

H. FAURE

Solution du problème 71

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 170-172

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__170_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLEME 71. (T. II , p .327.)

PAR M. FAURE (H.),

élève en spéciales.

Soit l'équation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$.

Posons $A = \sqrt{p^2 - q}$. Si les trois racines sont réelles , elles sont comprises , la première entre $-p - 2A$ et $-p - A$; la deuxième entre $-p - A$ et $-p + A$; la troisième entre $-p + A$ et $-p + 2A$.

Posons $x = y - p$. Si l'on substitue cette valeur à la place de x dans l'équation , la transformée

$$(1) \quad y^3 - 3A^2y + 2p^3 - 3pq + r = 0, \quad (*)$$

(*) Cette équation peut se mettre sous la forme $(y - A)^2 (y + 2A) - 2A^3 + 2p^3 - 3pq + r = 0$; tous les résultats deviennent intuitifs. Tm.

manque de second terme. Les racines de cette équation étant égales à celles de la proposée augmentées de p , la question sera ramenée à prouver que l'équation en y a une racine comprise entre $-2A$ et $-A$, la deuxième entre $-A$ et $+A$, et la troisième entre $+A$ et $+2A$, en supposant d'abord que toutes les racines soient réelles.

Pour démontrer qu'il y a une racine entre $-2A$ et $-A$, il suffit de faire voir que si l'on substitue ces quantités à la place de y dans l'équation (1), on obtient deux résultats de signes contraires.

Or, en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation on a :

$$y^2 - A^2 = 0, \quad \text{d'où } y = \pm A.$$

Si les racines sont réelles, celles de la dérivée le sont aussi ; donc A^2 est une quantité positive. Le second terme de l'équation est donc négatif, quant au dernier il peut être positif ou négatif. Supposons-le d'abord positif. D'après le théorème de Rolle, il y a une racine entre $+A$ et $-A$; or $-A$ donne pour résultat $2A^3 + 2p^3 - 3pq + r$, quantité positive ; donc $+A$ donne un résultat négatif.

Effectuons la substitution de $-A$ et de $-2A$ pour $y = -A$, on a pour résultat $2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2$.

$$y = -2A \quad \text{»} \quad -2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2.$$

Le premier résultat est positif ; je dis que le deuxième est négatif. Si dans l'équation on fait $y = 0$, on obtient un résultat positif, ainsi que pour $y = \infty$. Mais comme l'équation a deux racines positives, puisque son premier membre offre deux variations, et que toutes ses racines sont réelles ; on est certain en vertu du théorème de Rolle, que si l'on substitue la racine positive $+A$ de la dérivée dans l'équation, on doit obtenir un résultat négatif. Faisant la substitution, on trouve

$$-2A^3 + 2p^3 - 3pq + 2 < 0.$$

Donc entre $y = -A$ et $y = -2A$, il y a une racine de l'équation. Comme $+A$ et $-A$, ont aussi donné des résultats de signes contraires, il y a une racine entre $+A$ et $-A$.

Si l'on fait $y = +2A$, on obtient un résultat négatif; par conséquent entre $+A$ et $+2A$, il y a une racine de la transformée.

Si l'équation avait son dernier terme négatif, on changerait y en $-y$, et en changeant les signes de tous les termes, on obtiendrait une équation dans laquelle le second terme est négatif et le dernier positif; on pourra donc en tirer les mêmes conséquences que précédemment.

Si l'équation n'a qu'une racine réelle, la dérivée a ses racines imaginaires. Par conséquent la racine réelle de l'équation ne peut être comprise entre les quantités imaginaires $-2A$ et $+2A$.