

P. LEFAIVRE

Deux théorèmes sur les transversales dans le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 362-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2_362_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUX THÉORÈMES

SUR LES TRANSVERSALES DANS LE CERCLE,

PAR M. P. LEFAIVRE,

Elève de rhétorique au Collège de Versailles

THEORÈME 1.

(*) Soit ABC (*Fig. 58*) un triangle inscrit au cercle, et dont les côtés AB, AC, BC, prolongés au besoin, soient coupés respectivement aux points F, G, H par une transversale FGH. Si l'on nomme a, b, c , les tangentes menées des points F, G, H à la circonférence, on aura

$$a.b.c. = AG.BF.CH = AF.BH.GC.$$

Démonstration. $a^2 = FB.FA$, $b^2 = GA.GC$, $c^2 = HB.HC$.

Donc, $a^2.b^2.c^2 = FA.BH.GC.BF.AG.CH$.

(*) Il faut remplacer dans la figure P par F.

Or, $FA.BH.GC = AG.BF.CH$, d'après une propriété bien connue des transversales. Par conséquent, on aura

$$a^2.b^2.c^2 = (AG.BF.CH)^2,$$

et par suite

$$a.b.c = AG.BF.CH,$$

et aussi

$$a.b.c = FA.BH.GC.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2.

Soit une circonférence ABHD (Fig. 59) : menons une corde quelconque AB et par les extrémités A, B, deux tangentes AC, BK, et enfin une transversale quelconque CDHK, que je suppose couper la circonférence en D, H et la corde au point G, je dis qu'on aura

$$DG^2:GH^2::CD \times DK:HK \times HC.$$

Démonstration. Faisons $AC=m$, $BK=n$, $CD=c$, $HK=d$, $DG=x$, $GH=y$, nous aurons $AC^2 = CD \times CH$, ou $m^2 = c(c+x+y)$ (1)

et $BK^2 = KH \times KD$, ou $n^2 = d(d+x+y)$ (2)

De l'équation (1), je tire $m^2 - cy = c(c+x)$.

De l'équation (2) $n^2 - dx = d(d+y)$.

Divisant ces deux équations, l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{m^2 - cy}{n^2 - dx} = \frac{c(c+x)}{d(d+y)} \quad (3)$$

Or, si je considère les segments déterminés par la transversale AGB sur les côtés du triangle COK, j'aurai évidemment $(d+y)m$. $AO = AO.n(c+x)$.

Donc $m:n::c+x:d+y$. (4).

Donc, l'équation (3) devient

$$\frac{m^2 - cy}{n^2 - dx} = \frac{cm}{dn}$$

Chassant les dénominateurs et transposant

$$mx - ny = mn \left(\frac{cn - dm}{dc} \right) \quad (5).$$

Or, la proportion (4) donne

$$my - nx = cn - md \quad (6).$$

J'ai donc les deux équations du premier degré (5) et (6).

J'en tire successivement par l'élimination

$$y = m(dc + n) \frac{cn - dm}{dc(m^2 - n^2)}$$

$$\text{et } x = n(dc + m^2) \frac{cn - dm}{dc(m^2 - n^2)}.$$

Donc, évidemment

$$y : x :: m(dc + n^2) : n(dc + m^2);$$

remplaçant n^2 et m^2 par leurs valeurs, il s'en suit

$$y : x :: md(c + x + y + d) : nc(c + x + y + d) :: md : nc;$$

donc

$$y^2 : x^2 :: m^2 d^2 : n^2 c^2,$$

ou

$$y^2 : x^2 :: cd^2(c + x + y) : dc^2(d + x + y),$$

ce qui donne enfin $y^2 : x^2 :: d(c + x + y) : c(d + x + y)$, proportion qui démontre le théorème.

Car en remplaçant y , x , d , c par leurs valeurs, la proportion qu'on vient d'obtenir donnera évidemment

$$DG^2 : GH^2 :: CD \times DK : HK \times HC. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Si la transversale coupait les deux tangentes dans l'angle supplément de AOK, on arriverait toujours à la proportion du théorème général en procédant comme ci-dessus. Il en sera de même, dans quelque autre position qu'elle coupe le système AODHB. Il faut cependant remarquer deux cas particuliers.

1° Si la transversale est parallèle à l'une des tangentes, par exemple à OB (*fig. 60*), on peut regarder son point d'intersection avec elle, comme situé à l'infini, la proportion

du théorème général deviendra alors, dans ce cas particulier,

$$y^2 : x^2 :: c + x + y : c, \text{ ou } DG^2 : GH^2 :: CD : CH.$$

Enfin si les points C, K (*fig.* 61) se confondent au point O, où se coupent les tangentes, la proportion générale se réduira à $DG : GH :: DO : OH$, porisme démontré par Robert Simpson, dans son traité *de Præmatibus*, à la proposition LXXIII. Ce géomètre indique en même temps que Pappus avait déjà donné le même porisme dans la proposition 154 du livre septième.