

FAUDOT

**Problème. Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et sa hauteur, trouver les côtés**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 2 (1843), p. 311-312

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1843\\_1\\_2\\_\\_311\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__311_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROBLÈME.

*Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et sa hauteur, trouver les côtés. (Géométrie analytique de Lefebure de Fourcy. 4<sup>e</sup> édition, page 140.)*

**PAR M. FAUDOT,**

Ancien professeur de mathématiques dans les Collèges royaux,  
docteur ès-sciences.

Soient

$h$  la hauteur,  $R$  le rayon du cercle circonscrit,  $r$  celui du cercle inscrit,  $x, y, z$  les côtés demandés.

Je fais  $x+y+z=2p$ ; la surface du triangle  $=S$ , on a

$$R = \frac{xyz}{4S} \quad (1), \quad r = \frac{2S}{x+y+z} \quad (2), \quad S = \frac{xh}{2} \quad (3),$$

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \quad (4)$$

(1) et (3) donnent  $2Rh=yz$ , (2) et (3)  $\frac{hx}{2r}=p$ , (3) et (4)

$$\frac{hx}{2} = \sqrt{\frac{hx}{2r} \left( \frac{hx-2rx}{2r} \right) \left( \frac{hx-2ry}{2r} \right) \left( \frac{hx-2rz}{2r} \right)}$$

$$\frac{h^2 x^2}{4} = \frac{hx}{2r} \left( \frac{hx-2rx}{2r} \right) \left( \frac{hx-2ry}{2r} \right) \left( \frac{hx-2rz}{2r} \right)$$

$$4r^4 h = (h-2r)(hx-2ry)(hx-2rz),$$

$$4r^4 h = h^3 x^2 - 2rh^2 xy - 2rh^2 x^2 + 4r^3 hxy - 2rh^2 xz + \\ + 4r^3 hyz + 4r^3 hxz - 8r^3 yz,$$

$$4r^4 = h^2 x^2 - 2rhxy - 2rhx^2 - 2rhxz + 4r^2 xy + 4r^2 yz + \\ + 4r^2 xz - 8r^3 \times 2R,$$

$$4r^4 = h^2 x^2 - 2rhx(x+y+z) + 4r^2 x(y+z) + 8hr^2 R - 16Rr^3.$$

Mais on a

$$x + y + z = \frac{hx}{r}, \quad y + z = \frac{hx - rx}{r};$$

remplaçant, on a

$$4r^4 = h^2 x^2 - 2h^2 x^2 + 4r h x^2 - 4r^2 x^2 + 8hr^2 R - 16Rr^3,$$

$$x^2(h^2 - 4rh + 4r^2) = 4r^2(-r^2 + 2Rh) - 16Rr^3,$$

$$x^2(h - 2r)^2 = 4r^2(2hR - 4Rr - r^2),$$

$$x = \pm \frac{2r\sqrt{2hR - 4Rr - r^2}}{h - 2r}.$$