MÉMOIRES DE LA S. M. F.

M.-A. KNUS

Modules quadratiques et algèbres d'Azumaya

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 95-100
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__95_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p. 95-100

MODULES QUADRATIQUES ET ALGEBRES D'AZUMAYA

par

Max-Albert KNUS

1. Introduction

Les résultats présentés ici ont été obtenus en collaboration avec M. Ojanguren et R. Sridharan. Des démonstrations détaillées paraîtront ailleurs. La réponse positive donnée par Quillen et Souslin au problème de Serre : tout module projectif de type fini sur un anneau de polynômes est libre, engage à considérer le problème semblable pour d'autres structures, par exemple des modèles quadratiques. Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ et soit $R = k[x_1,\ldots,x_n]$. Soient V un R-module projectif de type fini et $R : V\times V \to R$ une forme bilinéaire symétrique sur V. Nous dirons que la paire (V,R) est un <u>module quadratique</u> si la forme est régulière. Nous dirons que (V,h) est <u>induit</u> (sur k) si (V,h) est isométrique à un module $(R \otimes_k V_o, 1 \otimes h_o)$ où (V_o,h_o) est un modèle quadratique sur k. En 1969 Harder [3] démontra que pour $n=1$ tout module quadratique est induit. Pour $n > 1$ S. Parimala [7] montra que tout module de rang ≤ 2 est induit et construisit des modules de rang 4 non induits sur $\mathbb{R}$. Des exemples de modules non-induits de rang 3 et 4 sur tout corps possédant des quaternions non triviaux se trouvent dans [5]. Récemment Bass [2] vérifia que si k est algébriquement clos et $n \leq 3$, alors tout module est induit. Finalement, on sait que tout module est induit si le groupe de Brauer de k n'a pas de 2-torsion (Raghunathan [8]), si k est quadratiquement clos (Souslin [9]) ou si l'index de Witt de la forme est supérieur ou égal à 2 (également Souslin).

Cet exposé décrit une classification des formes non-induites de rang 3 et des formes de rang 4 de discriminant trivial. Cette classification, également valide pour des modules sur un domaine R tel que $\frac{1}{2} \in R$, est présentée dans la première partie. Le formalisme utilisé a suggéré un exemple de module quadratique sur un anneau régulier, localement hyperbolique mais pas globalement. Cet exemple est présenté ensuite. Finalement les résultats généraux de la première partie sont appliqués aux anneaux de polynômes.

2. Classification des formes de rang 3 et 4 sur un domaine

Soit R un domaine tel que $\frac{1}{2} \in R$ et soit (V,h) un module quadratique sur R. Nous définissons le <u>discriminant</u> de (V,h) d'après Bass [1]. Appelons

<u>module discriminant</u> tout module quadratique (L,h), où L est inversible. Le produit tensoriel induit une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'isométrie de modules discriminants. Notons $\mathrm{Discr}(R)$ ce groupe. Pour tout module quadratique (V,h), le module inversible $\overset{\mathrm{rang}\,V}{\wedge} V$ est muni d'une forme quadratique définie à l'aide de h et sa classe dans $\mathrm{Disc}(R)$ est le <u>discriminant</u> de V. Si V est libre, le discriminant de (V,R) est la classe de $(R, \det h)$, où $\det h$ est le déterminant de la forme bilinéaire h.
Soit A une R-<u>algèbre d'Azumaya</u> et soit N_A (resp. T_A) la <u>norme réduite</u>, (resp. la <u>trace réduite</u>) de A. Rappelons qu'une algèbre d'Azumaya est une forme tordue de l'algèbre des $n \times n$-matrices, c.-à-d. qu'il existe un isomorphisme de S-algèbres $A \otimes S \cong M_n(S)$ pour une extension étale fidèlement plate $R \subset S$. La norme (resp. la trace) réduite se définit alors par descente du déterminant (resp. de la trace) dans $M_n(S)$.

Si A est une algèbre d'Azumaya de rang 4, A possède un antiautomorphisme canonique donné par $x \mapsto \bar{x} = T_A(x)-x$ et la norme réduite vérifie $N_A(x) = x\bar{x} = \bar{x}x$, $x \in A$. La norme réduite définit sur A une structure de module quadratique de discriminant trivial. Puisque $N_A(1) = 1$, l'orthogonal de $R \cdot 1$ dans A est un module quadratique de rang 3 et de discriminant trivial. Notons-le A'.

<u>Théorème 1</u> : (<u>Classification des formes de rang</u> 3) Soit (V,h) un modèle quadratique de rang 3 et de discriminant trivial. Il existe alors une algèbre d'Azumaya A de rang 4 telle que (V,h) est isométrique à (A',N_A). L'algèbre A est déterminée à un isomorphisme près.

L'unicité suit du résultat suivant, valable pour tout anneau de caractéristique différente de 2 et classique sur un corps.

<u>Proposition 2</u> : Soient A et B deux algèbres d'Azumaya de rang 4 telles que les modules quadratiques (A,N_A) et (B,N_B) soient isométriques. Alors les deux algèbres sont isomorphes.
L'existence se démontre à l'aide de l'algèbre de Clifford C de V. On prend $A = C_o$ où C_o est la partie de degré zéro dans la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de C.
Une classification semblable est possible pour les modules de rang 4. Elle utilise un foncteur "<u>Norme réduite</u>".

<u>Théorème 2</u> : Soit A une algèbre d'Azumaya (sur un anneau quelconque R) et soit A-mod la catégorie des A-modules à gauche. Il existe un foncteur

$$\mathfrak{n} : A\text{-mod} \to R\text{-mod}$$

tel que

1) $\mathfrak{n}(A) = R$ et si $\rho_a : A \to A$ est la multiplication à droite par $a \in A$, alors $\mathfrak{n}(\rho_A) : R \to R$ est la multiplication par $N_A(a)$.

2) Si P est un A-module projectif de rang un, alors $\mathfrak{n}(P)$ est un R-module inversible.

3) $\mathfrak{n}$ commute avec l'extension des scalaires.

4) Si A est une algèbre d'Azumaya triviale, c.-à-d. de la forme $\mathrm{End}_R(N)$, N projectif de rang n, alors tout A-module P est de la forme $N \otimes P_o$, où A opère sur N et $\mathfrak{n}(P) = \Lambda^n(N) \otimes \Lambda^n(P_o)$. De plus, si $f : P \to Q$ est un homomorphisme de A-modules, donc de la forme $1_N \otimes f_o$ avec $f_o : P_o \to Q_o$, alors $\mathfrak{n}(f) = 1 \otimes \Lambda^n f_o$.

De plus $\mathfrak{n}$ est univoquement déterminé (à des homomorphismes canoniques près) par 3) et 4).

La construction de $\mathfrak{n}$ se fait par un argument de descente, le cas trivial étant donné par 4). Signalons que la démonstration est analogue à celle de la torsion du groupe de Brauer donnée dans [4].

Soit A une algèbre d'Azumaya de rang 4 et soit P un A-module à gauche projectif de rang un. Si le module inversible $\mathfrak{n}(P)$ est libre, tout choix d'un générateur ϵ de $\mathfrak{n}(P)$ définit une forme quadratique sur P et deux choix différents donnent des formes proportionnelles. Notons (P,N_ϵ) une forme de ce type. Le discriminant d'une telle forme est toujours trivial.

<u>Théorème 3</u> : (<u>Classification des formes de rang</u> 4)

Soit (V,h) une forme quadratique de rang 4 et de discriminant trivial. Il existe alors une algèbre d'Azumaya de rang 4, A, un A-module à gauche de rang un P tel que $\mathfrak{n}(P)$ est libre et un générateur ϵ de $\mathfrak{n}(P)$ tel que $(V,h) \simeq (P,N_\epsilon)$. De plus, si $(V,h) \simeq (Q,N_{\epsilon'})$, où Q est un module de rang un sur une algèbre B, alors les cas suivants sont possibles :

(i) $A \cong B$ et Q, comme A-module, est isomorphe à P.

(ii) $B \cong \mathrm{End}_A P$, $A \cong \mathrm{End}_B Q$ et $P \cong Q$ comme $A \otimes B$-modules.

La démonstration utilise une autre construction possible du foncteur norme réduite pour une algèbre d'Azumaya de rang 4 et des A-modules de rang un. Soient P et Q des A-modules de rang un et soit $f \in \mathrm{Hom}_A(P,Q)$. Il existe alors une application $\bar{f} : Q \otimes \mathfrak{n}(P) \to P \otimes \mathfrak{n}(Q)$ telle que $f\bar{f} \in \mathrm{End}_A(P) \otimes \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{n}(P), \mathfrak{n}(Q))$ et $f\bar{f} \in \mathrm{End}_A(Q) \otimes \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{n}(P), \mathfrak{n}(Q))$ appartiennent à l'image canonique de $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{n}(P), \mathfrak{n}(Q))$ et $f\bar{f} = 1 \otimes \mathfrak{n}(f) = \bar{f}f$ (à quelques identifications près !). Si le module inversible $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{n}(P), \mathfrak{n}(Q))$ est libre, le choix d'un générateur ϵ permet de définir une structure de module quadratique N_ϵ sur $\mathrm{Hom}_A(P,Q)$. On pose $N_\epsilon(f) = f\bar{f}(1 \otimes \epsilon^{-1})$. Le discriminant est trivial. Si $P = Q$ et $\epsilon = 1$, on retrouve

la norme réduite sur $\mathrm{End}_A(P)$. L'algèbre de Clifford de $(\mathrm{Hom}_A(P,Q),N_\epsilon)$ est isomorphe à $\mathrm{End}_A(P \oplus Q)$ comme algèbre graduée (la graduation de $\mathrm{End}_A(P \oplus Q)$ étant en "damier").
L'isomorphisme est induit par

$$f \in \mathrm{Hom}_A(P,Q) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \bar{f} \otimes \epsilon^{-1} \\ f & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_A(P \oplus Q).$$

En particulier, si $\mathfrak{n}(P)$ est libre, de générateur ϵ, on obtient une forme quadratique sur P, notons-la aussi N_ϵ. L'algèbre de Clifford de (P,N_ϵ) est isomorphe à $\mathrm{End}_A(A \oplus P)$. Inversément, étant donné un module quadratique de rang 4 et de discriminant trivial, on montre que son algèbre de Clifford est de la forme $\mathrm{End}_A(A \oplus P)$.

3. Un module localement hyperbolique, mais non stablement hyperbolique

Le foncteur "norme réduite" a suggéré l'exemple suivant d'un anneau régulier R tel que l'application d'anneaux de Witt

$$W(R) \to \prod_{\underline{p} \in \mathrm{Spec}(R)} W(R_{\underline{p}})$$

n'est pas injective.
Soit $T = \mathbb{C}[x_0,\dots,x_4]/(x_0^2+\dots+x_4^2-1)$; on sait que $\tilde{K}_0(T) \cong \mathbb{Z}$ et qu'il existe un générateur de $\tilde{K}_0(T)$ de la forme $[P]-2[T]$, P projectif de rang 2. Soit $R = T \otimes_{\mathbb{C}} T$. Alors $\tilde{K}_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ avec les générateurs $[P \otimes_{\mathbb{C}} T] - 2[R]$, $[T \otimes_{\mathbb{C}} P] - 2[R]$ et $[P \otimes_{\mathbb{C}} P] - 4[R]$. En particulier, la classe de $[P \otimes_{\mathbb{C}} P]$ dans $K_0(R)$ n'est pas divisible par 2. Considérons la forme bilinéaire symétrique

$$P \otimes_{\mathbb{C}} P \to \Lambda^2 P \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^2 P$$

donnée par $(p \otimes q,\ p' \otimes q') \mapsto p \wedge p' \otimes q \wedge q'$. On peut choisir un générateur ϵ de $\Lambda^2 P \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^2 P$ et définir ainsi une forme quadratique sur $P \otimes_{\mathbb{C}} P$. Remarquons que c'est la forme N_ϵ pour $P \otimes_{\mathbb{C}} P$ considéré comme $\mathrm{End}_R(P \otimes_{\mathbb{C}} T)$-module. La classe de cette forme dans $W(R)$ n'est pas triviale. En effet, soit

$$P \otimes_{\mathbb{C}} P \perp H_1 \simeq H_2$$

avec H_1 et H_2 hyperboliques. On vérifie que pour tout R-module projectif de type fini Q, la classe de Q et la classe du dual Q^* sont égales dans $K_0(R)$; on en conclut que la classe de $[P \otimes_{\mathbb{C}} P]$ est divisible par 2 ! . Finalement, en choisissant localement une base de $P \otimes_{\mathbb{C}} P$ qui est le produit tensoriel de bases de $P \otimes_{\mathbb{C}} T$ et de $T \otimes_{\mathbb{C}} P$, on vérifie facilement que $P \otimes_{\mathbb{C}} P$ est localement hyperbolique.

4. Modules quadratiques sur des anneaux de polynômes

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ et soit $R = k[x_1,\dots,x_n]$. Soit A une R-algèbre d'Azumaya de rang 4. Alors $A/(x_1,\dots,x_n)A = D$ est une algèbre de quaternions sur k. Posons $\Delta = D[x_1,\dots,x_n]$. Les algèbres A et Δ sont Brauer équivalentes, d'où un isomorphisme

$$A \cong \mathrm{End}_\Delta(P)$$

pour un module projectif de rang un P sur Δ.
Les algèbres A et Δ sont isomorphes si et seulement si P est libre.
De façon plus générale on a

$$\mathrm{End}_\Delta(P_1) \cong \mathrm{End}_\Delta(P_2)$$

si et seulement si $P_1 \cong P_2$.

Formes de rang 3

D'après le théorème 1, toute forme de rang 3 et de discriminant 1 est isométrique à l'orthogonal de $R.1$ dans $\mathrm{End}_\Delta P$ pour un module P de rang un sur Δ. Si $D \cong M_2(k)$, alors, d'après Quillen-Souslin, P est libre et la forme est induite. Si D est une algèbre de quaternions non-triviale, il existe des Δ-modules projectifs de rang un non-libres [6] (Remarquons que tout Δ-module de rang ≥ 2 est libre, [5] pour $n=2$ et Souslin en général). D'où, d'après la proposition 2, des exemples de formes de rang 3 non-induites. Le théorème 1 dit que toute forme de rang 3 non-induite est de ce type. Remarquons que l'hypothèse sur le discriminant n'est pas vraiment restrictive, car si l'on multiplie la forme par son discriminant, qui est dans $k^\bullet$, on se ramène au cas du discriminant trivial. Notons finalement que d'après le résultat de Parimala mentionné dans l'introduction, toute forme de rang 3 non-induite est indécomposable.

Formesdu rang 4

Toute forme (V,h) de rang 4 et de discriminant trivial est isométrique à une forme (P,N_ϵ) où P est un module de rang un sur une algèbre d'Azumaya A de rang 4 et N_ϵ est la forme quadratique déterminée par le choix d'un générateur ϵ de la norme réduite $\eta(P)$ de P. D'après la discussion ci-dessus, A est de la forme $\mathrm{End}_\Delta(Q)$ où $\Delta = D[x_1,\dots,x_n]$ et Q est de rang un sur Δ. Utilisant la théorie de Morita, il est possible de remplacer la norme sur P par la norme sur $\mathrm{Hom}_\Delta(M,N)$ où M et N sont deux Δ-modules de rang un. L'ensemble $\{M,N\}$ de modules est déterminé à un isomorphisme près par (V,h). La forme est induite si et seulement si M et N sont libres sur Δ.

5. Formes sur $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$

Soit (V,h) une forme indécomposable de rang 3 et de discriminant trivial. Pour tout n, la forme $(V,h) \perp n\langle 1\rangle$ est non induite. On ne sait pas s'il existe des formes indécomposables de rang ≥ 4.
Le groupe orthogonal d'une forme indécomposable de rang 3 n'a que deux éléments. Pour des formes indécomposables de rang 4, le groupe orthogonal peut être fini ou infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS H., Clifford Algebras and spinor norms over a commutative ring, Amer. J of Math. (1974), 156-206.

[2] BASS H., Quadratic Modules over Polynomials Rings, Contributions to Algebra, a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press, 1977.

[3] KNEBUSCH M., Grothendieck-und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, S.-B. Heidelberg Acad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1969/70, 93-157.

[4] KNUS M.A. and OJANGUREN M., Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya, Lecture Notes in Mathematics 389, Springer-Verlag, 1974.

[5] KNUS M.A. and OJANGUREN M., Modules and quadratic forms over polynomial algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977) 223-226.

[6] OJANGUREN M. and SRIDHARAN R., Cancellation of Azumaya algebras, J. Algebra 18 (1971), 501-505.

[7] PARIMALA S., Failure of a quadratic analogue of Serre's conjecture, Bull. Amer. Math. Soc 82(1976) 962-964.

[8] RAGHUNATHAN M.S. Principal bundles on affine spaces, Reprint, Tata Institute, Bombay 1976.

[9] SUSLIN A., Quadratic Modules on affine spaces (Russian).

Max-Albert KNUS
Mathematisches Seminar
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich