

JACOB

Problème sur les aires minima (alvéole)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 160-162

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__160_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME

Sur les aires minima (alvéole).

PAR M. JACOB,

Capitaine d'artillerie.

« ABCDEF (*fig. 4 bis*) est un hexagone régulier dont le
 » côté est donné. Six plans $AaBb$, $BbCc$, $CcDd$, $DdEe$,
 » $EeFf$, $FfAa$, perpendiculaires au plan de l'hexagone com-
 » posent la surface convexe d'un prisme hexagonal. Les
 » arêtes Aa , Cc , Ee , sont égales, leur longueur est déter-
 » minée. Les arêtes Bb , Dd , Ff , sont égales, mais leur lon-
 » gueur est inconnue.

» abc , cde , efa , sont trois plans qui se coupent sur l'axe
 » OS du solide, au point S, tel que la somme des aires des
 » six trapèzes $AabB$, $BbcC$, $CcdD$, $DdeE$, $EefF$, $FfaA$ et
 » des trois losanges $abcS$, $cdeS$, $efaS$, est moindre qu'elle
 » ne le serait si les trois points b , d , f étaient placés plus
 » haut ou plus bas sur les arêtes Bb , Dd , Ff .

» Quelle est la position du point b , d , ou f pour que la
 » condition du minimum soit remplie? »

Tirez bh (*) parallèle à AB, l'inconnue de la question est ah
 différence des deux arêtes Aa , Bb .

Tirez les diagonales ac et bS et AC, on aura

$$ac = AC = AB \sqrt{3},$$

car AC est le côté du triangle équilatéral inscrit dans un
 cercle.

(*) La ligne bh est omise dans la figure

L'aire du trapèze $AabB$ sera égale à

$$AB \left(\frac{Aa+Bb}{2} \right) = AB \left(\frac{2Aa-ah}{2} \right)$$

la somme des six aires des trapèzes $= 3 AB (2Aa-ah)$. (1)

L'aire du losange $abcS = 2aG \times bG$.

Or $2aG = ac = AB\sqrt{3}$; puis

$$bG^2 = ab^2 - aG^2 = bk^2 + ah^2 - aG^2 = AB^2 + ah^2 - \frac{3}{4} AB^2$$

ainsi :

$$bG^2 = \frac{1}{4} AB^2 + ah^2.$$

Donc, l'aire $abcS = AB\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{1}{4} AB^2 + ah^2\right)}$, et la somme

des trois losanges $= 3AB\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{1}{4} AB^2 + ah^2\right)}$. (2)

Ajoutons les expressions (1) et (2) et nous aurons pour l'expression de l'aire qui doit être un minimum :

$$3AB \left\{ 2Aa-ah + \sqrt{\left(\frac{3}{4} AB^2 + 3ah^2\right)} \right\}. \quad (3)$$

Je pose $AB=a$, $Aa=b$, $ah=x$; cette expression (3) se change en

$$3a \left\{ 2b-x + \sqrt{\left(\frac{3a^2}{4} + 3x^2\right)} \right\}. \quad (4)$$

Or $\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4} + 3x^2\right)} - x$ est une quantité positive que

je représente par y ; l'expression (4) deviendra :

$$3a \{ 2b+y \},$$

de sorte que l'on pourra représenter l'aire minimum par celle d'un rectangle qui aurait pour base la constante $3a$, pour hauteur la constante $2b$ augmentée de la ligne variable et inconnue représentée par

$$\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4} + 3x^2\right)} - x = y.$$

Pour que la surface du rectangle soit un minimum, il faut que y lui-même soit un minimum.

Cherchons donc quand y sera un minimum.

$$\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4} + 3x^2\right)} = x + y,$$

d'où
$$x^2 - xy = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{8}a^2,$$

et enfin
$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{3y^2}{4} - \frac{3a^2}{8}}.$$

Or, pour que x soit réel, il faut que $\frac{3y^2}{4}$ soit $> \frac{3a^2}{8}$, ou tout au moins que

$$\frac{3y^2}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

Le minimum de y est donc tiré de cette équation, et est

$$y = \frac{1}{2} a \sqrt{2},$$

et à cette valeur minimum de y correspond celle de x :

$$x = \frac{y}{2} = \frac{1}{4} a \sqrt{2}.$$

Ainsi la question est résolue, et ah , différence des deux arêtes Aa , Bb est le quart de la diagonale du carré dont AB est le côté.

L'angle solide S est le quart de l'espace sphérique autour d'un point.

Le résultat est la vérification de la géométrie des Abeilles qui construisent exactement leurs alvéoles d'après ces principes.