GÉRONO

# Des racines infinies des équations algébriques

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 3 (1844), p. 85-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__85_1>

## DES RACINES INFINIES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

(Suite d'un premier article. Voy. t. III, pages 32... 40.)

4. Dans la discussion complète d'une équation à deux inconnues $F(x, y) = 0$, on peut aussi avoir à considérer des solutions composées d'une valeur infinie et réelle pour l'une des inconnues, $y$, et d'une valeur finie et réelle pour l'autre $x$.

Quand je dirai : l'équation proposée admet la solution $x = \alpha$, $y = \infty$ ($\alpha$ étant une quantité réelle et finie), voici ce qu'il faudra sous-entendre :

On peut donner à l'inconnue $x$ une valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$, assez peu différente de $\alpha$ pour que l'autre inconnue $y$ ait une valeur correspondante, $\beta$, plus grande que tout nombre déterminé $\delta$ ; et si l'on fait converger la valeur de $x$ vers $\alpha$, par la diminution progressive de $h$, la valeur correspondante de $y$ ira continuellement en augmentant à partir de $\beta$

C'est à ce genre de solutions que se rapporte, en définitive, la détermination des asymptotes rectilignes aux courbes algébriques.

Dans la recherche des solutions de la forme $x = \alpha, y = \infty$, j'ordonnerai l'équation proposée suivant les puissances décroissantes de $y$, en l'écrivant de cette manière :

$$Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0.$$

Je supposerai que A, B, C, etc. soient des fonctions entières de $x$, premières entre elles, et à coefficients numériques réels et finis. Aucune valeur substituée à $x$ ne pourra annuler à la fois toutes les fonctions A, B, C, etc., puisqu'elles sont débarrassées de tout diviseur commun.

5. L'équation $Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0$ ne peut admettre la solution $x = \alpha, y = \infty$, qu'autant que la substitution de $\alpha$ à $x$ annule le coefficient A du premier terme. Car si A ne se reduit pas à zéro, les racines de l'équation à une seule inconnue $y$, obtenue par la substitution dont il s'agit, ont évidemment une limite supérieure que l'on peut assigner. Ainsi, l'équation n'admet aucune solution de la forme indiquée, lorsque le coefficient A est indépendant de $x$ ; et il en est encore de même si, A contenant $x$, l'équation $A = 0$ n'a aucune racine réelle.

Mais il n'en faut pas conclure que toute racine réelle $\alpha$ de $A = 0$, donne à l'équation proposée la solution $x = \alpha, y = \infty$. Pour écarter cette conclusion, il suffira de prendre comme exemple les équations :

$$(x - 1)^2 y^4 + (x^2 + 1) y^2 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 y^4 + (x^2 + 1) y^2 - 1 = 0.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de $y$ de chacune de ces deux équations se réduit à zéro lorsque $x = 1$ ; et, cependant, si l'on donne à $x$ des valeurs plus grandes ou plus petites, aussi peu différentes de l'unité que l'on voudra, les valeurs correspondantes de $y$ seront, dans la première équation, toujours imaginaires; et dans la seconde, toujours moindres que l'unité.

Pour reconnaître quelles sont les racines $\alpha$ réelles et finies de $A = 0$, qui donnent à l'équation proposée $Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0$, des solutions de la forme $x = \alpha$, $y = \infty$, je distinguerai deux cas : suivant que le nombre des racines de $A = 0$, égales à $\alpha$, est impair ou pair.

6. *Si l'équation* $A = 0$ *a un nombre impair de racines égales au nombre* $\alpha$ *réel et fini, l'équation* $Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0$ *admettra nécessairement la solution* $x = \alpha$, $y = \infty$.

C'est-à-dire que

1° En remplaçant $x$ par $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ ($h$ étant un nombre réel suffisamment petit), l'équation à une seule inconnue $Ay^m + By^n + Cy^p + \ldots\ldots = 0$, aura au moins une racine réelle plus grande que tout nombre donné $\delta$.

2° Si l'on fait converger vers $\alpha$ la valeur $\alpha + h$, ou $\alpha - h$, substituée à $x$, la valeur correspondante de $y$ ira toujours en augmentant.

Ce sont les deux points qu'il faut établir.

La valeur $\alpha$ qui, substituée à $x$, annule $A$, peut de même annuler quelques-uns des coefficients suivants $B$, $C$, etc.; mais tous ces coefficients ne sont pas à la fois réductibles à zéro : je nomme $A'$ le premier des coefficients que $\alpha$ n'annule pas; $B'$, $C'$, etc. ceux qui peuvent suivre $A'$; et $h$ un nombre réel assez petit pour que l'équation $A' = 0$ n'ait aucune racine comprise entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$. Et de plus, je suppose qu'en faisant varier $x$ depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$, la fonction $A$ soit seulement réduite à zéro par $x = \alpha$.

D'après la notation indiquée, l'équation proposée est

$$Ay^m + By^n + \ldots\ldots + A'y^r + B'y^s + \ldots\ldots = 0.$$

Afin d'apporter plus de précision dans l'examen des valeurs et des signes que prend le premier membre, lorsque $x$ et $y$ reçoivent différentes valeurs, je considérerai d'abord séparément chacun des deux polynômes $A'y^r+B'y^s+\ldots..$, et $Ay^m+By^n+$etc.

On peut donner à l'inconnue $y$ une valeur $y'$ assez grande pour que, en faisant varier $x$ depuis $\alpha+h$ jusqu'à $\alpha-h$, le polynôme $A'y^r+B'y^s+$ etc. ait constamment le signe de son premier terme $A'y^r$. En effet, soient $a'$ la plus petite valeur que prend A', et M le maximum de B', C', etc., lorsque $x$ varie depuis $\alpha+h$ jusqu'à $\alpha-h$ : il suffira, pour satisfaire à la condition énoncée, de remplacer $y$ par un nombre $y'$ au moins égal à $\frac{M}{a'}+1$ (*). La même condition étant remplie par tout nombre plus grand que $\frac{M}{a'}+1$, je supposerai $y'$ au moins égal au nombre donné $\delta$.

En substituant $y'$ à $y$ dans le second polynôme $Ay^m+$ $+By^n+$, etc., et faisant varier $x$ depuis $\alpha+h$ ou $\alpha-h$ jusqu'à $\alpha$, on donnera à ce polynôme des valeurs absolues aussi petites que l'on voudra : car, lorsque $x=\alpha$, tous les coefficients A, B, ....., s'annulent à la fois (**). Pour des valeurs de $h$ suffisamment petites, on aura toujours, en valeurs absolues, l'inégalité $Ay'^m+By'^n+\ldots.<A'y'^r+B'y'^s+\ldots.$ En effet, nommons N le minimum des valeurs de $A'y'^r$ $+B'y'^s\ldots$, correspondantes aux valeurs de $x$ comprises entre $\alpha+h$ et $\alpha-h$, l'inégalité indiquée existera nécessairement

(*) Car toutes les équations à une seule inconnue, $y$, déterminées par la substitution des valeurs attribuées à $x$, auront leur premier terme plus grand que la somme de tous les autres termes, lorsqu'on y remplacera $y$ par $\frac{M}{a'}+1$, ou bien par une valeur plus grande. C'est un principe démontré dans tous les traités d'algèbre.

(**) Les fonctions A, B..., admettant le diviseur $x-\alpha$ à des puissances $m'$, $n'$, etc., prendront la forme $ah^{m'}$, $bh^{n'}$, etc., lorsqu'on y substituera $\alpha+h$ à $x$; c'est pourquoi le polynôme $Ay'^m+By'^n\ldots$ devient aussi petit que l'on veut, en donnant à $h$ une valeur suffisamment petite.

dès que $Ay'^m + By'^n + \ldots.$ deviendra moindre que N.

Enfin, je ferai encore observer qu'il est possible, en disposant convenablement du signe de $h$, de donner aux coefficients A et A′ des signes contraires. Si, par exemple, les valeurs de $x$ comprises entre $\alpha + h$ et $\alpha$ rendent ces deux coefficients positifs : pour les valeurs de $x$ comprises entre $\alpha - h$ et $\alpha$, le premier deviendra négatif et l'autre ne changera pas de signe ; ils auront donc alors des signes contraires. La possibilité de satisfaire à cette dernière condition tient, comme on voit, à ce que l'équation $A = 0$, a un nombre impair de racines égales à $\alpha$.

Cela posé, remplaçons $y$ par $y'$, et $x$ par $\alpha \pm h$, dans le premier membre de l'équation $Ay^m + By^n + \ldots. + A'y^r + B'y^s + \ldots. = 0$. En disposant du signe et de la grandeur de $h$, comme nous venons de l'indiquer, les termes $Ay'^m$, $A'y'^r$ auront des signes contraires, et la valeur absolue du polynôme $Ay'^m + By'^n +$ etc., sera moindre que celle du polynôme $A'y'^r + B'y'^s +$ etc. ; alors le premier membre de l'équation proposée aura un signe contraire à celui de son premier terme $Ay^m$.

Puis, sans rien changer à la valeur ni au signe de $h$, faisons croître $y$ à partir de $y'$, jusqu'à ce que le premier membre de l'équation prenne le signe de son premier terme, et conserve ce signe pour toute valeur plus grande de $y$. Par cette augmentation progressive de la variable $y$, le premier membre de l'équation s'annulera au moins une fois, puisqu'il change de signe dans l'intervalle des valeurs attribuées à $y$. Ainsi l'équation en $y$ aura au moins une racine réelle $\beta$ plus grande que $y'$. On peut d'ailleurs prendre, pour la valeur de $\beta$, la plus grande des racines de l'équation. Donc,

1° En remplaçant $x$ par $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ ($h$ étant un nombre réel suffisamment petit) l'équation proposée $Ay^m + By^n$

$+$ etc., $= 0$, aura au moins une racine réelle, $\beta$, plus grande que le nombre donné $\delta$.

Si plusieurs valeurs différentes de $h$ correspondent à $y=\beta$, je prendrai pour $h$ la plus petite de toutes. Ainsi $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ représentera, parmi les valeurs de $x$ qui peuvent correspondre à $y = \beta$, celle qui diffère le moins de $\alpha$. Alors, en faisant diminuer $h$, le polynôme $A\beta^m + B\beta^n + \ldots\ldots\ldots + A'\beta^r + B'\beta^s + \ldots$, qui était annulé, reprendra immédiatement le signe du terme $A'\beta^r$, pour $h' < h$, quelque petite que soit d'ailleurs la diminution de $h$ (*). Et comme, en augmentant la valeur de $y$ à partir de $\beta$, on pourra de nouveau donner au polynôme $Ay^m + By^n + \ldots + A'y^r + B'y^s + \ldots$, le signe de son premier terme $Ay^m$, l'équation admettra, pour $h' < h$, une racine $\beta' > \beta$. D'où je conclus que

2° Si l'on fait converger vers $\alpha$, la valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ attribuée à $x$, la valeur cerrespondante de $y$ ira toujours en augmentant.

Et, par conséquent, l'équation proposée admettra réellement la solution $x = \alpha$, $y = \infty$.

7. En général, l'équation proposée admettra toujours pour l'inconnue $y$ une valeur infinie réelle, correspondante à la valeur réelle et finie $\alpha$ de l'autre inconnue $x$, qui annule le coefficient A de la plus haute puissance de $y$ : lorsque, en attribuant à $x$ une valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$, suffisamment rapprochée de $\alpha$, il sera possible de donner des signes contraires au premier terme $Ay^m$ de l'équation et au premier des termes $A'y^r$ dont le coefficient A' n'est pas annulé par la substitution de $\alpha$ à $x$ (**).

---

(*) Si la substitution de $h'$ à $h$ donnait au polynôme un signe contraire à celui du terme $A'\beta^r$, il y aurait entre $h'$ et 0 une valeur $h'' < h$ correspondante à $y = \beta$; car lorsque $h = 0$, le polynôme a évidemment le signe du terme $A'\beta^r$.

(**) Je ne veux pas dire que cette condition soit indispensable, elle est seulement suffisante. J'examinerai plus loin (n. 9) comment, lorsqu'elle n'est pas remplie, on peut reconnaître si la valeur de $y$ correspondante à $x = \alpha$ est encore l'infini réel.

C'est là une conséquence évidente de la démonstration qui vient d'être donnée n° 6.

Que si nous avons considéré $\alpha$ comme une racine simple, ou d'un ordre de multiplicité impair, de l'équation $A=0$, c'est parce qu'il est alors toujours possible de faire prendre des signes contraires aux deux termes $Ay^m$, $A'y^r$, en disposant convenablement des signes de $h$ et de $y$.

Dans chaque cas particulier, il sera facile de distinguer quels sont les signes de $h$ et de $y$ qui donnent aux deux termes $Ay^m$, $A'y^r$ des signes différents. Cette observation est utile pour la construction des courbes; j'en montrerai immédiatement l'utilité, en appliquant le principe du n° 6 à la recherche des asymptotes, parallèles à l'axe des ordonnées, d'une courbe algébrique.

8. Pour reconnaître si l'équation

$$Ay^m + By^n + \text{etc.} = 0$$

représente une courbe ayant une ou plusieurs asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées, il faut précisément savoir si cette équation admet des solutions de la forme $x=\alpha$, $y=\infty$, en définissant, comme nous l'avons fait, les solutions de cette forme; car à chacune de ces solutions correspond une branche de courbe qui a pour asymptote la droite $x=\alpha$; et réciproquement, à chacune des asymptotes, $x=\alpha$, parallèles à l'axe des ordonnées correspond une solution de la forme $x=\alpha$, $y=\infty$.

D'après cela, pour déterminer les asymptotes dont il s'agit, on cherche d'abord les racines réelles de l'équation à une seule inconnue $A=0$, et il reste ensuite à examiner si les valeurs de $x$ ainsi obtenues donnent à $y$ des valeurs réelles infinies.

Lorsque la racine obtenue $\alpha$ est simple ou multiple d'ordre impair, une des valeurs correspondantes de $y$ est toujours réelle infinie (n° 6); donc l'équation proposée représente une courbe dont une branche au moins a pour asymptote la droite $x = \alpha$.

Afin que cette première donnée puisse servir à construire une partie de la courbe avec quelque précision, il faut encore savoir de quel côté de l'axe des abscisses et de la droite $x = \alpha$ les branches de la courbe deviennent asymptotes à cette droite.

A cet effet, je substitue à $x$ la valeur $\alpha$ dans les coefficients successifs B, C, etc., jusqu'à ce que je parvienne à un terme $A'y^r$ dont le coefficient $A'$ ne soit pas annulé par la substitution de $\alpha$. Ce coefficient $A'$ se réduira à un nombre $r'$ dont le signe est déterminé.

Puis, après avoir divisé le coefficient A du premier terme $Ay^m$ par la plus haute puissance de $x - \alpha$ qui entre comme facteur dans ce coefficient, je remplace encore $x$ par $\alpha$ dans le quotient obtenu; il en résulte un nombre $m'$ positif ou négatif.

Supposons d'abord que les deux nombres $r'$, $m'$ aient le même signe.

Les termes $A'y^r$, $Ay^m$ prendront des signes contraires lorsqu'on fera varier $x$ depuis $\alpha - h$ jusqu'à $\alpha$, en donnant de plus à $y$ des valeurs positives, par conséquent, la droite $x = \alpha$ sera asymptote à une branche de la courbe située du côté des ordonnées positives; et si $\alpha$ est positif, en laissant aux axes la disposition ordinaire, cette branche sera située à gauche de l'asymptote $x = \alpha$.

Lorsque les exposants $r$, $n$ de $y$ dans les termes $A'y^r$, $Ay^m$ seront tous deux pairs ou tous deux impairs, ces termes prendront encore des signes contraires pour des valeurs négatives de $y$, les valeurs de $x$ étant toujours comprises entre $\alpha - h$ et $\alpha$. Ainsi, la droite $x = \alpha$ est encore asymptote à une branche de la courbe située au-dessous de l'axe des $x$, cette nouvelle branche sera, comme la première, dirigée à gauche de l'asymptote.

Mais si l'un des deux exposants $r$, $n$ est pair et l'autre impair, en donnant à $y$ des valeurs négatives, il faudra faire varier $x$ depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha$, pour que les termes $Ay^m$, $A'y^r$ prennent des signes contraires ; alors les deux branches sont situées de différents côtés de l'asymptote.

On déterminera de même la situation relative de la droite $x = \alpha$ et des branches auxquelles elle est asymptote, dans le cas particulier où les deux nombres $r'$ et $m'$ ont des signes contraires.

G.

(*La fin prochainement.*)