

VACHETTE

Question d'algèbre, proposée au concours de l'École normale

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 133-137

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__133_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'ALGÈBRE

Proposée au concours de l'École normale (p. 393, t. I).

PAR M VACHETTE.

—

Première solution par l'élimination.

Remarquons que si on cherche l'équation aux quotients de $f(x)=0$, elle contiendra les racines $\frac{x}{x'}$, $\frac{x'}{x}$, elle sera donc réciproque. Mais $z = \frac{x}{x'} + \frac{x'}{x}$ est la somme de deux racines réciproques de cette équation aux quotients, donc, pour avoir l'équation cherchée, il suffira d'abaisser à un degré sous-double, comme on sait le faire, le degré de l'équa-

tion réciproque. Cette équation en z contiendra, outre les racines $\frac{x}{x'} + \frac{x'}{x}$, des racines égales à 2 provenant des racines égales à 1 de l'équation réciproque; pour les faire disparaître de l'équation en z , il suffira de les faire disparaître de l'équation aux quotients. (Pour la recherche de l'équation aux quotients et l'élimination des racines 1 avant le calcul, voir Reynaud et Duhamel, *Problèmes et Développement sur certaines parties des Mathématiques.*)

Appliquons le calcul à l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0,$$

il faudra éliminer x et x' entre

$$f(x) = 0, \quad f(x') = 0, \quad y = \frac{x'}{x},$$

$$\text{ou } x \quad \text{entre} \quad f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(yx) = 0,$$

$$\text{ou} \quad \text{entre} \quad f(yx) - f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

ou bien entre

$$(y^3 - 1)x^3 - 3(y - 1)x = 0$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Mais

$$(y^3 - 1)x^3 - 3(y - 1)x = (y - 1) \{ (y^2 + y + 1)x^3 - 3x \};$$

si on ôte le facteur $y - 1 = 0$, on supprime dans l'équation finale trois racines égales à 1, et l'on a à éliminer entre

$$(y^2 + y + 1)x^3 - 3x = 0,$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0;$$

si on supprime $x = 0$, on n'altère pas l'équation finale, car $x = 0$ ne peut convenir à la deuxième équation.

On a seulement à traiter

$$(y^2 + y + 1)x^3 - 3x = 0, \quad x^3 - 3x + 1 = 0,$$

d'où

$$y^2 = -\frac{3}{y^2 + y + 1}, \quad \frac{3x}{y^2 + y + 1} - 3x + 1 = 0, \quad y = \frac{y^2 + y + 1}{3y(y + 1)}$$

Égalant les deux valeurs de x' , on a l'équation finale en y

$$\frac{3}{y^2+y+1} = \frac{(y^2+y+1)^2}{9y^2(y+1)^2},$$

et enfin

$$y^6 + 3y^5 - 21y^4 - 47y^3 - 21y^2 + 3y + 1 = 0,$$

cette équation étant réciproque, on a pour l'équation cherchée

$$z^3 + 3z^2 - 24z - 53 = 0.$$

Deuxieme solution par les fonctions symétriques.

Soit m le degré de $f'(x)=0$, le degré de l'équation en z est $\frac{m(m-1)}{1.2}$, nombre des combinaisons de m choses 2 à 2. Il suffit d'avoir l'expression générale des sommes $S'_1, S'_2, \dots, S'_n$, de $\varphi(z)=0$.

Or

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum \left(\frac{x^n}{x'} + \frac{x'^n}{x} \right) = \sum \left\{ \frac{x^n}{x'^n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{x^{n-1}}{x'^{n-1}} \cdot \frac{x'}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{x^{n-2}}{x'^{n-2}} \cdot \frac{x'^2}{x^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{x'^2}{x'^2} \cdot \frac{x^{n-2}}{x^{n-2}} + \frac{n}{1} \cdot \frac{x'}{x'} \cdot \frac{x'^{n-1}}{x^{n-1}} \cdot \frac{x'}{x^n} + \frac{x'^n}{x^n} \right\}, \\ &= \sum \left\{ \left(\frac{x^n}{x'^n} + \frac{x'^n}{x^n} \right) + \frac{n}{1} \left(\frac{x^{n-1}}{x'^{n-1}} + \frac{x'^{n-1}}{x^{n-1}} \right) + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\frac{x^{n-2}}{x'^{n-2}} + \frac{x'^{n-2}}{x^{n-2}} \right) + \dots \right\}; \end{aligned}$$

Il faut distinguer deux cas :

1° $n = 2p$

$$\begin{aligned} S'_{2p} &= \sum \left\{ \left(\frac{x^{2p}}{x'^{2p}} + \frac{x'^{2p}}{x^{2p}} \right) + \frac{2p}{1} \left(\frac{x^{2p-1}}{x'^{2p-1}} + \frac{x'^{2p-1}}{x^{2p-1}} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{2p(2p-1) \dots (p+2)}{1.2 \dots (p-1)} \left(\frac{x^2}{x'^2} + \frac{x'^2}{x^2} \right) + \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1.2 \dots p} \right\}; \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\sum \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1.2 \dots p} = \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1.2 \dots p};$$

$$2^{\circ} n = 2p + 1$$

$$S'_{2p+1} = \Sigma \left\{ \left(\frac{x^{p+1}}{x'^{2p+1}} + \frac{x'^{p+1}}{x^{2p+1}} \right) + \frac{2p+1}{1} \left(\frac{x^{p-1}}{x'^{2p-1}} + \frac{x'^{p-1}}{x^{2p-1}} \right) + \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots \dots + \frac{(2p+1)2p(2p-1)\dots(p+2)}{1.2\dots p} \left(\frac{x}{x'} + \frac{x'}{x} \right) \right\}.$$

Il suffit d'avoir généralement $\Sigma \left(\frac{x^n}{x'^n} + \frac{x'^n}{x^n} \right)$. Rappelons-nous la forme générale d'une équation

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} \dots \dots \dots \pm A_m = 0,$$

et les valeurs de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ en fonction des racines.

On a

$$\Sigma \left(\frac{x^n}{x'^n} + \frac{x'^n}{x^n} \right) = \Sigma \frac{x'^n + x'^{2n}}{x^n x'^n} = \frac{1}{A_m^n} \Sigma (x'^n + x'^{2n}) x'^n x'^{2n} \dots \dots \dots \\ = \Sigma (x'^n + x'^{2n}) x'^n x'^{2n} \dots \dots \dots \\ = \Sigma \{ x^n (x^n x'^n x'^{2n} \dots + x^n x'^n x'^{2n} \dots + x^n x'^n x'^{2n} \dots) + x'^n (\dots) + \dots \}$$

Dans la parenthèse qui multiplie x^n , on a la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des $n^{\text{èmes}}$ puissances des racines de $f(x) = 0$, diminuée du produit $x'^n x'^{2n} \dots$, où n'entre pas le facteur x^n ; il en sera de même pour la parenthèse qui multiplie x'^n , pour $x'^{2n} \dots$, donc on a, en désignant par $P_{m-1,n}$ la somme de ces produits

$$\Sigma (x'^n + x'^{2n}) x'^n x'^{2n} \dots \dots \dots \\ = \Sigma \{ x^n P_{m-1,n} - A_m^n + x'^n P_{m-1,n} - A_m^n + x'^{2n} P_{m-1,n} - A_m^n + \dots \} \\ = \Sigma x^n P_{m-1,n} - \Sigma A_m^n = P_{m-1,n} S_n - m A_m^n;$$

donc

$$\Sigma \left(\frac{x^n}{x'^n} + \frac{x'^n}{x^n} \right) = \frac{P_{m-1,n} S_n}{A_m^n} - m.$$

Pour avoir $P_{m-1,n}$, on cherche l'équation $\varphi(t) = 0$, telle que $t = x^n$; l'équation en t sera du degré m , une somme quelconque Σ_p des racines de $\varphi(t) = 0$, sera

$$\Sigma_p = (x^n)^p + (x'^n)^p + \dots \dots \dots = S_{pn},$$

somme de l'équation de $f(x)=0$, que l'on obtient à l'aide des coefficients.

La question est donc résolue.

Appliquons à $f(x)=x^3-3x+1$; il faut chercher S'_1, S'_2, S'_3 :

$$S'_1 = \Sigma \left(\frac{x}{x'} + \frac{x'}{x} \right) = \frac{P_{2,1} S_1}{A_3} - 3,$$

$$S'_2 = \Sigma \left(\frac{x^4}{x'^2} + \frac{x'^2}{x^2} \right) + \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{P_{2,2} S_2}{A_3^2} - 3 + 6,$$

$$S'_3 = \Sigma \left(\frac{x^5}{x'^3} + \frac{x'^3}{x^3} \right) + 3 \Sigma \left(\frac{x}{x'} + \frac{x'}{x} \right) = \frac{P_{2,3} S_3}{A_3^3} - 3 + 3S'_1,$$

On trouve

$$\begin{aligned} S_1 &= 0 & P_{2,1} &= 6, \\ S_2 &= 6 & P_{2,2} &= -24, \\ S_3 &= -3, \\ S_4 &= 18, \\ S_5 &= -15, \\ S_6 &= 57, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_1 &= -3 & A'_1 &= -3, \\ S'_2 &= \frac{9 \cdot 6}{(-1)^2} + 3 = 57, & \text{d'où} & & A'_2 &= -24, \\ S'_3 &= \frac{-24 \cdot -3}{(-1)^3} - 3 + 3 \cdot -3 = -84 & & & A'_3 &= +53. \end{aligned}$$

L'équation en z est, comme par la première méthode,

$$z^3 + 3z^2 - 24z - 53 = 0.$$
