

ÉDOUARD MERLIEUX

Question sur les équations dérivées

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 178-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__178_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION SUR LES ÉQUATIONS DÉRIVÉES (*),

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD),

élève en spéciales (première place).

—

Quelles sont les conditions nécessaires pour que les équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées d'un polynôme de la forme

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} \dots + P_n x^{m-n} \dots + P_m,$$

depuis la $(m-n)^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(m-1)^{\text{e}}$, aient une racine commune?

(*) Proposée au collège Louis-le-Grand. Classe de M. Richard, en février 1844.

Quelle est la forme générale des polynômes fonctions de x du $m^{\text{ième}}$ degré qui jouissent de cette propriété?

Résoudre l'équation que l'on obtient en égalant à zéro l'un de ces polynômes, m étant égal à une puissance de 2 et n étant égal à $m - 1$.

1.

Posons

$$f(x) = x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} \dots + P_n x^{m-n} \dots + P_m.$$

La dérivée de ce polynôme, de l'ordre $(m - n)$, étant désignée par $f^{(m-n)}(x)$,

$$\begin{aligned} f^{(m-n)}(x) = & m(m-1) \dots (n+1) x^n + (m-1)(m-2) \dots \\ & \dots n P_1 x^{n-1} + (m-2)(m-3) \dots (n-1) P_2 x^{n-2} \\ & \dots + (m-n)(m-n-1) \dots 2.1. P_n, \end{aligned}$$

le terme général de ce développement est

$$(m-p)(m-p-1) \dots (n-p+1) P_p x^{n-p},$$

l'indice p étant plus petit que n .

Si on suppose $n=1$, on aura ainsi la dérivée de l'ordre $m-1$:

$$f^{(m-1)}(x) = m(m-1) \dots 2.x + (m-1)(m-2) \dots 1.P.$$

Posons donc les équations

$$f^{(m-n)}(x) = 0, f^{(m-n+1)}(x) = 0 \dots f^{(m-2)}(x) = 0, f^{(m-1)}(x) = 0.$$

Considérés relativement à $f^{(m-n)}(x)$, les premiers membres des équations qui suivent $f^{(m-n)}(x) = 0$ sont les $(n-1)$ premières dérivées de $f^{(m-n)}(x)$. Si donc on suppose qu'il existe une racine commune aux n équations précédentes, il résulte de la théorie des racines égales qu'elle sera multiple dans $f^{(m-n)}(x)$, et que son degré de multiplicité sera égal à n ; d'ailleurs cette racine sera facile à obtenir, car $f^{(m-1)}x = 0$ étant du premier degré, on en tire immédiatement

$$x = -\frac{P_1}{m}.$$

$f^{(m-n)}(x)$ étant du degré n et contenant le binôme $x + \frac{P_1}{m}$ à la puissance n , sera donc égal à $\left(x + \frac{P_1}{m}\right)^n$, à un facteur numérique près, facteur numérique qui n'est autre que le coefficient de x^n dans $f^{(m-n)}(x)$. Divisant cette fonction par $m(m-1) \dots (n+1)$, on aura

$$\begin{aligned} x^n + \frac{n}{m} P_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m(m-1)} P_1^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)} P_1^3 x^{n-3} + \\ \dots = \left(x + \frac{P_1}{m}\right)^n = x^n + n \cdot \frac{P_1}{m} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\frac{P_1}{m}\right)^2 x^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \left(\frac{P_1}{m}\right)^3 x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux nombres devant être égaux, on a les identités

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} P_1 &= n \cdot \frac{P_1}{m}, \\ \frac{n(n-1)}{m(m-1)} P_1^2 &= \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\frac{P_1}{m}\right)^2, \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)} P_1^3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \left(\frac{P_1}{m}\right)^3; \end{aligned}$$

la première montre que P_1 reste indéterminé; mais des suivantes on tire $P_2, P_3, \dots, P_n$ en fonctions de P_1 :

$$P_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} \left(\frac{P_1}{m}\right)^2, \quad P_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \left(\frac{P_1}{m}\right)^3, \text{ etc.}$$

Telles sont les $(n-1)$ conditions demandées.

II.

Le polynôme proposé est de la forme

$$x^m + m \cdot \frac{P_1}{m} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \left(\frac{P_1}{m}\right)^2 x^{m-2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \left(\frac{P_1}{m}\right)^3 x^{m-3} + \dots \\
 & \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.\dots n} \left(\frac{P_1}{m}\right)^n x^{m-n} + \\
 & + P_{n+1} x^{m-n-1} + \dots + P_{m-1} x + P_m,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les $(n+1)$ premiers termes sont égaux aux $(n+1)$ premiers termes du développement de la puissance m de $\left(x + \frac{P_1}{m}\right)$.

III.

Si on suppose $n = m - 1$, d'où $m - n = 1$, le polynôme égalé à zéro devient

$$\begin{aligned}
 x^m + m \cdot \frac{P_1}{m} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \left(\frac{P_1}{m}\right)^2 x^{m-2} + \dots \\
 \dots + m \left(\frac{P_1}{m}\right)^{m-1} x + P_m = 0,
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\left(x + \frac{P_1}{m}\right)^m + P_m - \left(\frac{P_1}{m}\right)^m = 0,$$

équation telle que si on fait disparaître le second terme, elle se réduit à une équation binôme.

La formule qui en donne les racines est

$$x = -\frac{P_1}{m} + \sqrt[m]{\left(\frac{P_1}{m}\right)^m - P_m},$$

le radical devant recevoir toutes les déterminations dont il est susceptible.

Dans le cas particulier où m est une puissance de 2, l'équation se résout par une suite d'extractions de racines carrées.