h - 1};$$

et en désignant par Σ l'aire de la courbe même, on a :

$$\Sigma = (a^x - 1) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{a^h - 1} \text{ pour } h = 0.$$

L'après un développement connu, on a la série

$$a^h = 1 + \frac{kh}{1} + \frac{k^2 h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

dans laquelle $k = \log a,$

d'où
$$\frac{a^h - 1}{h} = k + Ph,$$

$$\frac{h}{a^h - 1} = \frac{1}{k + Ph};$$

et pour $h = 0,$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{a^h - 1} = \frac{1}{k} = \frac{1}{l.a};$$

donc
$$\Sigma = \frac{a^x - 1}{l.a} = \frac{y - 1}{l.a}.$$

Nous ferons remarquer ici que les logarithmes sont pris dans le système népérien, dont la base est

$$e = 2,71828\ 18284 \dots$$

Dans la partie négative de l'axe des x , y est < 1 . On a donc :

$$y = \frac{1 - y}{l.a} = \frac{1 - \frac{1}{a^x}}{l.a};$$

et à mesure que x croît, a^x croît aussi; pour $x = \infty$, on a $z = \frac{1}{l.a}$. Telle est la surface comprise entre la partie négative de l'asymptote et la courbe.

Cette formule $z = \frac{y-1}{l.a}$ peut recevoir une interprétation géométrique assez curieuse.

Dans cette courbe on sait que la sous-tangente est constante et égale à $\frac{1}{l.a}$. Posons donc $m = \frac{1}{l.a}$, et il vient :

$$z = (y-1)m.$$

Si donc on veut connaître la surface MAOP (*fig. 12 bis*), on mène en M la tangente; on construit sur la tangente et la sous-tangente le rectangle SP; par le point A on mène à l'axe des x la parallèle AR, et on a :

$$\text{rect. SR} = \text{surf. MAOP}.$$

$$\text{En effet,} \quad \text{SR} = \text{MR} \cdot \text{RT} = (\text{MP} - \text{AO}) \text{PQ};$$

$$\text{mais} \quad \text{MP} = y, \quad \text{AO} = 1, \quad \text{PQ} = m;$$

$$\text{donc} \quad \text{SR} = (y-1)m.$$

On aurait pu arriver directement à ces résultats par le calcul différentiel.

$$\begin{aligned} \text{En effet, on a} \quad & ds = y dx, \\ & y = a^x; \\ \text{donc} \quad & ds = a^x dx, \\ & \int ds = \frac{a^x}{l.a} + c. \end{aligned}$$

Et comme pour $x = 0$, $s = 0$, on a :

$$\int_x^0 ds = \frac{a^x - 1}{l.a} = \frac{y-1}{l.a}.$$

De plus, la sous-tangente $m = \frac{y dx}{dy}$; mais

$$\begin{aligned} dy &= a^x l.a dx, \\ &= y l.a dx. \end{aligned}$$

Donc
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y l . a},$$

et par suite,
$$m = \frac{1}{l . a}.$$

Donc
$$\Sigma = (\gamma - 1) m,$$

comme nous l'avons trouvé d'une manière élémentaire.