MÉMOIRES DE LA S. M. F.

P. ANTOINE

Lemme de Morse et calcul des variations

Mémoires de la S. M. F., tome 60 (1979), p. 25-29
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__25_0>

Analyse non convexe [*1977. Pau*]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 60, 1979, p. 25-29.

LEMME DE MORSE ET CALCUL DES VARIATIONS

P. ANTOINE

Le lemme de Morse a été démontré, en un point où le Hessien est un isomorphisme de l'espace sur son dual, pour un espace de dimension finie par M. Morse [4], pour un espace de Hilbert [5] puis pour un espace de Banach [6] par R. Palais ; des restrictions sur la classe de fonctions considérée permettent d'affaiblir la condition de non dégénérescence (K. Uhlenbeck [8], A.J. Tromba [7], Hui-Hsiung Kuo [3]). Nous proposons ici un formalisme dans lequel les conditions de Hui-Hsiung Kuo prennent une forme très naturelle et une nouvelle démonstration, particulièrement élémentaire, du lemme de Morse. Cette démonstration repose sur une propriété des opérateurs symétriques (lemme 1.1) dont l'explicitation éclaire de nombreux points du calcul des variations (P. Antoine et F. van Iseghem [2], P. Antoine [1]).

1. LE LEMME DE MORSE SUR UN COUPLE D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE.

Soit $\mathbb{E}$ un triple (E,E',Φ) où E et E' sont des espaces de Banach et Φ une forme bilinéaire continue sur $E' \times E$ mettant E' et E en dualité séparante. Nous noterons ϕ l'injection de E' dans E associée à Φ, $L_s(\mathbb{E})$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans E' telles que

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad \Phi(Ax,y) = \Phi(Ay,x)$$

et $\mathrm{End}(\mathbb{E})$ le produit fibré de $L(E,E)$ et de $L(E',E')$ au dessus de $L(E',E^*)$, relativement aux applications linéaires continues

$$L(E,E) \to L(E',E^*) \qquad u \mapsto u^* \circ \phi$$

$$L(E',E') \to L(E',E^*) \qquad u' \mapsto \phi \circ u'$$

(un élément de $\mathrm{End}(\mathbb{E})$ est donc un couple (u,u') élément de $L(E,E) \times L(E',E')$ tel que

$$\forall x \in E \qquad \forall x' \in E' \qquad \Phi(x',ux) = \Phi(u'x',x)$$

et on a $\|(u,u')\| = \sup\{\|u\|,\|u'\|\})$; nous noterons $1_{\mathbb{E}}$ l'élément $(1_E,1_{E'})$ de $\mathrm{End}(\mathbb{E})$.

1.1 LEMME.

Si A est un isomorphisme de E sur E' et un élément de $L_s(\mathbb{E})$, l'application

$$\alpha : \mathrm{End}(\mathbb{E}) \to L_s(\mathbb{E}) \qquad (u,u') \mapsto u' \circ A \circ u$$

admet au point $A = \alpha(1_{\mathbb{E}})$ une section locale (σ,σ') de classe C^∞ telle que

$$(\sigma(A),\sigma'(A)) = 1_{\mathbb{E}} .$$

L'application α est de classe C^∞ et l'application linéaire tangente $d\alpha(1_{\mathbb{E}})$, définie par

$$d\alpha(1_{\mathbb{E}}) \cdot (u,u') = u' \circ A + A \circ u$$

admet une section linéaire continue

$$L_s(\mathbb{E}) \to \mathrm{End}(\mathbb{E}) \qquad B \mapsto (1/2\, A^{-1} \circ B, 1/2\, B \circ A^{-1}) .$$

On applique le théorème des fonctions inverses. □

1.2 DEFINITION.

Soient U un ouvert de E et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est de classe C^r relativement à $\mathbb{E}$ si f est de classe C^r et si la différentielle df, application de U dans E^*, se factorise en une application $d'f$ de classe C^{r-1} de U dans E' (i.e. $df = \phi \circ d'f$).

Si f est de classe C^r relativement à $\mathbb{E}$, avec $r \geq 2$, on a $d^2f = \phi \circ dd'f$ et la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 2, s'écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + df(0)\cdot x + \int_0^1 (1-t)\, \Phi(dd'f(tx)\cdot x,x)\, dt \\ &= f(0) + df(0)\, x + \Phi(\{\int_0^1 (1-t)\, dd'f(tx)\, dt\}\cdot x,x) . \end{aligned}$$

1.3 THEOREME.

Soit f une application de classe C^{r+2} relativement à $\mathbb{E}$, avec $r \geq 1$, d'un voisinage convexe U de l'origine de E dans $\mathbb{R}$, telle que $df(0) = 0$ et que $dd'f(0)$ soit un isomorphisme de E sur E'. Il existe alors un difféomorphisme local h de classe C^r, défini sur un voisinage de l'origine de E, tel que $h(0) = 0$ et que

$$f \circ h(x) = f(0) + 1/2\, d^2f(0)\cdot(x,x) .$$

La formule de Taylor avec reste intégral est de la forme

$$f(x) = f(0) + 1/2\, \Phi(A(x)\cdot x,x)$$

où A est une application de classe C^r de U dans $L_s(\mathbb{E})$. Comme $A(0) = dd'f(0)$ est un isomorphisme de E sur E', il existe (lemme 1.1) un voisinage V de $dd'f(0)$ et une application (σ,σ') de classe C^∞ de V dans End($\mathbb{E}$) telle que $\sigma(dd'f(0)) = 1_{\mathbb{E}}$ et $\sigma'(B) \circ dd'f(0) \circ \sigma(B) = B$ pour tout élément B de V. Posons $u = \sigma \circ A$ et $u' = \sigma' \circ A$; on a

$$A(x) = u'(x) \circ dd'f(0) \circ u(x)$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + 1/2\ \Phi(u'(x) \circ dd'f(0) \circ u(x)\cdot x\ ,\ x) \\ &= f(0) + 1/2\ \Phi(dd'f(0) \circ u(x)\cdot x\ ,\ u(x)\cdot x) \\ &= f(0) + 1/2\ d^2f(0) \cdot (u(x)\cdot x\ ,\ u(x)\cdot x)\ . \end{aligned}$$

En restreignant éventuellement le domaine de définition de u, l'application k définie par $k(x) = u(x)\cdot x$ est un difféomorphisme local de classe C^r laissant fixe l'origine : on a $k(0) = 0$ et $dk(0) = u(0) = 1_{\mathbb{E}}$; on pose $h = k^{-1}$. □

1.4 REMARQUES.

1) Si on suppose seulement que d'f est différentiable et que dd'f est lipschitzienne, l'application u est lipschitzienne et k est alors un homéomorphisme local lipschitzien ; la conclusion du théorème 1.3 devient : il existe un homéomorphisme local lipschitzien h tel que $h(0) = 0$ et $f \circ h(x) = f(0) + 1/2\ d^2f(0)\cdot(x,x)$.

2) Si on suppose seulement que f est de classe C^2 relativement à E, on peut encore écrire f sous la forme

$$f(x) = f(0) + 1/2\ \Phi(dd'f(0) \cdot k(x)\ ,\ k(x))$$

sans pouvoir inverser k. Cette expression de f donne cependant des renseignements sur f, par exemple : une condition suffisante pour qu'une application f de classe C^2 relativement à $\mathbb{E}$ présente un minimum local en 0 est que $df(0)$ soit nul, $dd'f(0)$ inversible et la forme quadratique $\Phi(dd'f(0)\cdot x,x) = d^2f(0)\cdot(x,x)$ positive.

2. EXEMPLE.

Soient E l'espace de Banach $C_0^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ des applications de classe C^1 de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$, nulles aux bornes, E' l'espace de Banach quotient de l'espace $C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$ par le sous-espace des applications constantes, Φ la forme bilinéaire continue définie sur $E' \times E$ par

$$\Phi([k],h) = \int_a^b \langle k(t),h'(t)\rangle \, dt \ .$$

Le lemme de du Bois-Raymond exprime que Φ est une dualité séparante entre E' et E. On pose $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$.

Soient f une fonction numérique définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, U l'ouvert $\{h \mid \forall t \in [a,b] \ , (t,h(t),h'(t)) \in \mathcal{U}\}$ de E et J l'application de U dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(h) = \int_a^b f(t,h(t),h'(t)) \, dt \ .$$

2.1 PROPOSITION.

Si f est de classe C^r, l'application J est de classe C^r relativement à $\mathbb{E}$.

Evident par les arguments classiques du calcul différentiel sur les espaces d'applications.

En un point h, d'J(h) est la classe dans E' de l'application

$$t \mapsto d_3f(t,h(t),h'(t)) - \int_a^t d_2f(s,h(s),h'(s)) \, ds$$

et dd'J(h) est l'application de E dans E' qui à un élément H de E associe la classe dans E' de l'application

$$t \mapsto d_2d_3f(t,h(t),h'(t))\cdot H(t) + d_3d_3f(t,h(t),h'(t))\cdot H'(t)$$
$$- \int_a^t (d_2d_2f(s,h(s),h'(s))\cdot H(s) + d_3d_2f(s,h(s),h'(s))\cdot H'(s)) \, ds.$$

2.2 PROPOSITION.

Si h est une extrémale de J (i.e. $d'J(h) = 0$), non singulière (i.e. quel que soit t, $d_3d_3f(t,h(t),h'(t))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$), dont les extrémités ne sont pas conjuguées au sens de Jacobi (i.e. $dd'J(h)\cdot H = 0$ entraîne $H = 0$), alors dd'J(h) est un isomorphisme de E sur E'.

L'application dd'J(h) de E dans E' est un opérateur de Fredholm d'indice 0 (c'est la somme d'un opérateur compact et de l'opérateur qui à H associe la classe dans E' de

$$t \mapsto d_3d_3f(t,h(t),h'(t))\cdot H'(t) \ ,$$

opérateur dont le noyau et le conoyau ont même dimension que le noyau et le conoyau de l'endomorphisme

$$\int_a^b [d_3 d_3 f(t,h(t),h'(t))]^{-1} \, dt$$

de $\mathbb{R}^n$) ; dd'J(h) est donc un isomorphisme si et seulement si dd'J(h) est injectif, c'est-à-dire si les extrémités de h ne sont pas conjuguées. $\square$

Si une extrémale h vérifie les hypothèses de la proposition 2.2 et si f est de classe C^3, on peut appliquer le lemme de Morse à J au point h. Si on suppose seulement que f est de classe C^2, en appliquant le résultat énoncé à la remarque 1.4.2), on retrouve les conditions suffisantes usuelles pour que J présente un minimum local en h.

REFERENCES

[1] - P. ANTOINE et F. VAN ISEGHEM : Conditions nécessaires et conditions suffisantes pour un minimum local d'une fonctionnelle. C.R.A.S. 282, pp. 523-526.

[2] - P. ANTOINE : Conditions pour un minimum local d'une fonction différentiable. Pub. U.E.R. Math. Univ. Lille I n° 97, 1976.

[3] - HUI-HSIUNG KUO : The Morse Palais lemma on Banach spaces. Bull. Amer. Soc. 80, 1974, pp. 363-365.

[4] - M. MORSE : The calculus of variations in the large. Amer. Math. Soc. 1934.

[5] - R. PALAIS : Morse theory on Hilbert manifolds. Topology 2, 1963, pp. 299-340.

[6] - R. PALAIS : The Morse lemma for Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, pp. 968-971.

[7] - A.J. TROMBA : The Morse lemma on arbitrary Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 79, 1973, pp. 85-86.

[8] - K. UHLENBECK : Morse theory on Banach manifolds. J. Funct. An. 10, 1972, pp. 430-445.

Département de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques de Lille,
B.P. 36 - 59650 VILLENEUVE d'ASCQ