MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE REVOY

Trivecteurs de rang 6

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 141-155
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__141_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p. 141-155

TRIVECTEURS DE RANG 6

par

Philippe REVOY

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif quelconque K. La classification des p-vecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $Gl(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^p E$. Si $p = 2$, il s'agit des bivecteurs et l'action de $Gl(E)$ sur $\Lambda^2 E$ est bien connue. La dualité entre $\Lambda^p E$ et $\Lambda^{n-p} E$ ramène le problème général au cas où $2 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Dès que $p > 2$, les résultats sont rares et le lecteur pourra se reporter à [2]. Pour $p = 3$, une classification complète est connue pour $n \leq 8$ et K algébriquement clos et pour $n \leq 6$ si $K = \mathbb{R}$ ([1],[3]). Notons que pour $p = 3$ et $n > 8$, ou $p \geq 4$ et $n \geq 8$, les orbites ne sont pas en général en nombre fini.

Dans cet article, nous donnons une classification complète pour le cas $p = 3$, $n = 6$ sur un corps quelconque. La partie 1 est consacrée à des rappels et à l'introduction de la notion de p-vecteurs scindables. Dans 2, nous donnons la classification annoncée par plusieurs méthodes. Dans la partie 3, nous donnons en complément la classification des sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 F$ pour F de dimension 4 et d'autres résultats semblables en vue de la classification des trivecteurs de rang 7 que l'auteur espère publier prochainement.

Je profite de cette introduction pour remercier C. Contou-Carrère pour les nombreuses conversations qui m'ont permis d'approfondir ces questions.

1. Preliminaires

1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps quelconque K et f un endomorphisme de E. L'application linéaire $\Lambda^p f : \Lambda^p E \to \Lambda^p E$ définie par $\Lambda^p f(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_p)$ est un endomorphisme de $\Lambda^p E$. L'action de $Gl(E)$ est alors ainsi définie : $f.\omega = \Lambda^p f(\omega)$ pour $f \in Gl(E)$ et $\omega \in \Lambda^p E$. Si L est une extension du corps K, on sait qu'il y a un isomorphisme naturel entre $\Lambda^p_L(E \otimes_K L)$ et $\Lambda^p_K E \otimes_K L$ et on notera ω_L l'image du p-vecteur ω de $\Lambda^p E$ dans $\Lambda^p E \otimes_K L$.

1.2. Définitions et propriétés

1.2.1 Soit $\omega \in \Lambda^p E$; on appelle <u>support</u> de ω et on note S_ω le plus petit espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^p F$. La dimension de S_ω s'appelle le <u>rang</u> de ω qu'on note $d_o(\omega)$. C'est un invariant par l'action de $Gl(E)$ et par extension des scalaires. On définit de même le support et le rang d'un sous-espace vectoriel de $\Lambda^p E$ (ce dernier est encore invariant par l'action de $Gl(E)$ sur la grassmanienne de dimension convenable de $\Lambda^p E$).

1.2.2 <u>Le groupe des automorphismes</u> de ω, $Aut(\omega)$, est le sous-groupe d'isotropie de ω dans l'action de $Gl(E)$: $Aut(\omega) = \{f \mid f \in Gl(E)$ et $f.\omega = \omega\}$. L'orbite de ω par $Gl(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à droite $Gl(E)/Aut(\omega)$.

1.2.3 Un p-vecteur non nul ω est <u>décomposable</u> s'il existe $x_1,\dots,x_p$ dans E tel que $\omega = x_1 \cdot \ldots \cdot x_p$. Le support de ω est le sous-espace de dimension p engendré par $x_1,\dots,x_p$ qu'on notera $\{x_1,\dots,x_p\}$.

1.2.4 On appelle orientation de E le choix d'un générateur de l'espace vectoriel $\Lambda^n E$. Cela revient à se donner une classe de bases de E ; on obtient alors à l'aide du produit dans ΛE un isomorphisme entre $\Lambda^p E$ et $\Lambda^{n-p} E^*$, E^* dual de E.

1.2.5 On associe à un p-vecteur d'autres invariants numériques que son rang. Soit $G_r(E)$ la grassmanienne des sous-espaces de dimension r de E ($G_1(E)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$) et considérons la projection $p_\alpha : \Lambda^p E \to \Lambda^p(E/\alpha)$ pour $\alpha \in G_r(E)$. On appelle $\bar{\omega}(\alpha)$ l'image de ω par p_α et on pose $d_r(\omega) = \inf(\text{rang } \bar{\omega}(\alpha))$, α décrivant $G_r(E)$. Les entiers $d_r(\omega)$ forment une suite strictement décroissante $d_o(\omega) = \text{rang}(\omega) > d_1(\omega) > \ldots > d_k(\omega) = 0$ dès que k est assez grand. La suite $d_i(\omega)$ est invariante par l'action de $Gl(E)$ mais n'est pas invariante par extension des scalaires, comme on le verra en dimension 6. Notons que $d_1(\omega) = 0$ signifie que ω est divisible par un vecteur.

Enfin, remarquons que pour classifier les p-vecteurs de E, il est loisible de se borner aux éléments de rang maximal, égal à la dimension de E (sauf si $p = n-1$!) ce que nous ferons désormais.

1.3. Polyvecteurs scindables

1.3.1 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E ; $\Lambda^p E$ s'identifie canoniquement à $\bigoplus_{k=0}^{k=p} (\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{p-k} E_2)$. Par exemple si $x \in E - \{0\}$, posons $E_1 = Kx$ et soit E_2 un supplémentaire de Kx : $\Lambda^p E \simeq \Lambda^p E_2 \oplus \Lambda^{p-1} E_2 \otimes Kx$, si bien que tout élément ω de $\Lambda^p E$ s'écrit de façon unique $\omega = xu + \omega'$ où $u \in \Lambda^{p-1} E_2$

et $\omega' \in \Lambda^p E_2$. On a alors $\bar{\omega}(Kx) = \omega'$ et $d_1(\omega) \leq \mathrm{rg}\, \omega'$ et il existe x_o dans $E-\{0\}$ tel que $\bar{\omega}(Kx_o) = \omega'_o$ est de rang $d_1(\omega)$. On voit clairement aussi que la relation $x\omega = 0$ équivaut à $\omega' = 0$, c'est à dire ω est divisible par x dans ΛE.

1.3.2 <u>Définition</u> : On dira que $\omega \in \Lambda^p E$ est <u>scindable</u> s'il existe E_1 et E_2 supplémentaires dans E et un entier k, $1 \leq k \leq p-k$ tel que $\omega \in \Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{p-k} E_2$.

Si $p = \dim E$, tout p-vecteur ω est scindable. De façon plus générale si ω est divisible par un vecteur x, ω est scindable car dans $E_1 \otimes \Lambda^{p-1} E_2$ avec $E_1 = Kx$. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité.

Si $p = 2$, tout élément ω de $\Lambda^2 E$ est scindable. En effet dans une base convenable, ω s'écrit $\sum_{i=1}^{p} e_{2i-1}\, e_{2i}$ et il suffit de prendre $E_1 = \{e_1, e_3, \ldots, e_{2p-1}\}$ et E_2 un supplémentaire contenant $\{e_2, e_4, \ldots, e_{2p}\}$.

1.3.3 Nous supposons maintenant $p = 3$; $\omega \in \Lambda^3 E$ est scindable s'il existe E_1 et E_2 supplémentaires dans E tels que $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$. Il s'écrit donc $\sum_{i=1}^{r} x_i u_i$, $x_i \in E_1$, $u_i \in \Lambda^2 E_2$. Comme nous imposons à ω d'être de rang maximal, la dimension de E, il faut que r soit au moins égal à la dimension de E_1. Soit alors e_j, $1 \leq j \leq h$ une base de E_1 ; en exprimant les x_i dans la base e_j, on obtient $\omega = \sum_{j=1}^{j=h} e_j v_j$. Les v_j sont linéairement indépendants dans $\Lambda^2 E_2$ car si par exemple $v_h = \sum_{j=1}^{j=h-1} a_j v_j$, $w = \sum_{j=1}^{j=h-1} (e_j + a_j e_h) v_j$ et ω n'est pas de rang maximal. La classification des éléments scindables revient donc à l'étude des sous-espaces vectoriels de dimension h de $\Lambda^2 F$ où $\dim F + h = \dim E$ (on a nécessairement $h \leq C^2_{n-h}$)

De plus, si $\omega = \sum_{j=1}^{j=h} e_j v_j$, les v_j sont déterminés de façon unique par la base $e_1, \ldots, e_h$ de E_1 : il suffit de calculer $e_1 \ldots e_{j-1} . e_{j+1} \ldots e_h\, \omega$ ou d'utiliser l'isomorphisme $E_1 \otimes \Lambda^2 E_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(E_1^*, \Lambda^2 E_2)$.

On dira que $\omega \in \Lambda^3 E$ est h-scindable, s'il est scindable et si la dimension de E_1 est h. Un p-vecteur divisible est scindable ; un même p-vecteur peut-être h_1 et h_2-scindable, $h_1 \neq h_2$, et les sous-espaces E_1 et E_2 ne sont pas déterminés de manière unique.

1.4. <u>Trivecteurs de rang inférieur à 6</u>

Le premier trivecteur non nul se rencontre en dimension 3 ; si $\dim E = 3$ et $\omega \in \Lambda^3 E - \{0\}$, il existe une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$. $\mathrm{Aut}(\omega)$ est le groupe spécial linéaire $Sl_3(K)$. Il n'existe pas de 3-vecteur de rang 4 (de façon générale, il n'y a pas de p-vecteurs de rang $p+1$) car il y a un isomorphisme entre $\Lambda^p K^{p+1}$ et $\Lambda^1 K^{p+1}$.

En dimension 5, le choix d'une orientation de E donne un isomorphisme entre $\Lambda^3 E$ et $\Lambda^2 E^*$; cela montre que tout élément ω de $\Lambda^3 E$ est divisible par un vecteur. Il existe donc une base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de E telle que $\omega = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$. Le groupe $\mathrm{Aut}(\omega)$ est formé de matrices de rang 5

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \lambda^2 & x \\ \hline 0 & \lambda^{-1}u \end{array}\right] \qquad \text{où } u \in Sp_2(K), \text{ groupe}$$

symplectique de K^4, $\lambda \in K^*$ et $x \in K^4$. La droite Ke_1 est déterminé de manière unique comme $\{\alpha \mid \alpha \in E$ et $\alpha\omega = 0\}$ et $Gl(E)$ opère transitivement sur l'ensemble des 3-vecteurs de rang 5.

1.5. Soient K un corps et L une extension galoisienne finie de K de groupe de Galois G. Si ω_L est un tenseur défini sur L de groupe d'automorphismes A_L, le groupe G opère sur A_L : alors l'ensemble de cohomologie $H^1(G, A_L)$ est en bijection avec l'ensemble $E(L/K)$ des classes de K-isomorphismes de tenseurs ω_K définis sur K, de même espèce que ω_L et tels que $(\omega_K)_L \simeq \omega_L$ ([5] Ch.X). Si on suppose maintenant que L est une extension galoisienne infinie, le même raisonnement peut encore s'appliquer par passage à la limite suivant les sous-extensions finies car deux tenseurs ω_K et ω'_K qui sont L-isomorphes sont déjà isomorphes sur une sous-extension finie K' de K contenue dans L (il faut alors considérer G comme un groupe topologique et les cochaînes sont des cochaînes continues, A_L étant un G-module topologique).

1.6. <u>Puissances divisées dans $\Lambda' M$</u>

Si M est un module sur l'anneau commutatif A, on construit ([4]) le système des puissances divisées sur $\Lambda' M = \bigotimes_{n \geq 0} \Lambda^{2n}(M)$. Si M est projectif de type fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré m) $\Gamma_m : \Lambda^2 M^* \to \Lambda^{2m} M^*$ qui est le pfaffien : si $u \in \Lambda^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $\Gamma_m(u)$ engendre le A-module $\Lambda^{2m} M^*$.

Supposons M libre de rang 4 ; l'application $\Gamma_2 : \Lambda^2 M \to \Lambda^4 M$ est une application quadratique, qui se réduit à une forme quadratique si on choisit une orientation de M. Cette forme est neutre (ou hyperbolique) : si $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, les sous-espaces $P_1 = \{e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4\}$, $P_2 = \{e_3e_4, -e_2e_4, e_2e_3\}$ de $\Lambda^2 M$ sont totalement isotropes et mis en dualité par Γ_2. Notons encore que $\Gamma_2(u) = 0$ si et seulement si u est décomposable.

2. Trivecteurs de rang 6

Nous utiliserons deux méthodes pour obtenir une classification complète des trivecteurs de rang 6 sur un corps quelconque ; la première s'inspire de [1] et la seconde utilise la notion de p-vecteurs scindables. Dans tout ce paragraphe, $\dim E = 6$ et $\omega \in \Lambda^3 E$ est de rang maximal. Remarquons que $d_1(\omega) \neq 0$ et donc est soit 3, soit 5 car $d_1(\omega) = 0$ implique que le rang de ω est impair.

2.1 Lemme 1 : Si $d_1(\omega) = 3$, il existe une base e_i, $1 \leq i \leq 6$, de E dans laquelle ω a l'une des deux formes non équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \omega_1 = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6 \\ \omega_2 = e_1 e_2 e_4 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6 \end{cases}$$

En effet ω s'écrit $xu + \omega'$ où $x \in E$, u est un bivecteur de rang 2 ou 4 et ω' est un trivecteur de rang 3 et donc décomposable. Si le rang de u est 2, les supports de xu et de ω' sont deux sous-espaces de dimension 3, linéairement disjoints car ω est de rang 6, de sorte de ω est du type ω_1. Si le rang de u est 4, les supports de u et de ω' ont une intersection G de dimension 2 et soit (e_2, e_3) une base de G. Si $e_2 e_3 u = 0$, u s'écrit $e_2 e_4 + e_3 e_6$ et $\omega' = e_2 e_3 e_5$; posant $x = e_1$, on voit que ω est du type ω_2. Si $e_2 e_3\, u \neq 0$, il est clair que dans le faisceau des formes $\lambda_1 u + \lambda_2 e_2 e_3$, il y a une forme, avec $\lambda_1 \neq 0$, qui est décomposable ; c'est à dire qu'en changeant e_2 et e_3, on peut trouver y et z tel que $u = e_2 e_3 + yz$ et $\omega' = e_2 e_3 t$. On a alors $\omega = x(e_2 e_3 + yz) + e_2 e_3 t$ et donc $\omega = (x+t)\, e_2 e_3 + xyz$ qui est du type ω_1. Pour achever notons que ω_1 et ω_2 ne sont pas équivalents car les ensembles $R_i = \{x \mid x \in E \text{ et } \bar{\omega}(x) \text{ est de rang } 3\}$ différent.

Lemme 2 : Tout trivecteur de rang 6 est scindable.

C'est clair si $d_1(\omega) = 3$, à l'aide du lemme 1. Pour ω_2 remarquons qu'il l'est de deux façons essentiellement différentes : ω_2 est dans $E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ et dans $F_1 \otimes \Lambda^2 F_2$ où l'on a posé $E_1 = \{e_1, e_5\}$, $E_2 = \{e_2, e_3, e_4, e_6\}$ et $F_1 = \{e_4, e_5, e_6\}$, $F_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Supposons maintenant que $d_1(\omega) = 5$; d'après 1.3.1, ω s'écrit $x_1 u_1 + \omega'$ où u_1 et ω' sont dans $\Lambda E'$, E' un supplémentaire de Kx_1 dans E. Le trivecteur ω' est de rang 5 car $d_1(\omega) = 5$: il s'écrit $x_2 u_2$ où S_{u_2} est de rang 4 ; de plus x_2 n'est pas dans le support de u_1 car alors $\bar{\omega}(x_2)$ serait de rang 3 contrairement à l'hypothèse $d_1(\omega) = 5$. Comme S_{u_1} et S_{u_2} sont deux supplémentaires dans E' de Kx_2, on peut choisir u_2 de sorte que $S_{u_2} = S_{u_1} = E_2$. Posant $E_1 = Kx_1 \oplus Kx_2$, on a exactement $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$.

<u>Lemme 3</u> : <u>Si</u> $d_1(\omega) = 5$, <u>il existe un corps</u> K' <u>extension quadratique de</u> K <u>telle</u> $d_1(\omega_{K'}) = 3$.

En effet le lemme 2 montre que ω s'écrit $x_1u_1 + x_2u_2$ où x_1 et x_2 sont des vecteurs de E et u_1, u_2 deux bivecteurs de même support F et de rang 4. Comme $\Lambda^4 F \simeq K$, $\Gamma^2(u_2 - \lambda u_1) = (\lambda^2 + b\lambda + c)\,\Gamma^2(u_1)$; les éléments $u_2 - \lambda u_1$ de rang 2 correspondent aux racines du polynôme $\lambda^2 + b\lambda + c$. Si ce polynôme avait une racine μ dans K, $u_2 - \mu u_1$ s'écrirait yz et $\omega = x_1u_1 + x_2(\mu u_1 + yz) = (x_1 + \mu x_2)\,u_1 + x_2yz$ vérifierait $d_1(\omega) = 3$. Il est donc irréductible, et il existe un corps K', extension quadratique de K, dans lequel ce polynôme a une racine. Mais alors $d_1(\omega_{K'}) = 3$, d'où le lemme.

On déduit des lemmes précédents, la

<u>Proposition</u> : <u>Sur un corps quadratiquement clos, tout trivecteur de rang 6 est d'un des deux types</u> ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>du lemme 1</u>.

2.2 Classification en dimension 6

Les éléments ω de $\Lambda^3 E$ tels que $d_1(\omega)=5$ peuvent se classifier à l'aide du lemme 3. Nous distinguons deux cas suivant la nature de l'extension quadratique K' et nous reprenons les notations du lemme 3.

2.2.1 K <u>est de caractéristique différente de 2 ou bien</u> 2 = 0 <u>dans</u> K' <u>et</u> K' <u>inséparable</u>.

Dans ces conditions, $K' = K[x]$ avec $x^2=d$, où d n'est pas un carré dans K ; μ s'écrit bx+c avec b et c dans K, $b \neq 0$. Le bivecteur $u_2 - \mu u_1$ est un produit $(p+xq)(r+xs)$ où p,q,r et s sont dans F support de u_1 et de u_2. En développant, on trouve

$$\begin{cases} u_2 - cu_1 = pr + d\,qs. \\ \quad\;\; - bu_1 = ps + qr \end{cases}$$

Comme u_1 est de rang 4, $F = \{p,q,r,s\}$ et on a

$$\omega = x_1[-b^{-1}(ps+qr)] + x_2[(pr+dqs) - cb^{-1}(ps+qr)]$$

sont en posant $e_1 = b^{-1}x_1 - cb^{-1}x_2$, $e_2 = x_2$, $e_3 = p$, $e_4 = s$, $e_5 = q$ et $e_6 = r$, $E = \{e_1,\dots,e_6\}$ et $\omega = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 + de_4e_5)$, élément qu'on notera ω_d.

2.2.2 K <u>est de caractéristique</u> 2 <u>et</u> K' <u>est séparable</u>.

Dans ce cas, $K' = K[x]$ avec $x^2+x+a = 0$ où a est déterminé à l'addition d'un élément $y+y^2$ près, $y \in K$; l'élément μ s'écrit encore bx+c, $b \neq 0$ et $u_2 - \mu u_1 = (p+xq)(r+xs)$, ce qui donne

$$\begin{cases} u_2 - cu_1 = pr + a\,qs \\ \quad - bu_1 = ps + qr + qs \end{cases}$$

où, comme en 2.2.1, $F = \{p,q,r,s\}$. Prenant une nouvelle base convenable de E, on trouve :

$$\omega = e_1(e_3e_4 + ae_5e_6) + e_2(e_3e_6 + e_4e_5 + e_5e_6)$$

type qu'on notera ω_a.

2.2.3 Supposons que K' est une extension séparable de K et notons σ l'unique K-automorphisme différent de l'identité de K'. Alors $u_2 - \mu u_1$ et $u_2 - \sigma(\mu)u_1$ forment une base (γ_1,γ_2) sur K' du sous-espace de $\Lambda^2 F \otimes K'$ engendré par u_1 et u_2, de sorte que ω peut s'écrire sur K' $f_1\ \gamma_1 + \sigma(f_1)\sigma(\gamma_1)$ $(\sigma(\gamma_1) = \gamma_2)$ et que $\omega_{K'}$ est du type ω_1.

Par contre, on voit que si K' est une extension inséparable de K, alors $\omega_{K'}$ est du type ω_2. On voit donc apparaître les faits suivants : si K est quadratiquement clos, il existe deux types de trivecteurs de rang 6 ω_1 et ω_2 caractérisés par : pour ω_1, $\{\bar{\omega}_1(x)$ est de rang $3\} = V_1 \cup V_2$ où V_1 et V_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de dimension 3 ; pour ω_2, $\{x \mid \bar{\omega}_2(x)$ est de rang $3\}$ est un sous-espace de dimension 3. Dans le cas général, on a le

<u>Théorème 1</u>. <u>Les trivecteurs</u> ω <u>de rang 6 sur un corps</u> K <u>de clôture quadratique</u> $\bar{K}$ <u>se répartissent en deux classes</u> C_1 <u>et</u> C_2 <u>selon que</u> $\omega_{\bar{K}}$ <u>est du type</u> ω_1 <u>ou</u> ω_2. <u>L'ensemble</u> C_1 <u>est formée de classes d'isomorphismes en bijection avec l'ensemble des extensions quadratiques séparables de</u> K. <u>L'ensemble</u> C_2 <u>est réduit à l'élément</u> ω_2 <u>si</u> $2 \neq 0$ <u>dans</u> K <u>ou si</u> K <u>est parfait</u>. <u>En caractéristique 2</u>, C_2 <u>est en bijection avec</u> K^*/K^{*2} (<u>extensions quadratiques inséparables</u>).

En effet, on note que ω_d et $\omega_{d'}$ (cf. 2.2.1) ne sont isomorphes que si $K[\sqrt{d}] \simeq K[\sqrt{d'}]$ car $(\omega_d)_{K[\sqrt{d'}]}$ n'est pas ω_1 si d n'est pas un carré dans $K[\sqrt{d'}]$.

2.3 <u>Groupes d'automorphismes et cohomologie galoisienne</u>

2.3.1 Supposons K quadratiquement clos et soient ω_1 et ω_2 les deux types de trivecteurs vues en 2.1. Leurs groupes d'automorphismes se déterminent aisément. Pour ω_1, soit $V_1 = \{e_1,e_2,e_3\}$ et $V_2 = \{e_4,e_5,e_6\}$; d'après 2.2.3, un élément de $\mathrm{Aut}(\omega_1)$ laisse stable $V_1 \cup V_2$ et donc permute V_1 et V_2 ou laisse chacun d'eux globalement invariant. Dans lé second cas, les automorphismes ont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et $\beta \in \mathrm{Sl}_3(K)$ et dans l'autre cas de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où α et β sont encore de déterminant 1. On a donc la suite exacte de groupes

$$\text{(I)} \quad 1 \to \mathrm{Sl}_3(K) \times \mathrm{Sl}_3(K) \to \mathrm{Aut}(\omega_1) \to \mathbb{Z}/(2) \to 1$$

Pour ω_2, soit $V = \{e_1, e_2, e_3\}$: ce sous-espace est invariant par chaque automorphisme de ω_2 et on a un homomorphisme de $\mathrm{Aut}(\omega_2)$ sur le groupe $Gl_3(K)$ en envoyant $f \in \mathrm{Aut}(\omega_2)$ sur sa restriction à V dont la surjectivité est immédiate à démontrer. Le noyau de cet homomorphisme est un sous-groupe de $Gl_6(K)$ formée des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} 1_3 & U \\ 0 & 1_3 \end{pmatrix}$ où $U = (u_{ij}) \in M_3(K)$ vérifie

la condition $u_{11} - u_{22} + u_{33} = 0$. C'est donc le groupe additif K^8 et on a la suite exacte de groupes :

$$\text{(II)} \quad 1 \to K^8 \to \mathrm{Aut}(\omega_2) \to Gl_3(K) \to 1$$

On vérifie que $\mathrm{Aut}(\omega_1)$ est de dimension 16 et que $\mathrm{Aut}(\omega_2)$ est de dimension 17 ; ainsi l'orbite de ω_2 est de codimension 1 dans $\Lambda^3 E$ ($16 = \dim Gl_6(K) - \dim \Lambda^3(K^6)$).

2.3.2 Supposons maintenant que K est un corps quelconque de caractéristique différente de 2 ou un corps parfait de caractéristique 2. Soit K_s sa clôture séparable et G le groupe de Galois de K_s sur K. Comme K_s est quadratiquement clos, d'après 2.1 tout trivecteur de rang 6 sur K_s est de l'un des deux types ω_1 ou ω_2. Alors l'ensemble C des trivecteurs ω de rang 6 sur K se divise en deux classes C_1 et C_2 selon que ω_{K_s} est du type ω_1 ou ω_2 et chacune de ces classes C_i est en bijection avec l'ensemble de cohomologie $H^1(G, \mathrm{Aut}(\omega_i))$. La suite exacte de cohomologie appliqué à (II) montre immédiatement que $H^1(G, \mathrm{Aut}(\omega_2))$ est réduit à un seul élément, l'élément distingué.

2.3.3 Pour (I), la suite exacte de cohomologie ne donne pas beaucoup de résultats: elle dit seulement que la fibre au dessus de l'élément distingué de $H'(G, \mathbb{Z}/(2))$ est réduite à un point. Il faut donc travailler directement avec les cocycles. Nous allons en fait montrer que $H^1(G, \mathrm{Aut}(\omega_1))$ s'identifie à $H^1(G, \mathbb{Z}/(2)) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/(2))$ le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{Z}$ modulo 2.

Ce sera la conséquence d'un fait plus général : soit G un groupe et A un G-module ; on considère le produit semi-direct B de $A \times A$ par le groupe $\mathbb{Z}/(2)$ opérant sur $A \times A$ par permutation des facteurs. C'est un G-module de façon naturelle de sorte que la suite exacte de groupes

$$A \to A \times A \to B \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/(2) \to 1$$

est une suite exacte de G-modules. Alors si $H^1(G,A) = \{1\}$ et si $H^1(G',A) = \{1\}$ pour tout sous-groupe d'indice 2 de G, $H^1(G,B)$ s'identifie à $H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$. Cette hypothèse sera automatiquement vérifiée dans notre cas.

Il existe un homomorphisme $r : \mathbb{Z}/(2) \to B$ qui est une rétraction obtenue en envoyant l'élément non nul de $\mathbb{Z}/(2)$ sur la "matrice" $\begin{pmatrix} 0 & 1_A \\ 1_A & 0 \end{pmatrix}$ (les éléments de B ont une représentation "matricielle" naturelle : ceux de $A\times A$ sous la forme $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$; ceux de $p^{-1}(1)$ sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_2' \\ a_1' & 0 \end{pmatrix}$.), ce qui montre que l'application $H^1(G,B) \to H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$ est surjective. Il s'agit de montrer que la fibre dans $H^1(G,B)$ au dessus de chaque point est réduite à un élément. Au dessus de l'élément distingué de $H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$, c'est clair à cause de la suite exacte de cohomologie. Soit maintenant $s \overset{\epsilon}{\mapsto} \epsilon_s$ un 1-cocycle de G à valeurs dans $\mathbb{Z}/(2)$ et soit $s \mapsto a_s$ et $s \mapsto a_s'$ deux 1-cocycles de $Z^1(G,B)$ qui ont pour image ϵ dans $H^1(G,\mathbb{Z}/(2))$. Soit H le noyau de ϵ, sous-groupe d'indice 2 de G ; $s \mapsto a_s$ et $s \mapsto a_s'$ restreints à H sont deux cocycles de $Z^1(H, A\times A)$ et par conséquent sont des cobords, donc en modifiant le 1-cocycle a_s, on peut se ramener au cas où $a_s = a_s'$ pour $s \in H$. Il suffit de regarder ce qui se passe en dehors de H ; soit alors $s \in H$ et $t \notin H$: on a $a_{ts} = a_t\, t(a_s)$ et $a_{ts}' = a_t'\, t(a_s')$ et, comme $a_s = a_s'$, on en déduit que $a_t'^{-1} a_{ts}' = a_t^{-1} a_{ts}$ et donc $a_{ts}' = c\, a_{ts}$ où c est un élément de $A\times A$ indépendant de l'élément $ts \notin H$ choisi. Soit alors t_1 et t_2 deux éléments n'appartenant pas à H : $t_1 t_2 \in H$ et on a

$$a_{t_1 t_2} = a_{t_1} t_1 (a_{t_2}) = a_{t_1 t_2}' = a_{t_1}' \, t_1(a_{t_2}') = c\, a_{t_1} t_1(c) t_1 (a_{t_2})$$

soit après simplification par $t_1(a_{t_2})$,

$$a_{t_1} = c\, a_{t_1} t_1(c) \quad \text{ou encore}$$

$$a_t' = c\, a_t = a_t\, t(c^{-1}) \qquad (1)$$

Ecrivons

$$a_t = \begin{pmatrix} 0 & a_{t,1} \\ a_{t,2} & 0 \end{pmatrix}, \; a_t' = \begin{pmatrix} 0 & a_{t,1}' \\ a_{t,2}' & 0 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} ;$$

l'équation (1) donne le système (2) :

$$a_{t,1}' = c_2\, a_{t,1} = a_{t,1}\, t(c_1^{-1})$$

$$a_{t,2}' = c_1\, a_{t,2} = a_{t,2}\, t(c_2^{-1})$$

En utilisant la relation $a_t' = a_t\, t(c^{-1})$ pour t et ts, $s \in H$, on trouve que pour $s \in H$ (3) $c\, a_s\, s(c^{-1}) = a_s$; posons alors $b = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: on voit immédiatement à l'aide de (2) et de (3) que $a_s' = b\, a_s\, s(b^{-1})$ quel que soit s dans G et donc que les cocycles a_s et a_s' sont cohomologues. On a donc la

2.3.4 <u>Proposition</u> : <u>L'ensemble de cohomologie</u> $H^1(G, \mathrm{Aut}(\omega_1))$ <u>est en bijection naturelle avec le groupe des homomorphismes continues de</u> G <u>dans</u> $\mathbb{Z}/(2)$.

Ceci montre que, sauf si K est un corps non parfait de caractéristique 2, on peut retrouver par cette voie cohomologique les résultats de 2.2.

2.4 Une deuxième approche :

Comme on l'a noté en 2.1, lemme 2, tout trivecteur de rang 6 est 2-scindable. Cela montre que la classification de ces trivecteurs équivaut à celle des sous-espaces de dimension 2 et de rang maximal de $\Lambda^2 F$, $\dim F = 4$, que nous allons entreprendre ici. La considération de l'application $\Gamma_2 : \Lambda^2 F \to \Lambda^4 F$ montre qu'il s'agit d'abord de chercher les sous-modules quadratiques M de dimension 2 d'un espace hyperbolique de rang 6.

2.4.1 Si $2 \neq 0$ dans K, trois cas sont à considérer suivant que le rang de $\Gamma_2|M$ est 0, 1 ou 2. Dans le premier cas $M = \{u_1, u_2\}$ avec $\Gamma_2(u_1) = \Gamma_2(u_2) = u_1 . u_2 = 0$, ce qui montre que Su_1 et Su_2 sont deux plans d'intersection non réduite à $\{0\}$ de sorte que le support de M est de dimension 3 et M n'est pas de rang maximal.

Si le rang de Γ_2 est 1, il existe dans M une base $\{u_1, u_2\}$ telle que $\Gamma_2(u_1) \neq 0$ et $u_1 . u_2 = \Gamma_2(u_2) = 0$. On a donc $u_2 = xy$ et $u_1 = xz + yt$ avec $F = \{x,y,z,t\}$, ce qui donne le trivecteur ω_2.

Si le rang de Γ_2 est 2, il existe dans M une base orthogonale et un scalaire d, déterminé à un carré près tel que $\Gamma_2(u_2) + d\,\Gamma_2(u_1) = 0$ et $u_1 . u_2 = 0$. Dans $\Lambda^2 F$, on peut trouver u_1', u_2' orthogonaux aux u_i et entre eux tels que $\Gamma_2(u_i') = -\Gamma_2(u_i)$, de sorte que $\{u_1, u_1'\}$ et $\{u_2, u_2'\}$ sont deux plans hyperboliques orthogonaux de $\Lambda^2 F$. Ainsi $\{u_1+u_1', u_2+u_2'\}$ et $\{u_1-u_1', u_2-u_2'\}$ sont deux sous-espaces totalement isotropes mis en dualité par Γ_2. Comme les sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\Lambda^2 F$ sont bien connus (géométrie des droites de $P(K^4)$!), on voit qu'il existe une base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de F telle que

$$u_1+u_1' = 2f_1f_2 \qquad u_2+u_2' = 2f_1f_3$$

$$u_1-u_1' = 2f_3f_4 \qquad u_2-u_2' = 2d\, f_2f_4$$

soit
$$\begin{cases} u_1 = f_1f_2 + f_3f_4 \\ u_2 = f_1f_3 + d\, f_2f_4 \end{cases}$$

ce qui donne les éléments ω_d vus en 2.2.1.

2.4.2 Supposons que $2=0$ dans K. Le rang de la restriction de Γ_2 à M est 0 ou 2. Dans le premier cas, le défaut (rang de la partie quasilinéaire) est 1 ou 2. Si le défaut est 1, on obtient le même résultat que pour le rang 1 en caractéristique différente de 2. Si le défaut est 2, il existe une base (u_1, u_2) de M avec $\Gamma_2(u_2) = d\,\Gamma_2(u_1)$ et $u_1 . u_2 = 0$; le calcul est encore le même qu'en 2.4.1 : on obtient les éléments ω_d de 2.2.1 (mais ils sont dans C_2).

Si le rang de la restriction de Γ_2 à M est 2, il existe une base (u_1,u_2) de M avec $\Gamma_2(u_2) = a\,\Gamma_2(u_1) = a\, u_2.u_1 \neq 0$ (a est déterminé à l'addition d'un élément $x+x^2$, $x \in K$, près). Mais alors l'espace hyperbolique (Λ^2F, Γ_2) de rang 6 est la somme orthogonale de deux exemplaires de (M, Γ_2) et d'un plan hyperbolique. Il existe donc u_1' et u_2' dans Λ^2F, orthogonaux à M et vérifiant $\Gamma_2(u_i') = \Gamma_2(u_i)$, $u_1'.u_2' = u_1.u_2$, et il existe u_1'' et u_2'' isotropes et orthogonaux à $\{u_1,u_2,u_1',u_2'\}$. On vérifie alors que $\{u_1+u_1',\ u_2+u_2',\ u_1''\}$ et $\{a(u_1+u_1') + u_2',\ u_2+u_2' + u_1,\ u_2''\}$ sont deux sous-espaces totalement isotropes maximaux de Λ^2F mis en dualité par Γ_2. Cela montre qu'il existe une base e_i, $1 \leq i \leq 4$, de F telle que

$$\begin{cases} u_1 + u_1' = e_1e_2 & u_2 + u_2' = e_1e_3 \\ a(u_1+u_1')+u_2' = e_3e_4 & u_2 + u_2' + u_1 = e_2e_4 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_3 + e_2e_4 & u_1' = e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_4 \\ u_2 = e_1e_3 + e_3e_4 + ae_1e_2 & u_2' = e_3e_4 + ae_1e_2 \end{cases}$$

2.5 <u>Exemples</u> 1) Si $K = \mathbb{R}$, il y a trois types de trivecteurs de rang 6 : card $C_1 = 2$ et card $C_2 = 1$. Dans C_1, on trouve $\omega_1' = e_1e_3e_4+e_1e_5e_6 + e_2e_3e_5 - e_2e_4e_6$ en plus de ω_1.

2) Si K est un corps fini, on a encore trois types de trivecteurs. Si K est un corps local, on a un nombre fini de trivecteurs de rang 6.

3) Si K est un corps de nombres, l'ensemble C_1 est infini, en bijection avec K^*/K^{*2}.

3. <u>Sous-espaces de Λ^2F</u>

Nous avons vu en 1.3 que la classification des trivecteurs scindables revient à l'étude des sous-espaces vectoriels de dimension convenable et de rang maximal d'un espace Λ^2F.

Cela a été utilisé en 2.4 pour les trivecteurs de rang 6. Nous allons étudier ici les sous-espaces vectoriels de Λ^2F pour $\dim F = 4$ et donner des indications sur certains résultats en dimension supérieure. K est ici un corps quelconque.

3.1 H désigne un sous-espace de rang maximal de Λ^2K^4 et q la restriction de la forme quadratique Γ_2 à H, une fois qu'on a choisi un générateur de Λ^4K^4. Si $\dim H = 1$, le problème est trivial et $H = Ku$ où u est un bivecteur de rang maximal : $u = e_1e_2 + e_3e_4$. Le cas où $\dim H = 2$ a été étudié complètement en 2.4. Notons aussi que si H' est l'orthogonal de H par rapport à Γ_2, $\dim H + \dim H' = 6$; ainsi on déduit des résultats précédents ceux pour les sous-espaces H de dimension 4 et 5. Ainsi

<u>Proposition 1</u> : <u>Si</u> $\dim H = 5$, <u>il existe une base</u> (e_i), $1 \leq i \leq 4$, <u>de</u> F <u>telle que</u> H <u>possède une base</u> $\{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$ <u>de l'un des deux types suivants</u> :

$$\begin{array}{ll} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & \qquad u_1 = e_1e_2 \\ u_2 = e_1e_3 & \qquad u_2 = e_1e_3 \\ u_3 = e_2e_4 & \qquad u_3 = e_2e_4 \\ u_4 = e_1e_4 & \qquad u_4 = e_1e_4 \\ u_5 = e_2e_3 & \qquad u_5 = e_2e_3 \end{array}$$

En dimension 4, on a

<u>Proposition 2</u> : <u>Si</u> $\dim H = 4$, <u>il existe une base</u> (e_i), $1 \leq i \leq 4$, <u>de</u> F <u>telle que</u> H <u>a une base de l'un des types suivants</u> :

(a) si $2 \neq 0$,

H_1 $\quad u_1 = e_1e_2,\ u_2 = e_1e_3,\ u_3 = e_1e_4 \quad u_4 = e_3e_4$

H_2 $\quad u_1 = e_1e_2 \quad u_2 = e_3e_4 \quad u_3 = e_1e_3 \quad u_4 = e_1e_4 + e_2e_3$

$H_{3,d}$ $\quad u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 \quad u_2 = e_1e_3 - de_2e_4$
$u_3 = e_1e_4 \quad u_4 = e_2e_3$ <u>où</u> d <u>est déterminé à un carré près</u>.

(b) <u>si</u> $2 = 0$, <u>on trouve les trois types précédents et</u>

$H_{4,a}$ $\quad u_1 = e_1e_3 + e_2e_4 \quad u_2 = e_1e_3 + e_3e_4 + ae_1e_2$
$u_3 = e_1e_4 \quad u_4 = e_2e_3$

3.2 Le cas le plus intéressant est celui de la dimension 3 : on raisonne suivant le rang de q et la caractéristique de K.
Si ce rang est 0, H est totalement isotrope et H est de l'un des deux types suivants : $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3$, $u_3 = e_1e_4$ ou bien $u_1 = e_2e_3$, $u_2 = e_3e_4$, $u_3 = e_2e_4$ (ce dernier cas étant à exclure si on veut H de rang maximal). Supposons maintenant $2 \neq 0$ dans K. Si le rang de q vaut 1, il existe une base (u_1, u_2, u_3) de H tel que $\Gamma_2(u_3) \neq 0$ et $\Gamma_2(u_1) = \Gamma_2(u_2) = 0$ ainsi que tous les produits $u_i.u_j$. Alors $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3$ et $u_3 = e_1x + e_2y$ avec $F = \{e_1, e_2, x, y\}$. De plus $u_2.u_3 = 0$ soit $e_1e_2e_3y = 0$ c'est à dire $y = ae_1 + be_2 + ce_3$ et l'on trouve $u_3 = e_1(x - ae_2) + ce_2e_3$. Quitte à multiplier u_3 par c^{-1}, on peut supposer que $c = 1$ et on pose $e_4 = x - ae_2$ d'où la base

$$u_1 = e_1e_2,\ u_2 = e_1e_3,\ u_3 = e_1e_4 + e_2e_3.$$

Si maintenant le rang de q est 2, il existe une base (u_1, u_2, u_3) de H telle que u_3 engendre le radical de H et q est non dégénérée sur $\{u_1, u_2\}$. Si $\{u_1, u_2\}$ a une base formée de bivecteurs décomposables (ou encore $q|_{\{u_1,u_2\}}$ est hyperbolique) il existe une base de F e_i, $1 \leq i \leq 4$, et une base v_1, v_2, v_3 de H de la forme $v_1 = e_1 e_2$ $v_2 = e_3 e_4$ $v_3 = e_1 e_3$. Si q n'est pas hyperbolique, on fait une extension quadratique K' de K, $K' = K[x]$, comme en 2.2. Dans K', il existe $\mu = bx+c$, $b \neq 0$ tel que

$$u_2 - \mu u_1 = (e_1+xe_2)(e_3+xe_4)$$
$$u_2 - \sigma(\mu)u_1 = (e_1-xe_2)(e_3-xe_4)$$

avec $\sigma(\mu) = -bx+c$, conjugué de μ dans K'. Alors u_3 est décomposable et orthogonal à u_1 et u_2 donc à $u_2-\mu u_1$; il est donc divisible par une combinaison linéaire de e_1+xe_2 et de e_3+xe_4, qu'on peut supposer être égale à e_1+xe_2. Mais alors, comme u_3 est défini sur K, il est aussi divisible par le congugué de e_1+xe_2, e_1-xe_2 et donc

$$u_3 = k(e_1+xe_2)(e_1-xe_2) = \lambda e_1 e_2 \quad \text{et,}$$

en faisant une homothétie, on peut prendre $u_3 = e_1 e_2$. Pour u_1 et u_2, on procède comme dans 2.4 et on a donc une base (v_1, v_2, v_3) de H de la forme

$$\begin{cases} v_1 = e_1 e_3 - d e_2 e_4 \\ v_2 = e_1 e_4 + e_2 e_3 \\ v_3 = e_1 e_2 \end{cases}$$

Supposons enfin que le rang de q est 3. Il existe dans H une base orthogonale u_1, u_2, u_3 ; l'orthogonal H' de H est un supplémentaire de H dans $\Lambda^2 F$ et comme Γ_2 est hyperbolique $\Gamma_2|H' \simeq -\Gamma_2|H$. Ainsi il existe une base orthogonale (u'_1, u'_2, u'_3) de H' telle que $\Gamma_2(u'_i) = -\Gamma_2(u_i)$: alors les $\{u_i, u'_i\}$ sont des plans hyperboliques orthogonaux, si bien que la base (u_1, u_2, u_3) de H peut s'écrire

$$u_1 = e_1 e_2 + d_1 e_3 e_4$$
$$u_2 = e_1 e_3 - d_2 e_2 e_4$$
$$u_3 = e_1 e_4 + d_3 e_2 e_3$$

et comme q est définie à un facteur près, on peut supposer $d_3 = 1$.

3.3 En caractéristique 2, le rang peut être 0 ou 2 ; s'il vaut 0, le défaut peut varier de 0 à 3 et on obtient des expressions formellement analogues à celles obtenues en caractéristique différente de 2. Si le rang de q est 2, le défaut peut être 0 ou 1 et on obtient :

<u>Proposition 3</u> : <u>Si la caractéristique est</u> 2, <u>il existe une base</u> (e_i) <u>de</u> F <u>et une base</u> (u_j) <u>de</u> H <u>qui s'écrit</u>

<u>dans le cas de défaut</u> 0 : $\begin{cases} u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4 \\ u_2 = e_1 e_3 + e_3 e_4 + a e_1 e_2 \\ u_3 = e_2 e_3 \end{cases}$

dans le cas de défaut 1 : u_1 et u_2 sont inchangés et $u_3 = e_1e_4 + be_2e_3$.

3.4 Sous-espaces de dimension 2 de Λ^2F pour dim $F = 5$ ou 6.

Les sous-espaces H de Λ^2K^5 de dimension 2 et de rang maximal sont de deux types : $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3 + e_4e_5$ si H contient un bivecteur décomposable et $u_1 = e_1e_2+e_3e_4$, $u_2 = e_1e_3+e_2e_5$ dans le cas contraire. Dans le premier cas, c'est clair ; dans le second cas, on regarde $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ qui est nécessairement de dimension 3, ce qui permet d'arriver aux formules annoncées.

Si F est de dimension 6, nous supposerons d'abord K algébriquement clos et on utilisera l'application polynôme $\Gamma_2 : \Lambda^2F \to \Lambda^6F$; en rang 2, cette forme polynôme est de l'une des 4 formes suivantes : 0, $(x,y) \to x^3$, $(x,y) \to x^2y$, $(x,y) \to xy(x+y)$. On obtient alors six classes d'isomorphisme de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal de Λ^2K^6 données par une base (u_1,u_2)

H_1	$u_1 = e_1e_3 + e_2e_4$	$u_2 = e_1e_5 + e_2e_6$	$\Gamma_3 = 0$
H_2	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2$	$\Gamma_3 = x^3$
H_3	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$\Gamma_3 = x^3$
H_4	$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$	$u_2 = e_1e_3 + e_5e_6$	$\Gamma_3 = x^2y$
H_5	$u_1 = e_1e_2$	$u_2 = e_3e_4 + e_5e_6$	$\Gamma_3 = x^2y$
H_6	$u_1 = e_1e_2 + e_5e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$\Gamma_3 = xy(x+y)$.

On voit apparaître ici le fait qu'à une même fonction Γ_3 peuvent correspondre plusieurs types de sous-espaces. Sur un corps non algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3, seul le type H_6 présente des formes variées. En caractéristique 3,il en est de même pour H_4 & H_5 et en caractéristique 3,pour H_2 et H_3.
On voit en fait ici que la classification des sous-espaces de dimension r de Λ^2F est l'étude de l'action de $Gl(F)$ sur la grasmannienne $G_r(\Lambda^2F)$. On a, si F est de dimandion paire $2n$, une application naturelle $\widetilde{\Gamma}_n : G_r(\Lambda^2F) \to \mathbb{P}(\Gamma^n(K^r)^*)$; il est clair que $\widetilde{\Gamma}_n$ est constante sur chaque orbite du groupe $Gl(F)$. Si la dimension de F est 4, on voit que en fait l'invariant $\widetilde{\Gamma}_n$ suffit à classer les orbites i.e. que si deux sous-espaces H_1 et H_2 de $G_r(\Lambda^2F)$ ont même $\widetilde{\Gamma}_n$, ils sont dans la même orbite. Ce que montre le cas de dimension 6, c'est que ce n'est plus vrai en dimension supérieure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. CAPDEVILLE, Classification des formes trilinéaires alternées en dimension 6. L'enseignement mathématiques II° Série, 18, (1972) 225-243.

[2] G.B. GUREVITCH, Theory of algebraïc invariants, P. Noordhoff. L.T.D. Groningen, the Netherlands.

[3] G. PAPY et F. TOURNAY, Classification des formes cubiques alternées à six indéterminées par rapport au groupe canonique de degré 3. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, p. 513-523, 1946.

[4] Ph. REVOY, Formes alternées et puissances divisées, Séminaire Dubreuil, 26° année, n° 8, 1972-1973.

[5] J.P. SERRE, Corps locaux, Hermann, Paris. 1968.

Philippe REVOY

Institut de Mathématiques
Université des Sciences et
Techniques du Languedoc

34060 MONTPELLIER CEDEX
FRANCE