

HUET

Volumes engendrés

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 393-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__393_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VOLUMES ENGENDRES

(Mêmes figures que pour les surfaces). — Fin (voir p. 361)

PAR M. HUET,

ancien professeur de mathématiques spéciales à l'Ecole de Sorrèze,
régent de mathématiques spéciales au collège de Pamiers

—

1° *Triangle.*

$$\begin{aligned}\text{Vol T} &= \text{vol CBEF} - 2 \text{ vol ABF} = \overline{\text{BF}}^2 \cdot \text{CB} - \frac{2}{3} \overline{\text{BF}}^3 \cdot \text{AF} = \\ &= \overline{\text{BF}}^2 \left(\text{CB} - \frac{2}{3} \text{AF} \right) = \frac{2}{3} \text{CB} \cdot \overline{\text{BF}}^2;\end{aligned}$$

$$\text{or} \quad AB = R\sqrt{3}, \quad BF = \frac{3}{2}R;$$

$$\text{donc} \quad \text{vol T} = \frac{3}{2}\pi R^3\sqrt{3}.$$

2° *Carré.*

$$\begin{aligned} \text{Vol C} &= 2\text{vol CAB} = 2(\text{vol CAEB} - \text{vol ABE}) = \\ &= \frac{2}{3}\pi AE(\overline{CA} + \overline{BE} + CA \cdot BE - \overline{BE}^2) = \frac{2}{3}\pi AE \cdot CA(CA + BE) = \\ &= \frac{2}{3}\pi AE \cdot \frac{3}{2}CA^2 = \frac{1}{2}\pi CA^3; \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad CA = 2R;$$

$$\text{donc} \quad \text{vol C} = 4\pi R^3.$$

3° *Pentagone.*

$$\begin{aligned} \text{Vol P} &= 2\text{vol ABCD} = 2\text{vol DCAG} + 2(\text{vol CBHG} - \text{vol ABH}) = \\ &= 2\text{vol T} + \text{vol T}'). \end{aligned}$$

$$\text{Vol T} = \pi AG \cdot \overline{CG}^2; \quad \text{vol T}' = \text{vol t} - \text{vol t}';$$

$$\text{or} \quad \text{vol t} = \frac{1}{3}\pi GH(\overline{CG}^2 + \overline{BH}^2 + CG \cdot BH), \quad \text{et} \quad \text{vol t}' = \frac{1}{3}\pi AH \cdot \overline{BH}^2.$$

$$\text{Cela posé, } AC = D = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}; \quad AB = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$AG = \frac{AB}{2} = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \quad CG = \frac{R}{4}(5+\sqrt{5}); \quad AH = \frac{D}{2} =$$

$$\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}; \quad GH = \frac{D}{2} - AG = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{20-8\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$\text{donc} \quad \text{vol T} = \pi \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \cdot \frac{R^2}{16}(30+10\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times (3+\sqrt{5}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{80+32\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5}{8}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vol } t = \frac{1}{3} \pi \frac{R}{2} \sqrt{5-2\sqrt{5}} \left\{ \frac{R^2}{16} (30+10\sqrt{5}) + \frac{R^2}{16} (30-10\sqrt{5}) + \right. \\ \left. + \frac{20R^2}{16} \right\} = \frac{5}{6} \pi R^3 \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vol } t' = \frac{1}{3} \pi \frac{R}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot \frac{R^2}{16} (30-10\sqrt{5}) = \\ = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \pi R^3 \sqrt{80-32\sqrt{5}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi R^3 \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Par suite, vol } T' = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi R^3 \left\{ 4\sqrt{5-2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}} \right\} = \\ = \frac{5}{8} \pi R^3 \sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

et partant,

$$\text{vol } P = 2(\text{vol } T + \text{vol } T') = \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \\ = \frac{5}{4} \pi R^3 \left(\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}} \right) = \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

4° Hexagone.

$$\text{Vol } H = 2 \text{ vol } ABCD = 2 (\text{vol } ADCG - \text{vol } ABG) = \\ = \frac{2}{3} \pi AG (\overline{DA}^2 + \overline{CG}^2 + DA \cdot CG - \overline{BG}^2) = \\ = \frac{2}{3} \pi AG \left\{ \overline{DA}^2 + (CG + BG)(CG - BG) + DA \cdot CG \right\} = \\ = \frac{2}{3} \pi AG \cdot DA (DA + CB + CG) = \frac{2}{3} \pi AG \cdot 2R(4R + BG) = 6\pi R^2 \cdot AG;$$

$$\text{or} \quad AG = \frac{R}{2} \sqrt{3}, \quad \text{donc } \text{vol } H = 3\pi R^3 \sqrt{3}.$$

5° Octogone.

$$\text{Vol } O = 2 \text{ vol } ABCDE = 2 (\text{vol } ABDE + \text{vol } BCD) = \\ = 2 (\text{vol } T + \text{vol } T').$$

$$\text{Vol } T = \text{vol } AFDE - \text{vol } ABF = \frac{1}{3} \pi AF (\overline{AE}^2 + \overline{DF}^2 + AE \cdot DF - \overline{BF}^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \pi AF \left\{ \overline{AE}^2 + (DF + BF)(DF - BF) + AE \cdot DF \right\} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi FG \cdot DB (AE + DB + DF) = \frac{2}{3} \pi AF \cdot CG \left(3CG + \frac{3}{2} DB \right) = \\
 &= \pi AF \cdot CG (2CG + DB).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vol T}' &= \text{vol DCGF} - \text{vol BFGC} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi FG (\overline{DF}^2 + \overline{CG}^2 + DF \cdot CG - \overline{BF}^2 - \overline{CG}^2 - BF \cdot CG) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi FG \left\{ (DF + BF)(DF - BF) + CG (DF - BF) \right\} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi FG \cdot DB (AE + CG) = \pi FG \cdot DB \cdot CG.
 \end{aligned}$$

Or, $CG = R$; $DB = R\sqrt{2}$; $AF = \frac{DB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$;

$$FG = R - AF = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2});$$

donc

$$\text{vol T} = \pi \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R(2R + R\sqrt{2}) = \frac{\pi R^3}{2} (2 + 2\sqrt{2}) = \pi R^3 (1 + \sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vol T}' &= \pi \cdot \frac{R}{2} (2 - \sqrt{2}) \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{\pi R^3}{2} (2\sqrt{2} - 2) = \\
 &= \pi R^3 (\sqrt{2} - 1);
 \end{aligned}$$

par suite $\text{vol T} + \text{vol T}' = 2\pi R^3 \sqrt{2}$,

et partant $\text{vol O} = 4\pi R^3 \sqrt{2}$.

6° Décagone.

$$\begin{aligned}
 \text{Vol D} &= 2 \text{vol ABCDEF} = 2 (\text{vol ABEF} + \text{vol BCDE}) = \\
 &= 2 (\text{vol T} + \text{vol T}').
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vol T} &= \text{vol AGEF} - \text{vol ABG} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi AG (\overline{AF}^2 + \overline{EG}^2 + AF \cdot EG - \overline{BG}^2) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi AG \left\{ \overline{AF}^2 + (EG + BG)(EG - BG) + AF \cdot EG \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \pi AG \cdot AF (AF + EB + EG) = \frac{2}{3} \pi AG \cdot AO \left(3AO + \frac{3}{2} EB \right) = \\ = \pi AG (2AO + EB).$$

$$\text{Vol T} = \frac{1}{3} \pi GK (\overline{EG^2} + \overline{DK^2} + EG \cdot DK - \overline{BG^2} - \overline{CK^2} - BG \cdot CK) = \\ = \frac{1}{3} \pi GK \left\{ (EG + BG)(EG - BG) + (DK + CK)(DK - CK) + EG \cdot DK - \right. \\ \left. - BG \cdot CK \right\} = \frac{1}{3} \pi GK (AE \cdot EB + AE \cdot DC + EG \cdot DK - BG \cdot CK).$$

Cela posé, on a $OA = R$; $AE = 2R$;

$$PB = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}; \quad AG = \frac{PB}{2} = \frac{R}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$EY = \sqrt{R^2 - AG^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{R}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\ = \frac{R}{4}(1 + \sqrt{5}); \quad EB = 2EY = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{5}); \quad DC = C = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$AK = r = \sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \\ = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}; \quad GK = AK - AG = \frac{R}{4} \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \right. \\ \left. - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right) = \frac{R}{4} \sqrt{20 - 8\sqrt{5}} = \frac{R}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}};$$

$$BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \frac{R}{4} \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \frac{R}{4}(3 - \sqrt{5});$$

$$CK = R - \frac{C}{2} = \frac{R}{4}(5 - \sqrt{5}); \quad EG = EB + BG = \frac{R}{4}(5 + \sqrt{5});$$

$$DK = C + CK = \frac{R}{4}(3 + \sqrt{5}).$$

$$\text{On a donc} \quad \text{vol T} = \pi \cdot \frac{R^2}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \left\{ 2R + \frac{R}{2}(1 + \sqrt{5}) \right\} = \\ = \frac{\pi R^3}{8} (5 + \sqrt{5}) \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{\pi R^3}{8} \sqrt{200 + 40\sqrt{5}} = \\ = \frac{\pi R^3}{4} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned}\text{Vol T}' &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R}{2} \sqrt{5-2\sqrt{5}} \left\{ R^2(1+\sqrt{5}) + R^2(\sqrt{5}-1) + \right. \\ &+ \frac{R^2}{16} (5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) - \frac{R^2}{16} (3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \pi R^3 \sqrt{5-2\sqrt{5}} \cdot 48\sqrt{5} = \frac{1}{2} \pi R^3 \sqrt{25-10\sqrt{5}}; \\ \text{partant,}\end{aligned}$$

$$\text{vol T} + \text{vol T}' = \frac{1}{4} \pi R^3 \left\{ \sqrt{50+10\sqrt{5}} + 2\sqrt{25-10\sqrt{5}} \right\}.$$

En élevant la parenthèse au carré et en extrayant la racine carrée, on obtient :

$$\text{vol T} + \text{vol T}' = \frac{1}{4} \pi R^3 \sqrt{250-50\sqrt{5}} = \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$\text{et par suite, } \text{vol D} = \frac{5}{2} \pi R^3 \sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

expression égale à la surface engendrée par le pentagone, multipliée par la moitié du rayon R; résultat remarquable.

7°. Dodécagone.

$$\text{Vol D} = 2 \text{ vol ABCDEFG} = 2 (\text{vol T} + \text{vol T}' + \text{vol T}').$$

$$\text{Vol T} = \text{vol ABFG} = \text{vol AHFC} - \text{vol ABH} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \text{AH} (\overline{\text{AC}}^2 + \overline{\text{HF}}^2 + \text{AG} \cdot \text{HF} - \overline{\text{BH}}^2) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \text{AH} \left\{ \overline{\text{AG}}^2 + (\text{HF} + \text{BH})(\text{HF} - \text{BH}) + \text{AG} \cdot \text{HF} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \text{AH} \cdot \text{AG} (\text{AG} + \text{BF} + \text{HF}) = \frac{2}{3} \pi \text{AH} \cdot \text{AO} (3\text{AO} + \frac{3}{2}\text{BF}) =$$

$$= \pi \text{AH} \cdot \text{AO} (2\text{AO} + \text{BF}).$$

$$\text{Vol T}' = \text{vol HFEK} - \text{vol HBCK} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \text{KH} (\overline{\text{HF}}^2 + \overline{\text{KE}}^2 + \text{HF} \cdot \text{KE} - \overline{\text{BH}}^2 - \overline{\text{CK}}^2 - \text{BH} \cdot \text{CK}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \pi \text{KH} \left\{ (\text{HF} + \text{BH})(\text{HF} - \text{BH}) + (\text{KE} + \text{CK})(\text{KE} - \text{CK}) \right\} + \\ &+ \text{HF} \cdot \text{KE} - \text{BH} \cdot \text{CK} \left. \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \pi KH \left\{ AG \cdot BF + AG \cdot CE + HF \cdot KE - BH \cdot CK \right\}.$$

$$\text{Vol T''} = \text{vol KEDL} - \text{vol KCDL} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \pi KL (\overline{KE}^2 + \overline{DL}^2 + EK \cdot DL - \overline{DL}^2 - \overline{CK}^2 - DL \cdot CK) = \\ & = \frac{1}{3} \pi KL \left\{ KE(KE + DL) - (DL + CK) CK \right\}. \end{aligned}$$

Or, on trouve facilement $OA = RE = CE = DL = R$;
 $AG = 2R$; $AH = OV = \frac{1}{2} R$; $FB = R\sqrt{3}$; $AB = C =$
 $= R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $BH = \sqrt{C^2 - AH^2} = \frac{R}{2} \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} =$
 $= \frac{R}{2} (2 - \sqrt{3})$; $FH = FB + BH = R\sqrt{3} + \frac{R}{2} (2 - \sqrt{3}) =$
 $\frac{R}{2} (2 + \sqrt{3})$; $KE = \frac{3}{2} R$; $CK = EK - EC = \frac{1}{2} R$; $DY = \frac{1}{2} R$;
 $KL = CY = \sqrt{C^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2} (2 - \sqrt{3})$; $HK = AL - AH =$
 $KL = \frac{R}{2} - \frac{1}{2} R (2 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} R (\sqrt{3} - 1).$

Donc $\text{vol T} = \pi \cdot \frac{R^3}{2} (2R + R\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \pi R^3 (2 + \sqrt{2})$;
 $\text{Vol T'} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R}{2} (\sqrt{3} - 1) \left\{ 2R^2 \sqrt{3} + 2R^2 + \frac{3}{4} R^2 (2 + \sqrt{2}) - \right.$
 $\left. - \frac{R^2}{4} (2 - \sqrt{2}) \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi R^3 (\sqrt{3} - 1) (12 + 12\sqrt{3}) =$
 $= \frac{1}{2} \pi R^3 (\sqrt{3} - 1) (\sqrt{3} + 1) = \pi R^3.$

$$\begin{aligned} \text{Vol T''} &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R}{2} (2 - \sqrt{2}) \left\{ \frac{3}{2} R \left(\frac{3}{2} R + R \right) - \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{2} R + R \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi R^3 (2 - \sqrt{2}) \cdot 12 = \frac{1}{2} \pi R^3 (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Partant, $\text{vol T} + \text{vol T'} + \text{vol T''} = \frac{1}{2} \pi R^3 \cdot 6 = 3\pi R^3,$

et par suite, $\text{vol D} = 6\pi R^3,$

résultat d'une simplicité remarquable.

Nous allons maintenant vérifier ces résultats par la méthode de Guldin. D'abord on trouve facilement pour expressions des surfaces des polygones réguliers en fonction de R :

$$\begin{aligned}\text{surf T} &= \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}; \text{ surf C} = 2R^2; \\ \text{surf P} &= \frac{5}{8} R^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}}; \text{ surf H} = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}; \\ \text{surf O} &= 2R^2 \sqrt{2}; \text{ surf DC'C} = \frac{5}{4} R^2 \sqrt{5-2\sqrt{5}}; \\ \text{surf Dod} &= 3R^2.\end{aligned}$$

On a donc, en appliquant la formule $\text{vol Pol} = S \cdot 2\pi R$:

$$\begin{aligned}\text{vol T} &= \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3} \cdot 2\pi R = \frac{3}{2} \pi R^3 \sqrt{3}; \text{ vol C} = 2R^2 \cdot 2\pi R = 4\pi R^3; \\ \text{vol P} &= \frac{5}{8} R^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot 2\pi R = \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{10+2\sqrt{5}}; \\ \text{vol H} &= \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3} \cdot 2\pi R = 3\pi R^3 \sqrt{3}; \\ \text{vol O} &= 2R^2 \sqrt{2} \cdot 2\pi R = 4\pi R^3 \sqrt{2}; \\ \text{vol D} &= \frac{5}{4} R^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot 2\pi R = \frac{5}{2} \pi R^3 \sqrt{10-2\sqrt{5}}; \\ \text{vol Dod} &= 3R^2 \cdot 2\pi R = 6\pi R^3;\end{aligned}$$

résultats identiques avec ceux que nous venons de trouver par la géométrie.

On pourrait encore, en suivant l'une des deux marches que nous venons d'employer, trouver les expressions des mêmes volumes, soit en fonction du côté c , soit en fonction de l'apothème r .

Par exemple, en fonction du côté, on trouverait :

$$\begin{aligned}\text{vol T} &= \frac{1}{2} \pi c^3; \text{ vol C} = \pi c^3 \sqrt{2}; \text{ vol P} = \frac{1}{4} \pi c^3 (5 + 3\sqrt{5}); \\ \text{vol H} &= 3\pi c^3 \sqrt{3}; \text{ vol O} = 2\pi c^3 \sqrt{20+14\sqrt{5}}; \\ \text{vol Dc'c} &= \frac{5}{2} \pi c^3 \sqrt{50+22\sqrt{5}}; \text{ vol Dod} = 3\pi c^3 (3\sqrt{6} + 5\sqrt{2}).\end{aligned}$$