NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Note sur les racines infinies des équations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 32-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__32_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE

sur les racines infinies des équations.

Je me propose d'examiner quelques points de la théorie des asymptotes rectilignes aux courbes algébriques.

Dans l'ordre d'exposition que j'adopte, il est utile de parler en premier lieu des racines infinies des équations à une seule inconnue. Je commence par l'examen du principe suivant :

I. *Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation*,

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0,$$

devient nul, l'équation admet une racine infinie.

Expliquons d'abord quel est le sens précis de cet énoncé, ou du moins celui que nous y attacherons.

Les coefficients B, C, ..., sont supposés réels et déterminés; le coefficient, A, du premier terme est variable, et peut recevoir des valeurs aussi petites que l'on voudra, *tant négatives que positives* : il sera toujours possible de donner à ce coefficient A une valeur, α, assez petite pour que l'équation $\alpha x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0$ ait une racine réelle plus grande que tout nombre déterminé δ, et cette racine réelle deviendra de plus en plus grande, lorsque α diminuera progressivement, en convergeant vers zéro.

C'est seulement cela que je veux exprimer en disant : *Lorsque le coefficient du premier terme devient nul, l'équation admet une racine infinie.*

Et par conséquent, je ne dirai pas : L'équation $A^2x^2+1=0$ a ses racines infinies quand $A=0$; car ces racines restent constamment imaginaires, quelque petite que soit la valeur réelle attribuée au coefficient A (*).

La même observation s'applique à l'équation $A^2x^6+x^4+ +x^2-1=0$, quoique celle-ci ait deux racines réelles pour toutes les valeurs réelles de A. Mais ces racines ne peuvent devenir aussi grandes que l'on voudra, car elles sont, nécessairement, moindres que l'unité.

Au reste, les conclusions tirées de ces deux exemples ne sont nullement en contradiction avec le principe énoncé, puisque, dans l'énoncé même de ce principe, j'ai expressément supposé que le coefficient du premier terme de l'équation considérée pouvait recevoir des valeurs tant négatives que positives ; c'est-à-dire pouvait changer de signe ; tandis que, au contraire, dans les deux équations prises pour exemple, j'ai admis, par la forme même attribuée au coefficient du premier terme, que ce coefficient conserverait constamment le même signe.

Considérons encore l'équation générale du second degré à une seule inconnue $Ax^2 + Bx + C = 0$, dont les deux ra-

(*) On objectera, peut-être, que cela n'empêche pas les racines de devenir infinies quand $A=0$; seulement, elles sont alors infiniment grandes imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Cette manière de parler peut être admise, mais je préfère parler autrement.

cines x', x'', sont déterminées par les formules.

$$x' = \frac{-2C}{B+\sqrt{B^2-4AC}}, \qquad x'' = \frac{-2C}{B-\sqrt{B^2-4AC}}.$$

Je suppose que les coefficients invariables B, C, soient positifs, et je donne au coefficient, A, du premier terme des valeurs positives de plus en plus petites. Dès que l'inégalité $A < \frac{B^2}{4C}$ sera satisfaite, les deux racines de l'équation seront réelles, et la racine x'' ira toujours en augmentant pour des valeurs décroissantes de A, à partir de $\frac{B^2}{4C}$. Il est d'ailleurs évident que l'on peut donner au coefficient A une valeur positive assez petite pour que la valeur de x'' surpasse tout nombre donné δ. Enfin, cette racine x'' reste constamment négative dans tous les états de grandeur qu'elle acquiert, lorsque la valeur positive de A diminue progressivement, en convergeant vers zéro. C'est ce que je conviens d'exprimer ainsi :

L'équation $+Ax^2 + Bx + C = 0$, a une racine infinie négative, quand le coefficient, $+A$, de son premier terme se réduit à zéro.

Si l'on suppose A négatif, la racine x'' reste constamment positive, et augmente au delà de toute limite assignable, pour des valeurs absolues de A, suffisamment petites. C'est pourquoi je dirai :

L'équation $-Ax^2 + Bx + C = 0$ a une racine infinie positive, quand le coefficient $-A$ de son premier terme se réduit à zéro.

Si le second terme manque, l'équation est $Ax^2 + C = 0$. Le coefficient C étant supposé positif, les racines de l'équation restent imaginaires pour toutes les valeurs positives de A ; mais lorsqu'on donne au coefficient A des valeurs négatives, l'équation devient $-Ax^2 + C = 0$; et si A s'annule, cette dernière équation a deux racines infinies, l'une positive et l'autre négative.

2. Je passe actuellement à la démonstration du principe général énoncé n° 1.

Je considère d'abord l'équation de degré pair

$$Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0,$$

dans laquelle le second terme a un coefficient négatif, et je donne au coefficient A du premier terme des valeurs positives indéfiniment décroissantes.

Dans cette hypothèse, l'équation ne peut admettre une racine infinie négative; car si l'on désigne par N la valeur absolue du plus grand des coefficients B, C, etc., les racines négatives auront pour limite $-\left(\frac{N}{B}+1\right)$.

Mais on peut donner au coefficient A une valeur positive α assez petite pour que l'équation admette une racine positive plus grande que tout nombre donné δ, et si la valeur de A continue à décroître à partir de α, cette racine réelle ira en augmentant.

En effet, soit N la valeur absolue du plus grand des coefficients du polynôme $-Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} +$ etc.; en remplaçant, dans ce polynôme, la variable x par $\left(\frac{N}{B}+1\right)$, ou bien, par une valeur plus grande, le résultat de la substitution sera négatif, et sa valeur absolue augmentera continuellement avec celle de la quantité substituée à x. C'est là un principe démontré dans les Éléments d'Algèbre. Cela posé, désignons par β un nombre au moins égal au plus grand des deux nombres $\frac{N}{B}+1$ et δ; et, substituons β à x dans le premier nombre $Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} +$ etc. de l'équation proposée. Ce polynôme deviendra $A\beta^{2m} - B\beta^{2m-1} + C\beta^{2m-2}$

+ etc., ou bien encore : $A\beta^{2m} - n$, en nommant $-n$ la valeur de $-B\beta^{2m-1} + C\beta^{2m-2} +$ etc. Et par conséquent, en donnant au coefficient A une valeur positive α moindre que $\frac{n}{\beta^{2m}}$, le résultat de la substitution de β à x dans le premier membre de l'équation $\alpha x^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \text{etc.} = 0$, sera négatif. Or, si l'on remplace x par $\frac{N}{\alpha} + 1$, le premier membre de cette équation devient positif, et conserve le même signe pour toute valeur plus grande substituée à x, donc, l'équation aura une racine β' comprise entre β et $\frac{N}{\alpha} + 1$. Il est d'ailleurs évident qu'on a $\beta' > \delta$, puisque β est, par hypothèse, au moins égal à δ.

Il faut encore observer que β' est la plus grande des racines positives de l'équation $\alpha x^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$, car le premier membre de cette équation reste constamment positif pour des valeurs croissantes de x, à partir de β'.

Mais on donnera à l'équation $Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$ une racine plus grande que β', en remplaçant A par une valeur positive α' moindre que α. En effet, l'égalité $\alpha\beta'^{2m} - B\beta'^{2m-1} + C\beta'^{2m-2} + \ldots = 0$ donne :

$$\alpha'\beta'^{2m} - B\beta'^{2m-1} + C\beta'^{2m-2} + \ldots < 0.$$

D'où il suit que l'équation $\alpha' x^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$ a une racine positive supérieure à β'.

Ainsi, l'équation $+Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \text{etc.} = 0$ admet une racine infinie positive, quand A se réduit à zéro.

Si les valeurs décroissantes attribuées au coefficient du premier terme sont constamment négatives, l'équation prend la forme :

$$-Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0,$$

et ses racines positives ont nécessairement pour limite

$\frac{N}{B} + 1$. Dans ce cas, il sera possible de donner à A une valeur α assez petite pour que l'équation ait une racine négative $-\beta'$ plus grande, en valeur absolue, que tout nombre négatif $-\delta$ assigné. Et la valeur de β' ira en augmentant à mesure que α deviendra plus petit. En d'autres termes :

L'équation $-Ax^{2m} - Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots = 0$ aura une racine infinie négative, lorsque $A = 0$.

Le raisonnement est, dans ce second cas, entièrement semblable à celui du premier.

La même analyse s'applique, sans aucune modification :

1° Aux équations de degré pair $\pm Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots = 0$, dont le second terme a un coefficient positif, puisqu'il suffira, pour rendre ces deux nouvelles équations identiques avec les deux premières, de changer les signes de tous leurs termes.

2° Aux équations de degré impair $\pm Ax^{2m-1} \pm Bx^{2m-2} + \ldots = 0$. Car si l'on introduit dans ces équations une racine nulle, en multipliant tous leurs termes par x, elles prendront la forme des équations déjà considérées.

3. Pour compléter la démonstration, il reste encore à examiner les équations privées de leur second terme.

Je prends pour exemple l'équation $Ax^{2m} + Fx^{2n} + Hx^{p} + + \ldots = 0$. de degré pair, et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. Le second terme manquant, je suppose que le premier des termes à coefficient invariable, $+Fx^{2n}$, soit positif et d'un degré pair. Puis, je donne au coefficient A du premier terme des valeurs indéfiniment décroissantes, mais positives.

Les racines positives ou négatives des équations déterminées de cette manière, ne peuvent devenir infinies, car elles resteront moindres que $\frac{N}{F} + 1$, en désignant par N la valeur absolue du plus grand des coefficients invariables de ces équations.

Mais, si l'on donne au coefficient A des valeurs négatives convergentes vers zéro, l'équation $-Ax^{2m}+Fx^{2n}+Ax^{p}+\ldots=0$, aura, pour des valeurs de A suffisamment petites, une racine positive, et une racine négative, toutes deux plus grandes, en valeurs absolues, que des nombres quelconques désignés, et ces racines iront en augmentant pour des valeurs décroissantes de A. C'est ce qui résulte évidemment de l'analyse du n° 2 (p. 35-36).

Lorsque A s'annule, l'équation $-Ax^{2m}+Fx^{2n}+\ldots=0$ a donc deux racines infinies, l'une positive, et l'autre négative.

Le premier des termes à coefficient invariable peut être de degré impair, comme dans l'équation

$$Ax^{2m}+Fx^{2n-1}+Hx^{p}+\ldots=0.$$

Alors, la démonstration donnée n° 2, pour les équations dont le second terme n'est pas nul, s'applique immédiatement. Par conséquent, lorsque $A=0$,

L'équation

$$+Ax^{2m}+Fx^{2n-1}+Hx^{p}+\ldots=0,$$

a une racine infinie négative, et l'équation

$$-Ax^{2m}+Fx^{2n-1}+Hx^{p}+\ldots=0,$$

une racine infinie positive.

Toute équation privée de second terme se ramène à l'une des quatre formes d'équations déjà considérées, par un changement de signe dans tous les termes, ou bien, en introduisant une racine nulle. Ainsi, dans tous les cas :

L'équation à une seule inconnue

$$Ax^{m}+Bx^{n}+Cx^{p}+\ldots=0$$

admet au moins une racine réelle infinie, quand le coefficient du premier terme, supposé variable et susceptible de changer de signe, se réduit à zéro.

J'ajouterai encore quelques mots sur deux raisonnements très-simples, au moyen desquels on a voulu établir, sans aucune restriction, le principe que je viens d'examiner. Quelque facile que soit la réfutation de ces raisonnements, elle ne peut être déplacée dans un article qui s'adresse uniquement à des commençants.

La première des démonstrations dont je veux parler consiste à mettre d'abord l'équation proposée

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots = 0,$$

sous la forme $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots = 0$. Puis, on fait observer que si $A = 0$, la fonction $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} +$ etc. est convergente vers zéro, pour de très-grandes valeurs de x, et s'annule quand x devient infini. — *Or, la fonction qu'il s'agit* d'annuler n'est pas $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} +$ etc., mais le produit $\left(A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots\right) x^m$. Si le premier facteur est convergent vers zéro pour de très-grandes valeurs de x, par cela même, le second facteur x^m se rapproche de l'infini; et jusque-là, on ne peut rien conclure pour la valeur du produit.

L'autre raisonnement n'est guère plus concluant. Dans celui-ci, on remplace x par $\frac{1}{y}$, il vient :

$$\frac{A}{y^m} + \frac{B}{y^{m-1}} + \frac{C}{y^{m-2}} + \ldots = 0 ;$$

faisant disparaître les dénominateurs, on a :

$$A + By + Cy^2 + \text{etc.} = 0.$$

Cette dernière équation admet une racine nulle, quand $A = 0$; et de là $x = \infty$. — Mais, la fonction de y qu'il faut

annuler, est maintenant le produit $(A+By+Cy^2+\ldots.)\times\frac{1}{y^m}$.
Et l'objection reste la même. G. (*La suite prochainement.*)