NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Solution d'un problème sur le billard circulaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 242-249

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__242_1>

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME SUR LE BILLARD CIRCULAIRE.

(*Question d'examen.*)

On donne un cercle et deux points intérieurs A, B (fig. 25) ; *ces points étant considérés comme des billes infiniment petites, et la circonférence comme une ligne matérielle parfaitement élastique : on propose de déterminer sur la circonférence un point* D *tel que la bille* A, *dirigée vers le point* D, *revienne au point* B, *après s'être réfléchie sur la circonférence.*

1. Supposez le problème résolu, et menez les cordes DAF, DBE, et les tangentes HDG, FH, EG. Les angles FDH, EDG seront égaux ; donc, les cordes DAF, DBE, auront la même longueur, et par conséquent le triangle DHF sera

égal au triangle DGE. D'ailleurs, les points H, G, appartiennent aux polaires OX, OY des points donnés A, B : ainsi, la question se ramène à inscrire dans l'angle donné YOX, une droite HDG qui touche, en son milieu D, une circonférence située dans l'intérieur de l'angle.

Pour mettre en équations ce dernier problème, je dirige les axes de coordonnées suivant les côtés OX, OY de l'angle donné YOX ; et je prends pour inconnues les deux coordonnées x', y', du point D, milieu de HDG. Le coefficient de l'inclinaison de la droite HDG, sur l'axe OX, sera $-\frac{y'}{x'}$, comme il est facile de s'en assurer. De plus, on sait que si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe FDE, et X', Y' les dérivées de $f(x, y)$, relatives à x et y, dans lesquelles les variables x, y sont remplacées par x', y', le coefficient d'inclinaison de la tangente HDG a aussi pour expression $-\frac{X'}{Y'}$: donc $\frac{y'}{x'} = \frac{X'}{Y'}$; d'où $Y'y' - X'x' = 0$. Par conséquent, on aura, pour déterminer les valeurs des inconnues x', y', les équations $f(x', y') = 0$, $Y'y' - X'x' = 0$.

Ainsi, quelle que soit la courbe FDE dont l'équation est $f(x, y) = 0$, le point D auquel il faut mener la tangente HDG est situé sur la ligne $Yy - Xx = 0$.

Dans la question proposée, la courbe FDE étant une circonférence, l'équation $f(x, y) = 0$ devient $y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta + ay + bx + c = 0$. L'angle θ est l'angle YOX que forment les polaires OX, OY des points A, B. Les coefficients a, b, changés de signe, représentent les doubles des distances du point O, pôle de la droite AB, aux pieds des perpendiculaires CL, CI, abaissées du centre C sur les axes. Et le coefficient c est le carré de la tangente menée du point O à la circonférence. On a d'ailleurs $Y = 2y + 2x\cos\theta + a$,

$X = 2x + 2y\cos\theta + b$; et par suite l'équation $Yy - Xx = 0$ devient $2y^2 - 2x^2 + ay - bx = 0$.

Elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les polaires OX, OY ; ou, ce qui revient au même, les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles que forment les droites CA, CB. Cette hyperbole passe par les quatre sommets du quadrilatère OICL, elle a son centre au milieu de la diagonale IL. Enfin, les tangentes à la courbe, aux points L, I, où elle coupe les polaires des points B, A, sont parallèles à la droite BA. En effet, ces tangentes doivent être perpendiculaires à l'hypoténuse des triangles rectangles OLC, OIC, dont les côtés de l'angle droit sont des cordes de l'hyperbole équilatère; et la droite AB est aussi perpendiculaire à CO, car le point O est le pôle de AB.

Dans le cas particulier où $CA = CB$, on a : $CI = CL$; $OI = OL$; $a = b$, et alors, l'équation $2y^2 - 2x^2 + ay - bx = 0$ représente les deux diagonales CO, IL du quadrilatère COLI.

Si l'on suppose $CA > CB$, on aura $CI < CL$, l'angle $ICO >$ l'angle LCO. La bissectrice de l'angle ACB sera située dans l'intérieur de l'angle ICO, et comme cette bissectrice est parallèle à l'une des asymptotes, il faudra que les deux points C, I se trouvent sur une des deux branches de l'hyperbole, et les points O, L seront situés sur l'autre branche. La première, qui passe par le centre du cercle, coupera nécessairement la circonférence en deux points D, D'. Et il est facile de reconnaître que ces deux points satisfont à la question proposée. C'est-à-dire que si l'on dirige la bille A vers un de ces points, par exemple au point D, elle reviendra en B, après s'être réfléchie sur la circonférence.

Car le rayon CD étant moyen géométrique entre CA et CI; les triangles CDA, CDI sont semblables, et l'angle $ADC =$ $= DIC$. De même, la similitude des triangles CDB, CDL donne BDC = DLC. Mais l'hyperbole considérée étant équilatère, la différence des angles DIL, DLI est égale à la différence des angles CIL, CLI (*), on a donc DIC = DLC, et par conséquent ADC = BDC.

D'après cela, on voit que la question proposée admet au moins deux solutions.

2. Le nombre des solutions est, dans tous les cas, égal à celui des points communs à la circonférence et à l'hyperbole. Afin de déterminer le nombre de ces points par le calcul le plus simple, je transporte l'origine des coordonnées au centre C de la circonférence. Puis je dirige l'axe des y suivant la bissectrice CY de l'angle ACB des deux droites CA, CB, menées du centre aux deux points donnés A, B (*fig.* 26), et je prends, pour axe des x, la bissectrice de l'angle adjacent BCA′, en supposant toujours CB < CA. Enfin, je nomme α, β, les coordonnées x, y du centre de l'hyperbole, situé au milieu M de la droite IL, qui unit les pieds I, L des perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les polaires des points A, B; et r le rayon de la circonférence.

L'équation de la circonférence sera $y^2+x^2=r^2$, et celle de l'hyperbole : $xy-\alpha y-\beta x=0$. La première donne $\dfrac{y}{x+r}=\dfrac{r-x}{y}$; et, en posant $\dfrac{y}{x+r}=z$, $\dfrac{r-x}{y}=z$, on en déduit $y=\dfrac{2rz}{1+z^2}$, $x=\dfrac{r(1-z^2)}{1+z^2}$. Substituant les valeurs de x, y dans $xy-\alpha y-\beta x=0$, il vient :

$$\frac{2r^2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}-\frac{2\alpha rz+\beta r(1-z^2)}{(1+z^2)}=0\,;$$

(*) La différence des angles formés par le diamètre IL avec les cordes supplémentaires menées à ses extrémités, est égale à l'angle de ce diamètre et de la tangente menée par l'une de ses extrémités. La tangente à l'hyperbole au point I étant parallèle à AB, l'angle dont il s'agit est précisément celui des deux droites AB, IL.

ou $$z^4 - \frac{2(r+\alpha)}{\beta} z^3 + \frac{2(r-\alpha)}{\beta} z - 1 = 0.$$

Posons $-\frac{2(r+\alpha)}{\beta} = A$, $\frac{2(r-\alpha)}{\beta} = B$, il en résultera l'équation $z^4 + Az^3 + Bz - 1 = 0$, qui a déjà été discutée (t. II, pag. 18-21).

On a démontré que si les coefficients A, B de cette dernière équation satisfont à l'inégalité $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 < 0$, ses quatre racines sont réelles et inégales.

Deux de ces quatre racines réelles deviennent égales, lorsque $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = 0$.

Deux des racines de l'équation sont imaginaires, si l'on a $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 > 0$.

Or, les égalités $A = -\frac{2(r+\alpha)}{4}$, $B = \frac{2(r-\alpha)}{4}$, donnent $\frac{A+B}{4} = -\frac{\alpha}{\beta}$, et $\frac{A-B}{4} = -\frac{r}{\beta}$. Par suite, on a :

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1, = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} - \sqrt[3]{\frac{r^2}{\beta^2}} + 1;$$

on en concluera que :

L'équation $z^4 - \frac{2(r+\alpha)}{\beta} z^3 + \frac{2(r-\alpha)}{\beta} z - 1 = 0$ a ses quatre racines réelles et inégales, lorsque les coordonnées α, β du centre de l'hyperbole satisfont à l'inégalité $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} < \sqrt[3]{r^2}$. Deux des racines réelles de cette équation deviennent égales entre elles, lorsque les coordonnées α, β donnent $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} = \sqrt[3]{r^2}$. Deux des racines sont imaginaires, si l'on a $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} > \sqrt[3]{r^2}$.

Dans le premier cas, chacune des branches de l'hyperbole coupe la circonférence, et alors le problème admet quatre solutions, déterminées par les quatre points E, E', D, D', communs aux deux courbes.

Dans le second, la branche de l'hyperbole EE' qui ne contient pas le centre du cercle, devient tangente à la circonférence. Et enfin, cette branche n'a aucun point de commun avec la circonférence quand l'inégalité $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2}>\sqrt[3]{r^2}$ a lieu.

La condition $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2}<\sqrt[3]{r^2}$ montre dans quelle partie du plan du cercle doit se trouver le milieu M de la droite IL, pour qu'il soit possible de déterminer sur la circonférence quatre points E, E', D, D' satisfaisant à la question proposée. En effet, construisez la courbe PQRS (*fig.* 26), dont l'équation est $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{r^2}$. Si la condition $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2}<\sqrt[3]{r^2}$ est remplie, le point M devra être situé dans l'intérieur de la partie du cercle terminée par cette courbe. C'est le cas particulier où le problème admet quatre solutions. Lorsque le point M est sur la courbe, le nombre des solutions se réduit à trois; et il y en a seulement deux, si ce point est extérieur à la partie du cercle terminée par la courbe. On conçoit, d'après cela, que le nombre des solutions est égal à celui des tangentes que l'on peut mener par le point M à la courbe PQRS. C'est d'ailleurs ce qui résultera des considérations suivantes.

Je prolonge la droite CM, d'une longueur MN = CM; le point N sera sur l'hyperbole. Je joins le point N à un des points, E', communs à l'hyperbole et à la circonférence, par la droite NE', dont le prolongement coupe les asymptotes aux points O, O', et les axes des coordonnées en H, G. Je mène encore le rayon CE', et la droite MF parallèle à CE'. Le point F sera le milieu de la corde NE', puisque M est le milieu de CN. De plus, NO = E′O′, comme parties d'une sécante à l'hyperbole, comprises entre la courbe et ses asymptotes ; donc, le point F est au milieu de la droite OO′. D'où je conclus, à cause du parallélisme des droites CE′, MF, que E′ est aussi le milieu de l'hypoténuse HG du triangle rectangle HCG. Et, par suite, HG = 2CE′. Ce qui montre d'abord qu'on obtiendra les points cherchés E′, E, D′, D, en menant par le point N, donné dans l'intérieur de l'angle droit YCX, des droites telles que leurs parties, comprises entre les côtés de l'angle prolongés, soient égales au diamètre du cercle, et en prenant les milieux de ces droites.

Cela posé, si l'on conduit par le point M, milieu de CN, une parallèle à HG, terminée à la rencontre des axes OX, OY, elle sera égale à la moitié de HG, c'est-à-dire au rayon r de la circonférence. Or, toute droite égale à r, et inscrite dans les angles formés par les axes, est tangente à la courbe PQRS dont l'équation est $\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{r^2}$ (t. I, p. 265). Donc, à chacun des points E, E′, D, D′, correspond une tangente à la courbe PQRS, menée par le point M, et réciproquement. C'est ce que nous voulions démontrer.

3. Lorsque CA=CB (*fig.* 27), on a CI=CL ; le triangle CIL étant isocèle, la bissectrice CY de l'angle ICL passe par le milieu M de la base IL du triangle, et $\alpha = 0$. L'équation $z^4 + \frac{2(r+\alpha)}{6} z^3 + \frac{2(r-\alpha)}{6} z - 1 = 0$ est alors une équation réciproque $z^4 - \frac{2r}{6} z^3 + \frac{2r}{6} z - 1 = 0$; et il est facile de la résoudre, et d'obtenir les coordonnées des points cherchés, au moyen des relations $y = \frac{2rz}{1+z^2}$, $x = \frac{r(1-z^2)}{1+z^2}$. Mais, dans ce cas particulier, l'équation $xy - \alpha y - 6x = 0$ devient $xy - 6x = 0$; elle représente les deux droites $x = 0$, $y = 6$.

La première est la bissectrice de l'angle ACB, la seconde est la droite IL. La droite $x=0$ coupe toujours la circonférence en deux points D, D' (*fig.* 27), qui satisfont évidemment à la question proposée. Si la distance CM ou β est moindre que le rayon du cercle, la droite IL rencontrera la circonférence en deux points E, E', qui conviendront aussi à la question. C'est ce que l'on peut vérifier en conduisant les droites EA, EC, EB. Car le rayon EC étant moyen géométrique entre CA et CI, les triangles ECA, ICE seront semblables ; donc, l'angle AEC = l'angle CIL. De même, la similitude des triangles CEB, CEL donne BEC = CLI. Mais les angles CIL, CLI sont égaux, puisque CL = CI. Par conséquent AEC = BEC. On prouverait, de même, que AE'C = BE'C.

4. Si les points donnés A, B, sont en ligne droite avec le centre C du cercle (*fig.* 28) : la droite IL coïncidera avec l'axe CX; l'ordonnée β du milieu M de IL sera nulle. Alors l'équation $xy-\alpha y-\beta x=0$ se réduit à $xy-\alpha y=0$; elle représente les deux droites $y=0$, $x=\alpha$. La première rencontre la circonférence aux points D, D', qui répondent à la question proposée. La droite $x=\alpha$ rencontrera la circonférence en deux points E, E', lorsqu'on aura $\alpha<r$. Et ces deux points satisferont encore au problème. Pour le vérifier, je mènerai la tangente HEG, qui coupe aux points H, G les polaires IH, LG de A, B. On aura HE = EG, puisque IM = ML. D'ailleurs, la corde des contacts EK des tangentes HE, HK passe par le point A, et celle des tangentes GE, GF contient le point B. Les triangles isocèles KEH, FGE étant égaux, on aura l'angle HEK = FEG. C'est ce qu'il fallait démontrer.

G.