MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FOUAD EL ZEIN

Complexe dualisant et applications à la classe fondamentale d'un cycle

Mémoires de la S. M. F., tome 58 (1978), p. 1-66
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1978__58__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SUPPLÉMENT au numéro de DÉCEMBRE 1978

MÉMOIRE N° 58

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 58, 1978, 93 p.

COMPLEXE DUALISANT ET APPLICATIONS
A LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN CYCLE
(par Fouad EL ZEIN)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
75231 PARIS CEDEX 05

Publication trimestrielle

SUPPLÉMENTS au Bulletin de la Société mathématique de France.

- Les "*Comptes rendus des séances*", qui avaient paru annuellement de 1911 à 1938, ne sont plus disponibles séparément, mais sont tous incorporés, année par année, dans la réimpression du Bulletin de la Société mathématique de France, tomes 39 (1911) à 66 (1938), y compris, pour chacune des années 1911, 1921, 1922, 1923 et 1924 (séances du "*Cinquantenaire*" et séances ordinaires de 1924), les tables qui n'existaient pas à l'origine.

Les autres suppléments ci-après sont disponibles séparément :

- 1939. - Conférences de la Réunion internationale des mathématiciens [1937. Paris].

- "*Mémoires*" :

1. FORT (Jacques). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires ... (Thèse).
2. GIRAUD (Jean). - Méthode de la descente.
3. GRILLET (P.-A.). - Homomorphismes principaux de tas et de groupoïdes (Thèse).
4. BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques (Thèse).
5. BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Espaces de fonctions bornées et continues ... (Thèse).
6. VO-KHAC Khoan. - Etude des fonctions quasi stationnaires ... (Thèse).
7. BERNAT (Pierre). - Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble.
8. MALLIAVIN-BRAMERET (Marie-Paule). - Largeurs d'anneaux et de modules (Thèse).
9. RENAULT (Guy). - Etude des sous-modules compléments dans un module (Thèse).
10. ZINN-JUSTIN (Nicole). - Dérivations dans les corps et anneaux ... (Thèse).
11. BERTIN (Jean-Etienne). - Variété de Picard de type linéaire commutatif (Thèse).
12. AUBIN (Jean-Pierre). - Approximation des espaces de distributions ... (Thèse).
13. DEUTSCH (Nimet). - Interpolation dans les espaces vectoriels ... (Thèse).
14. ROBERT (Pierre). - Sur l'axiomatique des systèmes générateurs ... (Thèse).
15. FOUQUES (Alfred). - Systèmes de a-idéaux dans un demi-groupe ... (Thèse).
16. LEHMANN (Daniel). - Quelques propriétés des connexions induites ... (Thèse).
17. BRUTER (Claude P.). - Vue d'ensemble sur la théorie des matroïdes.
18. DIXMIER (Suzanne). - Sur les p-groupes ... (Thèse).
19. Contributions à la théorie des séries trigonométriques ...
20. KRÉE (Paul R.). - Distributions quasi homogènes et intégrales singulières.
21. de MATHAN (Bernard). - Approximations diophantiennes dans un corps local (Thèse).
22. CHADEYRAS (Marcel). - Essai d'une théorie nœthérienne homogène ... (Thèse).
23. KOSKAS (Maurice). - Structures algébriques multivoques. Applications (Thèse).
24. SPECTOR (René). - Sur la structure locale des groupes abéliens ... (Thèse).
25. Colloque de théorie des nombres [1969. Bordeaux].
26. MARTY (Robert). - Sous-groupes fonctoriels et relativisations (Thèse).
27. DHOMBRES (Jean G.). - Sur les opérateurs multiplicativement liés (Thèse).
28. GATESOUPE (Michel). - Sur les transformées de Fourier radiales (Thèse).
29. DELAROCHE (Claire). - Extensions des C^*-algèbres (Thèse).
30. RAÏS (Mustapha). - Distributions homogènes sur des espaces de matrices (Thèse).

31-32. Colloque d'analyse fonctionnelle [1971. Bordeaux].

33. Sur les groupes algébriques (ANANTHARAMAN et LUNA).

34. Contributions à l'analyse fonctionnelle (BONNARD, BOLLEY et CAMUS).

35. Contributions au calcul des probabilités (CONZE, REINHARD, BECKER, JACOD et DANG NGOC NGHIEM).

36. ROBERT (Gilles). - Unités elliptiques.

37. Journées arithmétiques [1973. Grenoble].

38. Journées de géométrie analytique [1972, Poitiers].

39-40. Table ronde d'analyse non archimédienne [1972, Paris].

41. RAYNAUD (Michèle). - Théorème de Lefschetz ... (Thèse).

42. FAKIR (Sabah). - Objets algébriquement clos ... (Thèse).

43. LIGOZAT (Gérard). - Courbes modulaires de genre 1 (Thèse).

44. ENOCK (Michel) et SCHWARTZ (Jean-Marie). - Une dualité dans les algèbres de von Neumann.

45. MOULIN (Hervé). - Prolongement des jeux à deux joueurs de somme nulle (Thèse).

46. Journées sur la géométrie de la dimension infinie ... [1975, Lyon].

47. PUIG (Luis). - Structure locale dans les groupes finis (Thèse).

48. Colloque sur les formes quadratiques [1975. Montpellier].

49-50. Utilisation des calculateurs en mathématiques pures [1975, Limoges].

51-52. Contributions à l'étude des opérateurs elliptiques et hypoelliptiques (B. HELFFER, G. MÉTIVIER).

53. KANTOR (Jean-Michel). - Formes ... ; HENDRIKS (Harris). - Obstruction ...

54. Fonctions harmoniques et théorèmes limites ... (A. RAUGI, J. ROSENBERG).

55-56. SOTO ANDRADE (Jorge). - Représentations de certains groupes symplectiques finis (Thèse).

57. VÉLU (Jacques). - Courbes elliptiques ... (Thèse).

58. EL ZEIN (Fouad). - Complexe dualisant ... (Thèse)

A mes Parents et

A mon oncle SAFIEDDINE

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 58, 1978, 93 p.

COMPLEXE DUALISANT ET APPLICATIONS A LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN CYCLE

par

Fouad EL ZEIN *

Université Paris VII

APPENDICE avec *B. ANGENIOL* *

RESUME.- On applique la théorie du Résidu et Dualité de Grothendrieck annoncée au Congrès international des Mathématiciens en 1958 et apparue dans [RD], à la cohomologie de De Rham. Plus précisément, on introduit l'yperhomologie de De Rham pour énoncer les résultats sans faire référence au plongement du cycle dans une variété lisse. On considère aussi le cas relatif, le cas d'une morphisme plat est traité dans l'Appendice.

ABSTRACT.- This work is an application of the Duality theory of Grothendrieck announced in the International Congress of Mathematicians in 1958 and which appeared in [RD], more precisely we apply the Residual complex to the construction of the fundamental class of a cycle. As a general principle the Chow ring $A^{\cdot}(X)$ of a smooth variety X is an "initial cohomological object", that is to say that for any cohomological theory $H^{\cdot}(X)$ it does exist a canonical morphism $C_X : A^{\cdot}(X) \to H^{\cdot}(X)$.

As cohomology we take the De Rham cohomology. To be able to give the statement of the results without the choice of a particular embedding in a smooth variety, we introduce also the De Rham hyperhomology.

We consider also the relative case for a scheme X over a scheme S, after considering special cases, we prove in the Appendice the existence of a fundamental class $C_{X/S}$ when X is of finite Tor-dimension over S in characteristic zero.

*
* *

* Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. N° 589

TABLE DES MATIERES

* * *

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude du complexe résiduel et de ses applications à la théorie des Résidus en Géométrie algébrique.

Dans la théorie de la dualité annoncée au Congrès International des Mathématiciens à Edimbourg en 1958, Grothendrieck a défini pour toute variété X sur un corps k un complexe résiduel $K_X^{\bullet}$ [8]. Lorsque X est propre sur k, ce complexe sert à démontrer pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout faisceau quasi-cohérent F l'isomorphisme de dualité suivant :

$$\mathrm{Ext}^{-i}(F,K_X^{\bullet}) \simeq \mathrm{Hom}(H^i(X,F),k).$$

C'est là une généralisation de la dualité de Serre sur une variété X lisse et propre de dimension n sur k, auquel cas $K_X^{\bullet}$ est une résolution de $\Omega^n_{X/k}[n]$.

Cette théorie a été développée par Hartshorne ([RD]) (voir aussi Deligne [3] et Verdier [25]) dans un cadre général (pour un morphisme propre), où l'on trouve de plus la description détaillée du complexe résiduel.

La notion de résidu est intimement liée à la différentielle du complexe $K_X^{\bullet}$ et la construction de ce dernier étant acquise, on possède une notion de résidu sur une variété quelconque et pour un morphisme de variétés (voir § 1).

Rosenlicht a défini pour une courbe X réduite, un faisceau $\omega_{X/k}$ de formes régulières à l'aide de la notion de résidu sur la désingularisée X' de X [21] :

$$w \in \omega_{X,x} \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{O}_{X,x}\ ,\ \Sigma\, \mathrm{Rés}_{x'} fw = 0 \text{ pour } x' \text{ au-dessus de } x.$$

Ce faisceau se révèle être actuellement un complexe dualisant.

On démontre que le morphisme trace pour une désingularisation est surjectif sur les complexes résiduels. Il est possible aussi de donner la définition d'un résidu sur une variété X non nécessairement lisse et de l'exprimer à l'aide des symboles résidus de Grothendieck sur la désingularisée.

A part le théorème de dualité, on peut appliquer le complexe résiduel à la construction d'une classe fondamentale d'un cycle. Il s'agit là d'un principe général ([18] et [11], p. 359) qui dit que l'anneau de Chow $A^{\bullet}(X)$ d'une variété lisse X est un "objet cohomologique initial", c'est-à-dire que pour toute théorie cohomologique $H^{\bullet}(X)$, il existe un morphisme canonique $C_X : A^{\bullet}(X) \to H^{\bullet}(X)$.

On construit au § II l'hyperhomologie de De Rham $\mathbb{H}_*(X)$ égale à la cohomologie du complexe simple associée à $K_X^{\bullet,*} = \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega_X^*,K^{\bullet}_X)$, elle est munie d'un morphisme canonique dans l'homologie de De Rham de X, et se trouve liée à celle de Hodge de X ; ce qui nous permettra de construire pour toute variété une classe fondamentale sans utiliser un espace ambiant lisse.

Grothendieck a déjà signalé ce complexe double $K_X^{\bullet,*}$ dans une note de bas de page dans [12] ; Hartshorne l'a utilisé dans [27], nous l'avons fait indépendamment dans la préparation de la thèse ([6], et [T]).

On construit au § III la classe fondamentale d'un cycle respectivement dans l'hyperhomologie de De Rham, l'homologie de De Rham et celle de Hodge. On démontre la compatibilité du produit d'intersection des cycles et le cup-produit en cohomologie. Ce paragraphe est une version améliorée de l'article [5].

De plus, on traite au § IV le problème de la classe fondamentale dans le cas relatif. Etant donné un morphisme $f : X \to S$, on lui associe canoniquement une classe $C_{X/S}$ qui vérifie "la propriété de la trace", dans le cas d'une intersection complète relative locale. Si S n'est pas normale, cette classe n'existe pas nécessairement pour f équidimensionnel. Dans l'Appendice, on démontre l'existence pour f de Tor-dimension finie.

Cet article est une rédaction allégée d'une partie de ma thèse présentée en 1976 à l'Université Paris VII, sous la direction de J.L. Verdier qui m'a aidé à dégager les idées centrales dans ce travail tel le complexe double et son application à l'hyperhomologie et la propriété de la trace. Je lui suis reconnaissant, aussi bien qu'à C. Houzel, qui a suivi mes efforts dès le début.

*
* *

I.- RESIDUS ET COMPLEXE RESIDUEL

1.0.- NOTATIONS ET RAPPELS

On va donner ici un aperçu des résultats dans ([RD]) qui nous intéressent. On utilisera les mêmes notations et la même terminologie.

Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini entre deux schémas localement noethériens, le complexe dualisant $D^{\bullet}_{X/S}$ est un objet de la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_X$-Modules à cohomologie cohérente, c'est-à-dire un complexe de $\mathcal{O}_X$-Modules, dont les faisceaux de cohomologie sont cohérents, et que l'on considère à quasi-isomorphisme près. Si f est lisse de dimension relative n, $D^{\bullet}_{X/S}$ est quasi-isomorphe à $\Omega^n_{X/S}[n]$ (le complexe nul en tout degré $\neq -n$ est égal à $\Omega^n_{X/S}$ en degré $-n$).

Si f se compose d'un morphisme fini $h : X \to Y$ et d'un morphisme lisse $Y \to S$, alors $h_* D^{\bullet}_{X/S} \simeq \underline{\underline{R}}\ \underline{\mathrm{Hom}}(h_* \mathcal{O}_X, \Omega^n_{Y/S}[n])$.

Ces définitions ont un sens grâce à l'<u>isomorphisme Résidu</u> :

<u>Théorème</u>.- Soit
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & S \end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif où f et h sont finis et g est lisse de dimension relative n. Alors on a :

$$\underline{\underline{R}}\ \underline{\mathrm{Hom}}_S(f_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) \simeq \underline{\underline{R}}\ g_* \underline{\underline{R}}\ \underline{\mathrm{Hom}}_Y(h_* \mathcal{O}_X, \Omega^n_{Y/S}[n])$$

Par exemple, si X est définie dans Y par une suite régulière $t_1,\dots,t_n \in \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)$ et $w \in \Gamma(Y,\Omega^n_{Y/S})$, l'isomorphisme Résidu agit ainsi :

$$\mathrm{Hom}_S(f_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) \simeq \mathrm{Ext}^n_Y(\mathcal{O}_X,\Omega^n_{Y/S})$$
$$a \to \mathrm{Rés}\begin{bmatrix} \tilde{a}\, w \\ t_1\dots t_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} w \\ t_1\dots t_n \end{bmatrix}$$

où à droite le symbole correspond à un élément de Ext^n calculé à l'aide du complexe de Koszul sur $t_1,\dots,t_n$; et à gauche $\tilde{a}$ est une section de $\mathcal{O}_Y$ qui relève a, et le Résidu est celui de Grothendieck dans(([RD]).

Noter que si $\widehat{\mathcal{O}_{Y,X}} = A[[t_1,\dots,t_n]]$ et $w = \Sigma\, b_{i_1\dots i_n} t_1^{i_1}\dots t_n^{i_n} dt_1\wedge\dots\wedge dt_n$

alors $\text{Rés}\begin{bmatrix} \vdots & w \\ t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} \end{bmatrix} = \text{Rés}\left(\frac{w}{t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}}\right) = b_{\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1}$.

Le complexe Résiduel : Supposons X lisse de dimension relative n sur un corps k, le complexe résiduel $K_X^{\bullet}$ de X est le complexe de Cousin de $\Omega^n_{X/k}[n]$, concentré sur l'intervalle $[-n,0]$. On le construit ainsi : pour un point x de X et un $\mathcal{O}_X$ - Module F, $\Gamma_x F$ désigne le groupe des germes de sections de F au voisinage de x, à support dans $\bar{x}$ l'adhérence de x, le $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé associé est $H^i_x(F)$. Pour un groupe G on note $i_x G$ (ou parfois G simplement) le faisceau constant sur $\bar{x}$ égal à G, et nul ailleurs ; $cd_X(x)$ est la codimension de $\bar{x}$ dans X. Alors pour tout $j \in [0,n]$, on a : $K_X^{j-n} \simeq \sum_{cd_X(x)=j} i_x H^j_x(\Omega^n_X)$.

Pour tout faisceau F localement libre de rang m le complexe $K_X^{\bullet}(F) = K_X^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega^n_X)^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} F[-n]$ est une résolution par des faisceaux quasi-cohérents injectifs.

Soit maintenant $i : Y \to X$ une immersion fermée, alors $K_Y^{\bullet}$ est isomorphe à : $i^! K_X^{\bullet} = i^* \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(i_* \mathcal{O}_Y, K_X^{\bullet})$. Pour tout $j \in [0,n]$, $K_Y^{j-n} = \sum_{cd_X(x)=j} i_x \text{ Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x}, H^j_x(\Omega^n_X))$.

Si Y est de codimension pure p, $K_Y^{\bullet}$ est concentré sur les degrés $[-n+p,0]$, donc $\underline{\text{Ext}}^i(\mathcal{O}_Y,\Omega^n_X) = 0$ pour $i < p$ et $\underline{\text{Ext}}^p(\mathcal{O}_Y,\Omega^n_X) \simeq \underline{H}^{-n+p}(K_Y^{\bullet})$ s'injecte dans $K_Y^{-n+p} = \sum_{cd_Y(y)=0} i_x \text{ Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y},\Omega^n_{X,y})$.

Enfin si $Z' \subset Z$ sont deux sous-espaces fermés de X, le foncteur $\underline{H}^*_{Z/Z'}(*)$ désigne la cohomologie à support dans Z modulo Z'. On souligne un symbole, par exemple $\underline{\text{Hom}}$, $\underline{\text{Ext}}$ pour désigner le faisceau associé. Les lettres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ désignent l'idéal maximal d'un anneau local, et lg la longueur. Le dual d'un faisceau $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F}^{\vee}$.

Dans la suite on va décrire la différentielle de $K_X^{\bullet}$ et sa relation avec le Résidu. On démontre aussi la surjectivité de la trace pour une désingularisation.

1.1.- CALCUL DE LA DIFFERENTIELLE DU COMPLEXE D'UNE VARIETE X LISSE

1.1.1.- Soit Z. la filtration de X par la codim. ($Z_i = \{x \in X : cd_X(x) \geq i\}$). Le complexe de Cousin $K_X^{\bullet}(\mathcal{O}_X)$ de $\mathcal{O}_X$, égal en degré i à $\underline{H}^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathcal{O}_X) \simeq \sum_{cd(x)=i} i_x H^i_x(\mathcal{O}_X)$ ([RD] ch.IV var.6.F.), est dualisant sur X. Sa différentielle se déduit du morphisme de connexion $\delta : \underline{H}^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathcal{O}_X) \to \underline{H}^{i+1}_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}(\mathcal{O}_X)$ ([RD] Prop.2.5,p.235).

Soient x un point de X et $(f_1,\dots,f_i)$ un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ (nécessairement une suite régulière), les idéaux $(I_x^{(n)} = (f_1^n,\dots,f_i^n))_{n\in N}$ alternent avec les puissances de l'idéal maximal $(\mathfrak{m}_x^n)_{n\in N}$. Le complexe de Koszul de la suite $(f_1,\dots,f_i)$ nous donne l'isomorphisme suivant :

$$H_x^i(\mathcal{O}_X) \simeq \varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}/(f_1^n,\dots,f_i^n), \mathcal{O}_{X,x}) \simeq \varinjlim_n \mathcal{O}_{X,x}/(f_1^n,\dots,f_i^n)$$

où la limite inductive est considérée pour la multiplication par $f_1^m \times\dots\times f_i^m$ pour les indices n et n + m.

Dans la suite, si A est un anneau, M un A-module, et $f_1,\dots,f_i$ dans A, on dénote l'image d'un élément $\bar{a} \in M/(f_1^r,\dots,f_i^r)$ dans $\varinjlim_n M/(f_1^n,\dots,f_i^n)$ par le symbole $\begin{bmatrix} a \\ f_1^r,\dots,f_i^r \end{bmatrix}$.

1.1.2.- <u>Réduction au cas d'une courbe de Gorenstein</u>

Soient x un point de X de codimension i, et $y \in \bar{x}$ de codimension i+1 dans X. On peut trouver des éléments $f_1,\dots,f_i \in \mathcal{O}_{X,y}$ qui forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ et un élément $f_{i+1} \in \mathcal{O}_{X,y}$ tel que $(f_1,\dots,f_i,f_{i+1})$ forment aussi un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$. Les sous-variétés fermées Z_r définies par $(f_1^r,\dots,f_i^r)$ sont des intersections complètes dans un voisinage affine de x dans X, qu'on suppose égal à X pour simplifier ; le point x est égal à l'un des points génériques $(x_t)_{t\in[0,h]}$, des composantes irréductibles de Z_r, par exemple $x = x_o$.

On va expliciter le morphisme $\delta : H_x^i(\mathcal{O}_X) \to H_y^{i+1}(\mathcal{O}_X)$, induit par la différentielle de $K_X^\bullet(\mathcal{O}_X)$.

Proposition.- Avec les notations ci-dessus, les sous-variétés Z_r *sont de Gorenstein Soient* $A_{x_s,r} = \mathcal{O}_{X,x_s}/(f_1^r,\dots,f_i^r)$ *et* $A_{y,r} = \mathcal{O}_{X,y}/(f_1^r,\dots,f_i^r)$*, le complexe :*

$$K_r^\bullet : \sum_{s\in[0,h]} A_{x_s,r} \xrightarrow{P_r} \Big(\sum_{s\in[0,h]} A_{x_s,r}\Big)/A_{y,r}$$

où P_r *désigne la projection canonique, est dualisant sur* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z_r,y})$. *Il existe des isomorphismes canoniques* β^o *et* β^1 *qui rendent le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{r} \sum A_{x_s,r} & \xrightarrow{\varinjlim_{r} P_r} & \varinjlim_{r}(\sum A_{x_s,r})/A_{y,r} \\ \wr\big\downarrow \beta_o & & \wr\big\downarrow \beta_1 \\ H^i_x(\mathcal{O}_X) \subset \sum\limits_{s\in[0,h]} H^i_{x_s}(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\delta_X} & H^{i+1}_{y}(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

Corollaire.- Soient $x \in X$ *un point de* codim i, *des éléments* $f_1,\dots,f_i$, $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ *et une forme* $w \in \Gamma\, \Omega^n_X$. *Dans la suite, la notation symbolique* $[f_1\dots f_i]$ *suppose implicitement que la suite* $f_1,\dots,f_i$ *est régulière. Alors la différentielle* δ_X *de* $K^{\bullet}_X$ *opère comme suit :*

$$\delta_X\left(\begin{bmatrix} w/g \\ f_1\dots\dots f_i \end{bmatrix}\right) = (-1)^n \begin{bmatrix} w \\ f_1\dots\dots f_i g \end{bmatrix} .$$

Le signe provenant du décalage dans les degrés est égal à dim X.

1.2.- LE MORPHISME RESIDU

1.2.1.- Soit X une variété algébrique de dimension pure n sur un corps k, de complexe résiduel $K^{\bullet}_X$. Si Z est une sous-variété fermée de X, le sous-complexe $\underline{\Gamma}_Z K^{\bullet}_X$ est formé des sections de $K^{\bullet}_X$ à support dans Z ; on note $P_Z : K^{\bullet}_X \to \underline{\Gamma}_Z K^{\bullet}_X$ la projection canonique qui est simplement un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules gradués, et $\delta_Z = P_Z \circ \delta$ la restriction sur Z de la différentielle δ de $K^{\bullet}_X$.

On dit qu'une suite décroissante $S. = (S_j)_{j\in[1,j]}$ de sous-variétés fermées est pure si S_j est de codimension pure j dans X pour tout $j \in [1,h]$. On désigne par $\delta_{S.} : K^{\bullet}_X \to \underline{\Gamma}_{S_h} K^{\bullet}_X$ le morphisme composé : $\delta_{S_h} \circ\dots\circ \delta_{S_j} \circ\dots\circ \delta_{S_1}$.

Définition.- Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *les points de* codimension zéro *dans* X ; *il existe un morphisme canonique* $C_X : \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \Omega^n_{X/k,x} \to \sum\limits_{\lambda} J(x_\lambda)$[*voir* § III,N°4.1].

On appelle résidu d'une forme différentielle rationnelle $\omega \in \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \Omega^n_{X,x_\lambda}$ *et on note* $\text{Rés}_{S.}(\omega)$ *la section de* $\underline{\Gamma}_{S_h} K^{-n+h}_X$ *égale à* $\delta_{S.} \circ C_X(\omega)$.

1.2.2.- Soient $f : X \to Y$ un morphisme de type fini de préschémas localement noethériens de dimension relative bornée, et $S. = (X \supset S_1 \dots \supset S_h)$ une suite pure de longueur h dans X.

Définition : i) Pour tout ouvert quasi-compact U *de* Y, *et tout élément* $\omega \in \Gamma(f^{-1}U, K_X^{\bullet})$ *l'élément* $\delta_{S.}(\omega)$ *est une section de* $\underline{\Gamma}_{S_h}(f^{-1}U, K_X^{\bullet})$. *On définit :*

$$\mathrm{Rés}_{S.}^{f}(\omega) = \mathrm{Tr}\, f \circ \delta_{S.}(\omega)$$

(ce n'est pas un morphisme de complexes).

ii) Si de plus Y *est une variété algébrique sur un corps* k, *et* X *de dimension pure* n, *de points génériques* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *; on appelle résidu d'une forme différentielle* $\omega \in \sum_{\lambda \in \Lambda} \Omega^n_{X,x_\lambda}$ *en* S. *sur* Y, *l'élément* $\mathrm{Rés}^f_{S.}(\omega)$ *obtenu en appliquant à* ω *le morphisme composé* $\mathrm{Rés}^f_{S.} \circ C_X$ *où* $C_X : \sum_{\lambda \in \Lambda} \Omega^n_{X,x} \to K_X^{\bullet}$ *désigne le morphisme canonique.*

Remarque.- i) Cette définition du résidu contient le cas d'un morphisme non lisse; par exemple le cas d'une variété singulière.

ii) Si S_h n'a pas de composante génériquement finie sur Y, le résidu de ω en S. sur Y est nul.

iii) Si Y est de dimension pure n-h sur k, de points génériques $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, le résidu $\mathrm{Rés}^f_{S.}(\omega)$ appartient à $\sum_{\gamma \in \Gamma} J(y_\gamma)$, si de plus Y est réduit, il est dans $\sum_{\gamma \in \Gamma} \Omega^{n-h}_{Y/k,y}$.

Dans ce cas, on s'intéresse au symbole résidu d'une forme $\omega \in \Gamma\, \Omega^n_X$ non relative, c'est une forme différentielle sur Y.

Exemple.- Soit X une variété lisse, de dimension n sur k, une suite localement régulière $f_1,\dots,f_h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, la suite $S. = \{(S_i)_{i \in [1,h]}$ où $S_i = V(f_1,\dots,f_i)\}$ est pure. Pour tout $\omega \in \Gamma\, \Omega^n_X$, le résidu $\mathrm{Rés}_{S.}(\frac{\omega}{\pi_i f_i}) \in H^h_{S_h}(X,\Omega^n_X)$ est représenté par le symbole $(-1)^{nh}[f_1,\overset{\omega}{\dots},f_h]$. On écrit aussi $\mathrm{Rés}_{f_1,\dots,f_h}$ au lieu de $\mathrm{Rés}_{S.}$.

1.3.- SURJECTIVITE DE LA TRACE

1.3.1.- Supposons X lisse et soit z un point de Y. On peut construire un morphisme g défini sur un voisinage V de z dans Y, dans l'espace affine Λ^p à p dimensions, tel que g induise sur $\overline{Z} \cap V$ un morphisme fini et dominant.

Soient un nombre fini de points $(x_i)_{i \in I}$ de codim n-p dans X, fermés dans la fibre X_z, un symbole $\beta = \sum_i \beta_i = \sum \begin{bmatrix} \omega_i \\ f_{1,i},\ldots,f_{n-p,i} \end{bmatrix} \in \sum H^{n-p}_{x_i}(\Omega^n_X)$, et t le point générique de Δ^p. Si on représente $J(z)$ par $\lim_n \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{m}_z^n, \Omega^p_{\Delta^p,t})$, la trace :

Tr $f(\beta)$ est le morphisme qui fait correspondre $\sum_i \mathrm{Rés}^{g\circ f}_{x_i} \begin{bmatrix} b\omega_i \\ f_{1,i},\ldots,f_{n-p,i} \end{bmatrix} \in \Omega^p_{\Delta^p,t}$

à tout élément $b \in \mathcal{O}_{Y,z}$. De plus, si car(k) = 0, le morphisme $g \circ f$ est lisse aux points x_i.

1.3.2.- *Proposition.- Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme fini de variétés algébriques* $f^* : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ *son comorphisme ; le morphisme* Tr $f : f_*K^\bullet_X \to K^\bullet_Y$ *est surjectif si et seulement si* ker f^* *est nul.*

Lemme 1.- Soit $f : X \to Y$ *un morphisme propre de variétés algébriques ; le morphisme* Tr $f : f_*K^\bullet_X \to K^\bullet_Y$ *est surjectif si et seulement si pour tout* $z \in Y$ *le morphisme* Tr $f : \sum_{x \text{ fermé dans } X_z} J(x) \to J(z)$ *est surjectif.*

Lemme 2.- Sous les hypothèses du lemme 1 :

i) une condition nécessaire pour que Tr f *soit surjectif est que* f *soit surjectif et si* I_x *désigne le noyau de* $f^*_{z,x} : \mathcal{O}_{Y,z} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *pour* x *fermé dans* X_z*, l'idéal* $I_z = \bigcap_x I_x$ *soit nul pour tout* $z \in Y$.

ii) une condition suffisante pour que Tr f *soit surjectif est que pour tout* $z \in Y$ *la topologie* $\mathfrak{m}_z$ *adique de* $\mathcal{O}_{Y,z}$ *soit induite par les topologies* $\mathfrak{m}_x$ *adiques de* $\mathcal{O}_{X,x}$ *pour* x *fermé dans* X_z.

Démonstration.-

i) Soit k_o un corps dans $\mathcal{O}_{Y,z}$ tel que le corps résiduel $k(z)$ soit fini sur k_o, $J(z)$ s'identifie à $\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{k_o}(\frac{\mathcal{O}_{Y,z}}{\mathfrak{m}_z^n}, k_o)$ respectivement $J(x)$ à $\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n, k_o)$, car le corps résiduel $k(x)$ est fini sur $k(z)$.

Le morphisme trace est induit par le morphisme $f^*_{z,x} : \mathcal{O}_{Y,z} \to \mathcal{O}_{X,x}$

Supposons $I_z \neq 0$ et soit $a \in I_z \subset \mathcal{O}_{Y,z}$, $\exists\, n \in \mathbb{N} : a \notin \mathfrak{m}_z^n$, soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{m}_z^n, k_o)$ tel que $\phi(a) \neq 0$, ϕ ne peut pas appartenir à l'image de la trace car pout tout $\psi \in \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n, k_o)$, on a :

$$(\mathrm{Tr}\ f(\psi))(a) = \psi(f_{z,x}(a)) = 0$$

ii) Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{M}_z^r, k_o)$, $\exists\ x \in X_z$ fermé, et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq r$ tel que l'on ait:

$$N_x^p = f_{z,x}^{*-1}(\mathfrak{M}_x^p) \subset \mathfrak{M}_z^r$$

soit $q : \mathcal{O}_{Y,z}/N_x^p \to \mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{M}_z^r$ la projection, la forme linéaire $\phi \circ q$ définie sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{O}_{Y,z}/N_x^p$ de $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x^p$ se prolonge en $\psi \in \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x^p, k_o)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{M}_z^r \arrow[r, "\phi"] & k_o \\
\mathcal{O}_{Y,z}/N_x^p \arrow[u, "q"] \arrow[ur, "\phi \circ q"] \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x^p \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

Alors $(\mathrm{Tr}\ f)(\psi) \in \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{M}_z^p, k_o)$ est égal à ϕ dans $\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{k_o}(\mathcal{O}_{Y,z}/\mathfrak{M}_z^n, k_o)$

<u>*Théorème*</u>.- *Soient* X *une variété algébrique réduite, et* $f : X' \to X$ *un morphisme propre et surjectif. Le morphisme* $\mathrm{Tr}\ f : f_* K^{\bullet}_{X'} \to K^{\bullet}_X$ *est surjectif.*

<u>*Corollaire*</u>.- *Si* $f : X' \to X$ *est une désingularisée de* X, *la trace de* f *est surjective.*

<u>Démonstration du théorème</u>.- On se ramène au cas où X' est réduit (car si la trace est surjective pour $K^{\bullet}_{X'_{\text{réd}}}$, elle l'est nécessairement pour $K^{\bullet}_{X'}$).
Soient $\pi' : \tilde{X}' \to X'$ et $\pi : \tilde{X} \to X$ les normalisées respectives, il existe un morphisme $\tilde{f}: \tilde{X}' \to \tilde{X}$ tel que $\pi \circ f$ soit égal à $f \circ \pi'$; le morphisme $\mathrm{Tr}\ \pi$ étant surjectif d'après la proposition précédente, on se ramène à démontrer que $\mathrm{Tr}\ \tilde{f}$ est surjectif
Revenons aux notations du théorème avec X' réduit et X normal. Pour tout point $x \in X$, il existe $x' \in X'$ au-dessus de x et fermé dans la fibre X'_x tel que le morphisme $f^* : \mathcal{O}_{X,f(x')} \to \mathcal{O}_{X',x'}$ soit injectif.

Alors on peut appliquer le lemme suivant de Zariski :

<u>*Lemme*</u>.- *(EGA N° 24, ch.IV, cor.2.3.8). Soient* A *et* B *deux anneaux locaux noethériens d'idéaux maximaux* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ *respectivement. Soient :*

i) un homomorphisme local injectif $\phi : A \to B$

ii) B *est une algèbre essentiellement de type fini sur* A *(la localisée d'une algèbre de type fini).*

iii) Le complété $\hat{A}$ *de* A, *pour la topologie* $\mathfrak{n}$ *adique, est intègre (c'est le cas d'une algèbre de type fini sur un corps* k, *intègre et intégralement close).*

Alors la topologie $\mathfrak{n}$ *adique de* A *est induite par la topologie* $\mathfrak{n}$ *adique de* B.

Ce lemme permet de vérifier que la condition du lemme 2 ii) est vérifiée et par conséquent que la trace est surjective.

Remarque.- On a ainsi une construction du complexe résiduel d'une variété X réduite comme quotient de l'image directe de celui d'une désingularisée de X par un sous-complexe, noyau de la trace, qui peut être défini directement par la relation de la proposition 1.3.1.

II.- L'HYPERHOMOLOGIE DE DE RHAM

On définit dans ce paragraphe l'hyperhomologie de De Rham $\mathbb{H}.(X)$ d'une variété X, qui est covariante pour les morphismes propres, qui est duale à l'hyperhomologie de De Rham si X est propre, et qui s'envoie par un morphisme canonique dans l'homologie de De Rham et se trouve liée à celle de Hodge de X. Elle nous intéresse particulièrement pour définir au § III la classe fondamentale d'un cycle sans utiliser l'espace ambiant lisse. Enfin, si X est une sous-variété fermée d'une variété lisse T, l'homologie de De Rham de X est isomorphe à l'hyperhomologie de T à support dans X.

2.1.- LE COMPLEXE DOUBLE $K_X^{\cdot,*}$

2.1.1.- Définitions.- Soit X une variété algébrique, on considère le $\mathcal{O}_X$-module bigradué $K_X^{\cdot,*} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^*, K_X^\cdot)$.

Pour tout morphisme propre de variétés $f : X \to Z$, on définit le morphisme $\mathrm{Tr}\, f : f_* K_X^{\cdot,*} \to K_Z^{\cdot,*}$ par composition avec le morphisme canonique : $\Omega_Z^* \to f_* \Omega_X^*$ et le morphisme trace : $f_* K_X^\cdot \to K_Z^\cdot$.

Proposition.- i) Avec les notations précédentes, si on suppose la variété X *lisse il existe sur* $K_X^{\cdot,*} = \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega_X^*, K_X^\cdot)$ *une structure de double complexe qui en fait une résolution injective canonique du complexe de De Rham* $\Omega_X^\cdot$.

ii) Si $\mathrm{car}(k) = 0$, *pour tout morphisme propre* $f : X \to X'$ *de variétés lisses, le morphisme* $\mathrm{Tr}\, f : f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega_X^*, K_X^\cdot) \to \mathrm{Hom}_{X'}(\Omega_{X'}^*, K_{X'}^\cdot)$ *commute aux différentielles partielles.*

Démonstration.- i) Le complexe simple $\underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega_X^i, K_X^\cdot) \simeq K_X^\cdot \otimes (\Omega_X^i)^\vee$ est isomorphe au complexe de Cousin de $\Omega_X^{n-i}[n]$; c'est une résolution injective de $\Omega_X^{n-i}[n]$. On obtient l'une des différentielles δ' de $K_X^{\cdot,*}$ par simple composition avec celle δ de $K_X^\cdot$. On déduit l'autre différentielle d' de celle d de $\Omega_X^\cdot$, ainsi : le module $\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega_X^i, K_X^{-n+j})$ est isomorphe à $\sum_{x : cd_X(x) = j} i_x H_x^j(\Omega_X^{n-i})$ et on prend :

$$d'^{-n+j,+i} = H_x^j(d) : H_x^j(\Omega_X^{n-i}) \to H_x^j(\Omega_X^{n-i+1}).$$

Soit Z. la filtration de X par la codimension $(Z_j = \{x \in X, cd_X(x) = j\})$; on voit sur le diagramme suivant que $\delta' \circ d' = d' \circ \delta'$, où δ' apparaît comme un morphisme de connexion.

$$\begin{array}{ccc} \underline{H}^{j}_{Z_j/Z_{j+1}}(\Omega^{\ell}_X) & \xrightarrow{\delta'} & \underline{H}^{j+1}_{Z_{j+1}/Z_{j+2}}(\Omega^{\ell}_X) \\ \underline{H}^{j}_{Z_j/Z_{j+1}}(d) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \underline{H}^{j+1}_{Z_{j+1}/Z_{j+2}}(d) \\ \underline{H}^{j}_{Z_j/Z_{j+1}}(\Omega^{\ell+1}_X) & \xrightarrow{\delta'} & \underline{H}^{j+1}_{Z_{j+1}/Z_{j+2}}(\Omega^{\ell+1}_X) \end{array}$$

<u>Calcul de d'</u>.- Soient x un point de codimension j dans X, un système de paramètres $(f_1,\dots,f_j)$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, et le recouvrement $\mathcal{U}$ de $V-\{x\}$, où $V = sp(\mathcal{O}_{X,x})$, formé des ouverts $D(f_\ell)_{\ell\in[1,j]}$. Le morphisme de connexion : $H^{j-1}(V-\{x\},\Omega^{\ell}_V) \to H^j_x(\Omega^{\ell}_V)$ est surjectif pour j = 1, et bijectif pour j > 1, il est explicité dans (EGA N°11, ch.III, 1.2). Ainsi la différentielle d' correspond à $\check{d} : \check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\Omega^{\ell}_V) \to \check{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\Omega^{\ell+1}_V)$ le symbole $\begin{bmatrix} \omega \\ f_1^n\dots f_j^n \end{bmatrix} \in H^j_x(\Omega^{\ell}_X)$ correspond à la classe de cohomologie de $(\frac{\omega}{f_1^n\dots f_j^n}) \in \check{C}^{j-1}(\mathcal{U},\Omega^{\ell}_V)$ et $d'\begin{bmatrix} \omega \\ f_1^n\dots f_j^n \end{bmatrix}$ à $\check{d}(\frac{\omega}{f_1^n\dots f_j^n})$. On en déduit : $d'\begin{bmatrix} \omega \\ f_1^n\dots f_j^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_1^n\dots f_j^n)d\omega - d(f_1^n\dots f_j^n)\wedge\omega \\ f_1^{2n}\dots\dots f_j^{2n} \end{bmatrix}$

<u>Démonstration</u>.- ii) Le morphisme Tr f commute avec δ pour les complexes simples ([RD], p.335) ; on en déduit facilement que Tr f commute avec δ' pour les complexes doubles.

Tr f <u>commute avec</u> d' (<u>pour</u> f <u>non nécessairement propre</u>) :

<u>1er cas</u> : $f : X \to X'$ <u>est lisse de dim. relative</u> n-n' <u>où</u> dim X' = n'.

Soient x un point de codim j dans X, fermé dans sa fibre, d'image x' de codim j' = j+n'-n dans X', et un système d'éléments (u_i) pour $i\in[1,n-n']$ qui induit sur la fibre de X en x' un système régulier de paramètres au point x. Les différentielles (du_i) pour $i\in[1,n-n']$ forment une base de $\Omega^1_{X/X',x}$.

Soient $(t'_h) \in \mathcal{O}_{X',x'}$ pour $h\in[1,n']$ tels que les différentielles (dt'_h) forment une base de $\Omega^1_{X',x'}$ et tels que (t'_h) pour $h\in[1,j']$ forment un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X',x'}$.

La famille $(t_h = f^*(t'_h), u_i)$ pour $h\in[1,n']$ et $i\in[1,n-n']$ a pour différentielles une base de $\Omega^1_{X,x}$, et contient un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ obtenu pour $h\in[1,j']$ et $i\in[1,n-n']$. Pour un élément $g\in\mathcal{O}_{X,x}$, on note $\frac{\partial g}{\partial t_h}$ la composante de la différentielle dg sur l'élément de base dt_h, et pour une forme

$$\varphi = g(\bigwedge_{h\in S} dt_h) \wedge (\bigwedge_{i\in S_1} du_i) \in \Omega^{\cdot}_{X,x} \text{ où } S \subset [1,n'] \text{ et } S_1 \subset [1,n-n'] \text{, on pose :}$$

$$\partial\varphi/t_k = \partial g/t_k(\bigwedge_{h\in S} dt_h) \wedge (\bigwedge_{i\in S_1} du_i) .$$

La sous-variété $Z = V(u_1,\dots,u_{n-n'})$ définie au voisinage de X est quasi-finie sur un voisinage de x' dans X'. L'anneau complété $\mathcal{O}_{X,x}$ est fini sur $\mathcal{O}_{X',x'}$, ce qui permet de considérer le symbole résidu de Grothendieck dans le lemme suivant :

<u>Lemme</u>.- *Avec les notations précédentes, soit* $\omega \in \Omega^{n-n'}_{X/X',x}$ *, on a :*

$$d(\mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} \omega \\ u_1^m\dots u_{n-n'}^m \end{bmatrix}) = {}_{h\quad 1,n'} \quad \mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} \partial/\partial t_h \\ u_1^m\dots u_{n-n'}^m \end{bmatrix} dt'_h$$

<u>Démonstration du lemme</u>.- Soit k' le corps résiduel au point x' et k" celui du point x puisque car(k) = 0, on peut se ramener à faire la démonstration dans le cas du morphisme injectif : $k'[[T_1,\dots,T_{j'}]] \to k''[[T_1,\dots,T_{j'},U_1,\dots,U_{n-n'}]]$.

D'après [2], $\mathrm{Rés}\begin{bmatrix} g(T_i,U_j)dU_1\wedge..dU_{n-n'} \\ U_1^m\dots U_{n-n'}^m \end{bmatrix}$ est égal à $\mathrm{Tr}_{k''[[T_i]]/k'[[T_i]]}$ du coefficient de $U_1^{m-1}\times\dots\times U_{n-n'}^{m-1}$ dans g, et on en déduit facilement le lemme.

On peut aussi raisonner de la manière suivante :

Soient K' le corps des fonctions rationnelles de X' et $\overline{K}'$ sa clôture algébrique. Puisque car(k) = 0, $\overline{K}'$ est séparable sur K', et pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\Omega^i_{X',x'} \otimes \overline{K}' \simeq \Omega^i_{\overline{K}'/k}$, ce qui permet de remplacer X' par le spectre d'un corps algébriquement clos en effectuant le changement de base $\mathrm{Spec}(\overline{K}') \to X'$ et puis de se ramener au cas du morphisme : $\overline{K}' \to \overline{K}'[[U_1,\dots,U_{n-n'}]]$.

<u>Revenons à la proposition</u> : on a d'après la suite exacte $0 \to f^*\Omega^1_{X'} \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X/X'} \to 0$ un isomorphisme (non canonique) : $\Omega^{n-h}_{X,x} \simeq \sum_{k\leq n'} \Omega^k_{X',x'} \otimes \Omega^{n-h-k}_{X/X',x}$; une forme $\omega \in \Omega^{n-h}_{X,x}$ se met sous la forme $\sum_{k\leq n'} \sum_{\sigma\in M} \omega'_{k,\sigma} \otimes \omega_{n-h-k,\sigma}$ où M est un ensemble fini d'indices, $\omega'_{k,\sigma} \in \Omega^k_{X'x'}$ et $\omega_{n-h-k,\sigma} \in \Omega^{n-h-k}_{X/X',x}$; on suppose aussi $\omega'_{k,\sigma}$ de la forme $\sum dt_{i_1}\wedge\dots\wedge dt_{i_k}$ et $\omega_{n-h-k,\sigma}$ de la forme $\sum b\, du_{\alpha_1}\wedge\dots\wedge du_{\alpha_{n-h-k}}$ et la composante dans $\Omega^{n'-h}_{X',x'} \otimes \Omega^{n-n'}_{X/X',x}$ de la forme $\omega'_{n'-h} \otimes \omega_{n-n'}$. On a alors :

$$d\omega = \sum_{k,\sigma}\Big[\sum_h dt_h \wedge \omega'_{k,\sigma} \wedge \partial/\partial t_h(\omega_{n-h-k,\sigma}) + \sum_i du_i \wedge \omega'_{k,\sigma} \wedge \partial/\partial u_i(\omega_{n-h-k,\sigma})\Big]$$

Soit le symbole $\psi = \begin{bmatrix} \omega \\ \\ u_i^m, t_\ell^m \ldots \end{bmatrix} \in H_x^j(\Omega_X^{n-h})$ où $i \in [1,n-n']$ et $\ell \in [1,j']$, on va calculer $\mathrm{Tr}\, f \circ d'$ et $d' \circ \mathrm{Tr}\, f$ de ψ.

<u>d' ∘ Tr f</u>

$$\mathrm{Tr}\, f(\psi) = \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} \omega_{n-n'} \\ \\ \ldots u_i^m \ldots \end{bmatrix} \omega'_{n'-h} \\ \\ \ldots\ldots\ldots t'^m_\ell \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \in H^{j'}_{x'}(\Omega^{n'-h}_{X'}) \qquad \text{par un calcul simple}$$

$$d' \circ \mathrm{Tr}\, f(\psi) = \begin{bmatrix} d\left(\mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} \omega_{n-n'} \\ \\ \ldots\ u_i^m \ldots \end{bmatrix} \omega'_{n'-h}\right) \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots t'^m_\ell \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} - \sum_s m \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} \omega_{n-n'} \\ \ldots u_i^m \ldots \end{bmatrix} dt'_s \wedge \omega'_{n'-h} \\ \\ \ldots t'^m_\ell \ldots, t'^{m+1}_s, \ldots \end{bmatrix} = \mathrm{I}-\mathrm{II}$$

<u>Tr f ∘ d'</u>

$$d'(\psi) = \begin{bmatrix} d\omega \\ \\ u_i^m, \ldots, t_\ell^m \ldots \end{bmatrix} - \sum_s m \begin{bmatrix} du_s \wedge \omega \\ \\ u_i^m \ldots, u_s^{m+1}, \ldots, t_\ell^m \ldots \end{bmatrix} - \sum_s m \begin{bmatrix} dt_s \wedge \omega \\ \\ u_i^m \ldots, t_\ell^m \ldots, t^{m+1} \ldots \end{bmatrix}$$

On va transformer les trois parties du second membre :

1) D'après le lemme, on a :

$$\mathrm{Tr}\, f \begin{bmatrix} d\omega \\ \\ \ldots u_i^m, t_\ell^m \ldots \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} \partial/\partial_{t_k}(\omega_{n-n'}) \\ \\ \ldots\ u_i^m \ \ldots \end{bmatrix} dt'_k \wedge \omega'_{n'-h} \\ \\ t'^m_1 \ldots\ldots t'^m_\ell \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{s,\sigma} (-1)^{n'-h+1} \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} du_s \wedge \partial/\partial u_s(\omega_{n-n'-1,\sigma}) \\ \\ \ldots\ldots u_i^m \ldots\ldots \end{bmatrix} \omega'_{n'-h+1,\sigma} \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots t'^m_\ell \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$= \sum_\sigma (-1)^{n'-h+1} \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i}\begin{bmatrix} d_{X/X'}(\omega_{n-n'-1,\sigma}) \\ \\ \ldots\ldots u_i^m \ldots\ldots \end{bmatrix} \omega'_{n'-h+1,\sigma} \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots t'^m_\ell \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} + \mathrm{I}$$

2) D'après les propriétés du résidu (RD R. 9,p.199), on a :

$$\mathrm{Tr}\, f\left(\sum_s m \begin{bmatrix} du_s \wedge \omega \\ \ldots u_i^m, u_s^{m+1} \ldots, t_\ell^m \ldots \end{bmatrix}\right) = \sum_{s,\sigma} (-1)^{n'-h+1} m \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i} \begin{bmatrix} du_s \wedge \omega_{n-n'-1,\sigma} \\ \ldots u_i^m, u_s^{m+1} \ldots \end{bmatrix} \omega'_{n'-h+1,\sigma} \\ \ldots\ldots\ldots t_\ell'^m \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$= \sum_\sigma (-1)^{n'-h+1} \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i} \begin{bmatrix} d_{X/X'}(\omega_{n-n'-1,\sigma} \\ \ldots\ldots u_i^m \ldots\ldots \end{bmatrix} \omega'_{n'-h+1,\sigma} \\ \ldots\ldots\ldots t_\ell'^m \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

3) On a :

$$\mathrm{Tr}\, f(\sum_s m \begin{bmatrix} dt_s \wedge \omega \\ \ldots u_i^m \ldots, t_\ell^m \ldots t_s^{m+1} \end{bmatrix} = \sum_s m \begin{bmatrix} \mathrm{Rés}^f_{u_i} \begin{bmatrix} \omega_{n-n'} \\ \ldots u_i^m \ldots \end{bmatrix} dt'_s \wedge \omega'_{n'-h} \\ \ldots\ldots t_\ell'^m, \ldots t_s'^{m+1} \ldots\ldots \end{bmatrix} = II$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\, f \circ d'_X(\psi) = (I - II) = d'_X \circ \mathrm{Tr}\, f(\psi)}$$

Second cas.- On suppose f une immersion fermée : Soient un point $x \in X$ de codimension j dans X, un système régulier de paramètres $(t_\ell)_{\ell\in[1,j]}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$; un système d'éléments $(u_i)_{i\in[1,n'-n]}$ qui définit X en x dans X', et qui forme, avec des relèvements $(t'_\ell) \in \mathcal{O}_{X',x'}$ des t_ℓ , un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X',x'}$ en $x' = f(x)$.

Soit le symbole $\psi = \begin{bmatrix} w \\ \ldots t_\ell^m \ldots \end{bmatrix} \in H^j_x(\Omega^i_X)$, et $\tilde{w} \in \Omega^i_{X',x'}$ un relèvement de $x \in \Omega^i_{X,x}$.

On a : $\mathrm{Tr}\, f(\psi) = \begin{bmatrix} \tilde{w} \wedge \ldots \underset{i}{\wedge} du_i \\ t_\ell'^m \ldots, u_i \ldots \end{bmatrix}$

$$d' \circ \mathrm{Tr}\, f(\psi) = \begin{bmatrix} d(\tilde{w} \wedge \ldots \underset{i}{\wedge} du_i) \\ \ldots t_\ell'^m \ldots u_i \ldots \end{bmatrix} - \sum_k m \begin{bmatrix} dt'_k \wedge \tilde{w} \ldots \underset{i}{\wedge} du_i \\ t_\ell'^m \ldots t_k'^{m+1} \ldots, u_i \ldots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d\tilde{w} \wedge \ldots \underset{i}{\wedge} du_i \\ t_\ell'^m \ldots, u_i \ldots \end{bmatrix} - \sum_k m \begin{bmatrix} dt'_k \wedge \tilde{w} \wedge \ldots \underset{i}{\wedge} du_i \\ t_\ell'^m \ldots t_k'^{m+1} \ldots u_i \ldots \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Tr}\, f(\begin{bmatrix} dw \\ \ldots t_\ell^m \ldots \end{bmatrix} - \sum_k m \begin{bmatrix} dt_k \wedge w \\ \ldots t_\ell^m \ldots, t_k^{m+1} \ldots \end{bmatrix}) = \mathrm{Tr}\, f\, d'(\psi)$$

Dans ce cas Tr f est un morphisme injectif des complexes simples associés.

Troisième cas.- La trace d'un morphisme f propre, quelconque, commute à δ'_X et $\delta'_{X'}$; en l'écrivant localement comme composé d'une immersion fermée et d'un morphisme lisse, on voit que : $\mathrm{Tr}\, f \circ d'_X = d'_{X'} \circ \mathrm{Tr}\, f$, donc la trace Tr f commute à d'_X et $d'_{X'}$. (Pour la commutativité aux d', on n'a pas besoin de supposer f propre). On en déduit que Tr f est un morphisme des complexes simples associés.

3.1.2.- La différentielle de $K_X^{\cdot\,\prime *}$ pour X non nécessairement lisse.

Proposition.- Soit $f : X \to T$ *une immersion fermée dans une variété lisse* T.

i) On a : $d'_T \circ \mathrm{Tr}\, f(K_X^{\cdot\,\prime *}) \subset \mathrm{Tr}\, f(K_X^{\cdot\,\prime *})$.

ii) Si car(k) = 0, *la différentielle* d'_X *ainsi induite ne dépend pas de l'immersion choisie.*

iii) Si car(k) = 0, *pour tout morphisme propre* $h : X \to X'$, *le morphisme* Tr h *commute aux différentielles partielles.*

Lemme.- Soient T *une variété lisse, un point* z *de codim* p *dans* T, *un symbole*

$$\gamma = \begin{bmatrix} \omega' \\ u_1,\dots,u_p \end{bmatrix} \in H_z^p(\Omega_T^{q'}) \text{ et une forme } \omega \in \Omega_{T,z}^q .$$

Posons : $\omega \wedge \gamma = \begin{bmatrix} \omega \wedge \omega' \\ u_1,\dots,u_p \end{bmatrix} \in H_z^p(\Omega_T^{q+q'})$.

Alors on a : $d'(\omega \wedge \gamma) = (d\omega) \wedge \gamma + (-1)^q \omega \wedge (d'\gamma)$.

Démonstration.- D'après le calcul de d' (voir dém. de la prop.2.1.1), on a :

$$d'(\omega \wedge \gamma) = \begin{bmatrix} d(\omega \wedge \omega') \\ u_1,\dots,u_p \end{bmatrix} - \sum_r \begin{bmatrix} du_r \wedge \omega \wedge \omega \\ u_1,\dots,u_r^2,\dots,u_p \end{bmatrix} =$$

$$(d\omega) \wedge \begin{bmatrix} \omega' \\ u_1,\dots,u_p \end{bmatrix} + (-1)^q \omega \wedge \begin{bmatrix} d\omega' \\ u_1,\dots,u_p \end{bmatrix} - \sum_r \begin{bmatrix} du_r \wedge \omega' \\ u_1,\dots,u_r^2,\dots u_p \end{bmatrix}$$

$$= (d\omega) \wedge \gamma + (-1)^q \omega \wedge (d'\gamma)$$

Revenons à la proposition et considérons l'isomorphisme
$\tilde{T} : H_z^p(\Omega_T^{n-i}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega_{T,z}^i, H_z^p(\Omega_T^n))$ où n = dim T, qui fait correspondre au symbole γ le morphisme $\tilde{T}(\gamma) : \omega \to \omega \wedge \gamma$.

Soit $\mathfrak{J}_X$ l'idéal qui définit X dans T ; pour un symbole γ, il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :

1) $\gamma \in \mathrm{Tr}\ f(K_X^{p,i})$

2) $\widetilde{T}(\gamma)$ est nul sur $\mathfrak{I}_X \Omega_T^i + d\mathfrak{I}_X \wedge \Omega_T^{i-1}$

3) $\forall\, f \in \mathfrak{I}_X$, on a : $f\,\gamma = 0$ et $df \wedge \gamma = 0$

<u>Démontrons</u> i).- Supposons $\gamma \in \mathrm{Tr}\ f(K_X^{p,i})$, on a d'après le lemme :

- $d'(f\gamma) = df \wedge \gamma + f\, d'\gamma = 0$, d'où : $f\, d'\gamma = 0$ puisque $df \wedge \gamma = 0$

- $d'(df \wedge \gamma) = -\, df \wedge d'\gamma = 0$.

<u>Démontrons</u> ii).- Soient f et f' deux immersions fermées de X dans T et T' on peut supposer qu'il existe un morphisme lisse $g : T \to T'$ tel que $f' = g \circ f$ (considérer $f \times f' : X \to T \times T'$ et se ramener à comparer $f \times f'$ avec f et f').

Soit $d'_{T,X}$ (resp. $d'_{T',X}$) la différentielle induite par T (resp. T'), on a :

$$\mathrm{Tr}\ f' \circ d'_{T',X} = d'_{T'} \circ \mathrm{Tr}\ f' = d'_{T'} \circ \mathrm{Tr}\ g \circ \mathrm{Tr}\ f = \mathrm{Tr}\ g \circ d'_T \circ \mathrm{Tr}\ f =$$

$$= \mathrm{Tr}\ g \circ \mathrm{Tr}\ f \circ d'_{T,X} = \mathrm{Tr}\ f' \circ d'_{T,X}$$

d'après la proposition 2.1.1. Le morphisme Tr f' étant injectif, on déduit que les deux différentielles induites sont identiques.

<u>Démontrons</u> iii).- On sait déjà que Tr h commute aux différentielles δ' (voir [RD]). On va voir que le morphisme Tr h commute aux d' pour tout morphisme non nécessairement propre. Ainsi posé, le problème devient local sur X et sur X' et on peut considérer un diagramme du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[d, "h"'] & X' \times k^n \arrow[r, hook, "j'"'] \arrow[dl, "p'"] & T \times k^n \arrow[d, "p"] \\
X' \arrow[rr, hook, "j"'] & & T
\end{tikzcd}$$

où $p' \circ i$ est une factorisation de h en une immersion fermée et une projection lisse, et j est une immersion fermée dans une variété lisse. Alors, on a d'après la proposition 2.1.1. :

$$\mathrm{Tr}(j \circ h) \circ d'_X = \mathrm{Tr}(p \circ j' \circ i) \circ d'_X = \mathrm{Tr}_p \circ d'_{T \times k^n} \circ \mathrm{Tr}(j' \circ i) =$$

$$= d'_T \circ \mathrm{Tr}(p \circ j' \circ i) = d'_T \circ \mathrm{Tr}(j \circ h) = \mathrm{Tr}\ j \circ d'_{X'} \circ \mathrm{Tr}\ h.$$

On en déduit, puisque Tr j est injectif : Tr h $\circ$ $d'_X = d'_X \circ$ Tr h, ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.1.3.- La proposition précédente montre qu'en caractéristique zéro, le complexe $K_X^{\cdot}{}'^{*}$ peut être muni d'une structure de complexe double pour une variété X non nécessairement lisse, de plus il varie de manière covariante en X pour les morphismes propres.

Par ailleurs, en car $\neq 0$, l'assertion i) de la proposition montre que $K_X^{\cdot}{}'^{*}$ peut être muni d'une structure de double complexe pour X lisse, ou sous-variété fermée d'une variété lisse. Nous n'avons pas établi l'indépendance de l'immersion fermée et la covariance. Dans la suite, on supposera ce résultat établi en toute généralité.

<u>*Définition*</u>.- *Soit* Z *une sous-variété fermée de* X. *On appelle hyperhomologie de De Rham de* X *à support dans* Z *et on note* $\mathbb{H}_{\cdot,Z}(X)$ *le groupe gradué égal à la cohomologie à support dans* Z *du complexe simple* $SK_X^{\cdot}{}'^{*}$ *associé à* $K_X^{\cdot}{}'^{*}$:

$$\mathbb{H}_{i,Z}(X) = H^{-i}(\Gamma_Z(X, SK_X^{\cdot}{}'^{*})) \quad \text{où} \quad i \in \mathbb{Z} .$$

2.2. <u>DUALITE</u>.-

<u>*Théorème*</u>.- *Soient* X *une variété algébrique sur* k *et* Z *une sous-variété fermée de* X, *propre sur* k. *Alors il existe pour tout entier* i, *un isomorphisme naturel* :

$$H^i(X, \widehat{\Omega^{\cdot}_{X,Z}}) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathbb{H}_{i,Z}(X), k)$$

où $\widehat{\Omega^{\cdot}_{X,Z}}$ *désigne le complexe de De Rham complété le long de* Z.

<u>Démonstration</u>.- Soient $\pi : X \to k$ le morphisme canonique et $j : Z \to X$ l'immersion fermée définie par l'idéal $\mathcal{J}_Z$ de $\mathcal{O}_X$. On note $j_r : Z_r \to X$ l'immersion définie par $\mathcal{J}_Z^r$, et $K^{\cdot}_{Z_r} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Z^r, K^{\cdot}_X)$ le complexe résiduel sur Z_r.

On peut appliquer le théorème de dualité ([BD] th. 3.3., p.379) pour voir que le composé des morphismes suivants est un quasi-isomorphisme, pour tout entier h :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\cdot}_{Z_r}), K^{\cdot}_{Z_r}) \to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\cdot}_{Z_r}), (\pi \circ j_r)_* K^{\cdot}_{Z_r}) \to$$
$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\cdot}_{Z_r}), k) \;;$$

où le second morphisme est induit par le morphisme trace $\mathrm{Tr}(\pi \circ j_r)$: $(\pi \circ j_r)_* K^{\cdot}_{Z_r} \to k$. On remarque que les morphismes sont considérés au niveau des

faisceaux et non dans la catégorie dérivée, puisque le complexe $K^{\bullet}_{Z_r}$ est composé de faisceaux injectifs, et $\underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\bullet}_{Z_r})$ de faisceaux flasques.
Le complexe $K^{\bullet}_{Z_r}$ étant dualisant sur Z_r, le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\bullet}_{Z_r}), K^{\bullet}_{Z_r})$ apparaît comme une résolution flasque de $\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X$.

On en déduit pour tout entier i un isomorphisme :

$$H^i(X, \Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(H^{-i}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\bullet}_{Z_r})), k).$$

En prenant la limite projective pour $r \in \mathbb{N}$ des deux côtés, on a :

$$H^i(X, \varprojlim_r \Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X) \to \mathrm{Hom}_k(H^{-i}(\varinjlim_r \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, K^{\bullet}_{Z_r})), k)$$

soit :

$$H^i(X, \hat{\Omega}^h_{X,Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(H^{-i}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^h_X, \underline{\Gamma}_Z K^{\bullet}_X)), k).$$

<u>Calcul du morphisme trace</u>.- $(\pi \circ j_r)_* K^{\bullet}_{Z_r} \to k$. Le morphisme gradué $\mathrm{Tr}(\pi \circ j_r)$ est nécessairement nul en degré $\neq 0$. En degré 0, le faisceau $K^0_{Z_r}$ est la somme des modules dualisants $(J(z)$ pour z de dim 0 dans Z_r. Le calcul de la trace sur le module $J(z)$ ne dépend que du voisinage de z, donc on peut supposer qu'il existe une immersion fermée de X dans une variété lisse T de dim n ; le module $J(z)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Z_r}, H^n_z(\Omega^n_T))$. Soit g le morphisme canonique de T sur k, pour tout symbole $\gamma \in J(z)$, on a :

$$\mathrm{Tr}(\pi \circ j_r)(\gamma) = \mathrm{Rés}^g_k(\gamma).$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma\, \Omega^h_T & \xrightarrow{\varphi_T} & \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_T(\Omega^h_T, \underline{\Gamma}_Z K^{\bullet}_T), k) \\
& & \downarrow \quad \uparrow \\
\Gamma\, \Omega^h_X & \xrightarrow{\varphi_X} & \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_X(\Omega^h_X, \underline{\Gamma}_Z K^{\bullet}_X), k) \\
& & \downarrow \quad \uparrow \\
\Gamma\, \Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X & \xrightarrow{\varphi_r} & \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_X(\Omega^h_X/\mathcal{J}^r_Z\Omega^h_X, \Gamma_Z K^{\bullet}_X), k)
\end{array}$$

Pour toute forme ω de degré h sur T, et tout symbole $\gamma \in \mathrm{Hom}(\Omega^h_{T,z}, H^n_z(\Omega^n_T)) \simeq H^n_z(\Omega^{n-h}_T)$, on a : $\varphi_T(\omega)(\gamma) = \mathrm{Rés}^g_k(\omega \wedge \gamma)$.

Les morphismes φ_X et φ_r sont déterminés par φ_T, d'après la commutativité du diagramme.

I.-<u>DUALITE DES DIFFERENTIELLES DANS LE CAS OU</u> Z <u>EST EGAL A UN POINT</u> z

Considérons le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega^\cdot_X,\underline{\Gamma}_Z K^\cdot_X)$ muni de sa différentielle totale Δ_X égale en degré q à $d'_X + (-1)^{q+1}\delta'_X$, et le complexe de De Rham $\Omega^\cdot_X$ muni de sa différentielle extérieure d_X, on va voir que le morphisme $\varphi^\cdot_X = (\varphi^h_X)_{h\, Z}$ commute au signe près à d_X et à celle duale de Δ_X.

Le problème étant local, il suffit de le vérifier dans le cas d'une variété lisse T, comme ci-dessus.

Soient $\omega \in \Gamma\, \Omega^{h-1}_T$ et $\psi^\cdot \in \mathrm{Hom}_T(\Omega^h_T,\Gamma_Z K^\cdot_T)$, il faut démontrer :

$$\mathrm{Rés}^g_k[\psi^\cdot(d\omega)] = \varepsilon\ \mathrm{Rés}^g_k[(\Delta\ \psi^\cdot)(\omega)] \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Dans ce calcul, seulement la composante ψ^o intervient ; cette composante dans $\mathrm{Hom}_T(\Omega^h_T,K^o_T)$ se représente comme somme de symboles $\gamma \in \Sigma\ H^n_Z(\Omega^n_T)$ où dim Z = 0.

Soit $\gamma = \begin{bmatrix} \omega \\ u_1,\dots,u_n \end{bmatrix}$, on a :

$$d'\gamma = \begin{bmatrix} d\omega' \\ u_1,\dots,u_n \end{bmatrix} - \Sigma_i \begin{bmatrix} du_i \wedge \omega' \\ u_1,\dots,u_i^2,\dots,u_n \end{bmatrix}.$$

$$(d'\psi^o)(\omega) = \omega \wedge d'\gamma = \begin{bmatrix} \omega \wedge d\omega' \\ u_1,\dots,u_n \end{bmatrix} - \Sigma_i (-1)^{h-1} \begin{bmatrix} du_i \wedge \omega \wedge \omega' \\ u_1,\dots,u_i^2,\dots,u_n \end{bmatrix}$$

Considérant l'égalité : $\mathrm{Rés}^g_k \Sigma_i \begin{bmatrix} du_i \wedge \omega \wedge \omega' \\ u_1,\dots,u_i^2,\dots,u_n \end{bmatrix} = \mathrm{Rés}^g_k \begin{bmatrix} d(\omega \wedge \omega') \\ u_1,\dots,u_i,\dots,u_n \end{bmatrix}$ ([RD](R9), p.199) et l'égalité $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^{h-1}\omega \wedge d\omega'$, on en déduit :

$$\mathrm{Rés}^g_k[\psi^\cdot(d\omega)] = \mathrm{Rés}^g_k(d\omega \wedge \gamma) = (-1)^h \mathrm{Rés}^g_k(\omega \wedge d'\gamma) = (-1)^h \mathrm{Rés}^g_k[(\Delta\ \psi^\cdot)(\omega)]\ .$$

<u>Dualité des complexes</u>.-

Soit $\varphi^\cdot_X : \widehat{\Omega^\cdot_{X,Z}} \to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^\cdot_X, \Gamma_Z K^\cdot_X),k)$. Ce morphisme commute aux différentielles. Considérons les suites spectrales :

$$'E^{pq}_1 = H^p(X,\widehat{\Omega^q_{X,Z}}) \qquad 'E^n = H^n(X,\widehat{\Omega^\cdot_{X,Z}})$$

et

$$'E^{pq}_1 = H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^q_X,\Gamma_Z K^\cdot_X)) \Longrightarrow {}'E^i = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^\cdot_X,\Gamma_Z K^\cdot_X))$$

D'après ce qui précède, ces deux suites spectrales sont duales, et leur aboutissement aussi. De plus, les faisceaux $\underline{\Gamma}_Z\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^*,K_X^\cdot)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^*,\underline{\Gamma}_Z K_Z^\cdot)$ sont isomorphes, ce qui achève la démonstration du théorème.

II.- DEMONSTRATION POUR Z QUELCONQUE

Désignons par $S^\cdot$ le complexe simple associé au complexe double $\underline{\Gamma}_Z K_X^{\cdot\,\prime *} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^*,\underline{\Gamma}_Z K_X^\cdot)$, c'est un module gradué sur l'anneau gradué de De Rham $\Omega_X^\cdot$. On note par $\underline{\mathrm{Hom}}^k_{\Omega_X^\cdot}(S^\cdot,S^\cdot)$ le faisceau de morphismes de degré k de $\Omega^\cdot$ modules; soit le faisceau associé au préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert U, la collection de $\Phi \in \prod_j \mathrm{Hom}(S_U^j,S_U^{j+k})$ tel que :

$$\Phi(\varphi.\alpha) = (-1)^{ik}\varphi.\Phi(\alpha) \quad \text{pour tout } \varphi \in \Omega^i \text{ et } \alpha \in S^j.$$

On désigne par $H^\cdot$ le complexe de faisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot_{\Omega^\cdot}(S^\cdot,S^\cdot)$, muni de la différentielle $\Delta_{H^\cdot}$ tel que : $\Delta_{H^\cdot}(\Phi) = \Delta_{S^\cdot} \circ \Phi + (-1)^{k+1}\Phi \circ \Delta_{S^\cdot}$.

Le complexe $S^\cdot$ est à opérateurs différentiels d'ordre 1. En effet, il suffit de vérifier que pour tout $\varphi \in \Omega^i$, opérant par multiplication sur $S^\cdot$:

$$\Delta_{S^\cdot} \circ \varphi + (-1)^{i+1}\varphi \circ \Delta_{S^\cdot} = d\varphi.$$

On a, pour tout $h \in \mathrm{Hom}_X(\Omega_X^\ell,\underline{\Gamma}_Z K_X^{\ell+r})$:

$$d'(\varphi h) + (-1)^{r+i}\delta'(\varphi h) + (-1)^{i+1}(\varphi d'h + (-1)^r\varphi\,\delta' h) =$$

$$d'(\varphi h) + (-1)^{i+1}\varphi d'h = d\varphi.h,$$

car $\delta'\varphi h = \varphi\delta' h$ et $d'\varphi h = d\varphi.h + (-1)^i\varphi d'h$ (voir lemme 2.1.2).

Le morphisme $h^\cdot : \widehat{\Omega^\cdot_{X,Z}} \to H^\cdot$.

Soient $\omega' \in \Gamma\widehat{\Omega^\cdot_{X,Z}}$ et $\varphi \in \Gamma S^\cdot$; alors φ est nécessairement annulé par $\mathfrak{J}_Z^r$ pour $r \in \mathbb{N}$ assez grand et se localise en certains points z_i de Z si ω est un relèvement de l'image de ω' dans $\Omega_X^\cdot/\mathfrak{J}_Z^r$ au voisinage de z_i ; on définit $h^\cdot$ par la formule :

$h^\cdot(\omega)(\varphi) = \omega\varphi$.

Le morphisme $h^\cdot$ commute aux différentielles

Il s'agit de vérifier : $\Delta_{H^\cdot}(h^\cdot(\omega')) = \Delta_{S^\cdot}\circ h^\cdot(\omega') + (-1)^{i+1}h^\cdot(\omega') \circ \Delta_{S^\cdot} = h^\cdot \circ d(\omega')$ pour ω' de d°i. Or, $h^\cdot$ opère sur $S^\cdot$ essentiellement par multiplication et la formule se réduit à celle que l'on a vérifié ci-dessus pour montrer que $S^\cdot$

est à opérateurs différentiels d'ordre 1.

<u>Le complexe</u> $H^{\cdot}$ <u>est formé de faisceaux flasques</u> ; en effet, on a un isomorphisme canonique :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Omega_X^{\cdot}}(S^{\cdot}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{\cdot}, \underline{\Gamma}_Z K_X^{\cdot})) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(S^{\cdot}, \underline{\Gamma}_Z K_X^{\cdot})$$

et ce dernier est composé de faisceaux flasques.

Considérons les morphismes :

$$\Gamma H^{\cdot} \to \mathrm{Hom}_k(\Gamma S^{\cdot}, \Gamma S^{\cdot}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\pi} \mathrm{Hom}_k(\Gamma S^{\cdot}, k)$$

On en déduit que le morphisme $h^{\cdot}$ induit des morphismes :

$$H^i(X, \widehat{\Omega_{X,Z}^{\cdot}}) \to \mathrm{Hom}_k(H^{-i}(\Gamma_Z S K_X^{\cdot\,\prime *}), k) \ .$$

On établit que ce morphisme est en fait un isomorphisme en considérant les suites spectrales associées comme dans le cas précédent où Z est un point.

<u>*Corollaire*</u> *1-Supposons X propre sur k, en prenant Z = X, on a :*

$$\mathbb{H}^i(X, \Omega_X^{\cdot}) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathbb{H}_i(X), k)$$

de plus, la cohomologie globale de $K_X^{\cdot\,\prime *}$ *est alors finie sur k.*

Ce corollaire montre que l'hyperhomologie n'est pas toujours identique à l'homologie de De Rham de X (voir N° suivant).

<u>*Corollaire 2*</u>*.- Supposons Z égal à un point z, on trouve :*

$$\mathbb{H}^i(\widehat{\Omega_{X,z}^{\cdot}}) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathbb{H}_{i,z}(X), k) \ .$$

2.3.- <u>COMPARAISON AVEC L'HOMOLOGIE DE DE RHAM</u>

Supposons car(k) = 0, et soit X une sous-variété fermée d'une variété lisse T de dim n ; Grothendieck propose dans ([12] note 9, p.101) et Hartshorne affirme dans [14] que l'on obtient une homologie satisfaisante de X en prenant $H_i(X) = H_X^{2n-i}(T, \Omega_T^{\cdot})$. Ces auteurs l'appellent homologie de De Rham, et Hartshorne démontre qu'elle coïncide avec l'homologie de Borel-Moore lorsque k = C. On rappelle ici l'indépendance de cette définition de l'homologie de De Rham du choix de l'immersion de X dans une variété lisse, et on voit qu'il existe un morphisme canonique de $\mathbb{H}.(X)$ dans $H.(X)$.

3.3.1.- Proposition.- Soit $j : Y \to X$ *une immersion fermée d'une variété* Y *lisse, de* codim p *dans une variété* X *lisse. Le morphisme* $\mathrm{Tr}\, j : j_* K_Y^{\cdot\,\prime *} \to \underline{\Gamma}_Y K_X^{\cdot\,\prime *}$ *induit un quasi-isomorphisme.*

La démonstration de cette proposition se trouve dans ([13], p. 151), on trouve aussi une démonstration dans [T] inspirée de [4].

Corollaire.- Avec les notations de la proposition, soit S *une sous-variété fermée de codimension pure* q *dans* Y*; Le morphisme :* $H_S^q(Y,\Omega_Y^h) \to H_S^{q+p}(X,\Omega_X^{h+p})$ *est injectif.*

Définition.- Soit X *une variété algébrique non nécessairement lisse munie d'une immersion fermée* i *dans une variété lisse* T. *On appelle homologie de De Rham de* X, *l'hyperhomologie de De Rham de* T *à support dans* X, *et on écrit* $H_\cdot(X) = \mathbb{H}_{\cdot,X}(T)$.

Théorème.- Avec les notations de la définition.

i) L'homologie de De Rham de X *ne dépend pas du choix de l'immersion de* X *dans une variété lisse.*

ii) Le morphisme $\mathrm{Tr}\, i$ *induit un morphisme canonique de l'hyperhomologie de De Rham de* X *dans l'homologie de De Rham dans* X*:*

$$\mathbb{H}_\cdot(X) \to H_\cdot(X) .$$

iii) L'homologie de De Rham est covariante pour les morphismes propres.

Démonstration.- i) Soit $i' : X \to T'$ une immersion dans une variété lisse. On peut se ramener au cas où il existe un morphisme $g : T \to T'$ tel que $i' = g \circ i$. On va faire un raisonnement par récurrence sur la dim de X.

Le théorème est vrai si dim $X = 0$; soit Z le lieu singulier de X, on a les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underline{\Gamma}_Z K_T^{\cdot\,\prime *} & \to & \underline{\Gamma}_X K_T^{\cdot\,\prime *} & \to & j_* \underline{\Gamma}_{X-Z} K_{T-Z}^{\cdot\,\prime *} & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Trg}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Trg}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Trg}} & & \\
0 & \to & \underline{\Gamma}_Z K_{T'}^{\cdot\,\prime *} & \to & \underline{\Gamma}_X K_{T'}^{\cdot\,\prime *} & \to & j'_* \underline{\Gamma}_{X-Z} K_{T'-Z}^{\cdot\,\prime *} & \to & 0
\end{array}$$

où j et j' sont les immersions ouvertes de X-Z dans T et T'.

D'après la proposition, puisque X-Z est lisse, le morphisme Tr g à droite est un quasi-isomorphisme. D'après l'hypothèse de récurrence, le morphisme Tr g à gauche est aussi un quasi-isomorphisme, d'où le morphisme Tr g du milieu l'est aussi.

L'assertion ii) est évidente. Pour démontrer iii), considérons un morphisme propre $g : X \to X'$, des immersions $i : X \to T$ et $i' : X' \to T'$ dans des variétés lisses T et T', et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad g' \quad} & T' \times T \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow{\quad i' \quad} & T' \end{array}$$

Le morphisme $g' = (i' \circ g) \times i$ est une immersion fermée, et la trace de g en homologie est celle induite par la trace de p ; elle est compatible avec la trace en hyperhomologie.

2.3.2.- <u>Exemple</u> : <u>cas d'une singularité isolée</u>

Supposons que le lieu singulier d'une variété X se réduit à un point z. <u>Alors la cohomologie de</u> $\Gamma K_X^{\bullet\,\prime *}$ <u>coïncide avec l'homologie de</u> X <u>si et seulement si le complexe de De Rham complété</u> $\widehat{\Omega^{\bullet}_{X,z}}$ <u>est une résolution de</u> k(*).

En effet, supposons qu'il existe une immersion i de X dans une variété lisse T, et considérons les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\Gamma}_z K_X^{\bullet\,\prime *} & \longrightarrow & \underline{\Gamma} K_X^{\bullet\,\prime *} & \longrightarrow & \underline{\Gamma}_{X-z} K_{X-z}^{\bullet\,\prime *} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}\ i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}\ i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}\ i} & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\Gamma}_z K_T^{\bullet\,\prime *} & \longrightarrow & \underline{\Gamma}_X K_T^{\bullet\,\prime *} & \longrightarrow & \underline{\Gamma}_{X-z} K_{T-z}^{\bullet\,\prime *} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le morphisme Tr i à droite est un quasi-isomorphisme puisque X-z est lisse. Donc le morphisme Tr i du milieu est un quasi-isomorphisme, si et seulement si celui de gauche l'est. D'après la proposition, on a : $k \cong K_z^{\bullet\,\prime *} \cong \Gamma_z K_T^{\bullet\,\prime *}$; on conclut d'après l'isomorphisme de dualité : $(\mathbb{H}_{i,z}(X, K_X^{\bullet\,\prime *}))^{\vee} \simeq \mathbb{H}^i(\widehat{\Omega^{\bullet}_{X,z}})$.

<u>Remarque 1</u>.- Le théorème de dualité appliqué dans le cas d'une sous-variété fermée X propre d'une variété lisse T, s'écrit :

$$\mathbb{H}^i(T, \widehat{\Omega^{\bullet}_{T,X}}) \simeq (\mathbb{H}_{i,X}(T))^{\vee} \simeq (H_i(X))^{\vee} ;$$

(*) Si $k = \mathbb{C}$, cette condition est équivalente à l'exactitude du complexe de De Rham des faisceaux de formes holomorphes ([28], prop.3.1.), si X est de plus une hypersurface, on dit que z est une singularité isolée quasi-homogène ([29]).

on en déduit que l'hypercohomologie de $\widehat{\Omega^{\bullet}_{T,X}}$ ne dépend pas du plongement de X dans T c'est la cohomologie de De Rham de X (voir [14]).

2.- Soit $\mathcal{J}_X$ l'idéal de définition de X dans T, et pour tout entier r soit X_r la sous-variété définie par $\mathcal{J}^r_X$. Il n'existe pas nécessairement un entier r tel que $\mathbb{H}^{\bullet}(X_r, K_{X_r}^{\bullet\,\prime *})$ coïncide avec l'homologie de X. En effet, le théorème de dualité s'applique si X est propre et nous donne :

$$\mathbb{H}^i(X,\Omega^{\bullet}_{X_r}) \simeq (\mathbb{H}_i(X_r,K^{\bullet\,,*}_{X_r}))^{\vee}$$

Or, un contre-exemple dans ([16]§ 7.7.2) montre que $\mathbb{H}^{\bullet}(X,\Omega^{\bullet}_{X_r})$ ne donne pour aucun entier r la cohomologie de De Rham de X.

2.4.- <u>COMPARAISON AVEC L'HOMOLOGIE DE HODGE</u>

Considérons le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^p_X,K^{\bullet}_X)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$; il est covariant pour les morphismes propres, quand on associe à un morphisme propre sa trace.

<u>Définition</u>.- Soit Z *une sous-variété fermée de* X*; on appelle Homologie de Hodge de* X *à support dans* Z *et on note* $H_{\cdot,\cdot,Z}(X)$ *le groupe bigradué égal à la cohomologie à support dans* Z *de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^p_X,K^{\bullet}_X)$ *pour* $p \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{p,i} H_{i,p,Z}(X) = \sum_{p,i} H^{-i}(\Gamma_Z(X,\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^p_X,K^{\bullet}_X)))$$

- Au cours de la démonstration de la dualité pour l'hyperhomologie de De Rham on a obtenu le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 1.- <u>Dualité</u>.- Avec les notations de la définition, si de plus Z *est propre, on a :*

$$H^i(X,\widehat{\Omega^p_{X,Z}}) \simeq \mathrm{Hom}_k(H_{i,p,Z}(X),k).$$

<u>Corollaire</u>.- Si X *est propre, on a :*

$$H^i(X,\Omega^p_X) \simeq \mathrm{Hom}_k(H_{i,p}(X),k).$$

- Si de plus X est lisse de dim n, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^p_X,K^{\bullet}_X)$ est une résolution flasque de $\Omega^{n-p}_X[n]$. Alors, on a :

<u>Proposition 2</u>.- <u>Dualité pour une variété</u> X *<u>lisse de</u>* dim n *<u>et propre</u>*

$$H_{i,p}(X) \simeq H^{n-i}(X,\Omega^{n-p}_X).$$

- Supposons X quelconque, et considérons la filtration décroissante de $K_X^{\cdot\,\prime *}$: $F_p K_X^{\cdot\,\prime *} = \sum_{i \leq p} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^i, K_X^{\cdot})_{p \in \mathbb{Z}}$, dont l'image définit une filtration $(F_p(\mathbb{H}_{\cdot}(X))_{p \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{H}_{\cdot}(X)$. Soit ${}_p\mathbb{H}_{i+p,Z}(X) = H^{-i-p}(\Gamma_Z(X, SF_p K_X^{\cdot\,\prime *}))$.

Proposition 3.- Avec les notations ci-dessus, le morphisme canonique : $F_p\, \underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega_X^*, K_X^{\cdot})[-p] \to \underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega_X^p, K_X^{\cdot})$ *induit pour tout entier* $i \in \mathbb{Z}$ *, un morphisme* ${}_p\mathbb{H}_{i+p,Z}(X) \to H_{i,p}(X)$.

3.5.- DEFINITION DU RESIDU SUR $\Omega_X^{\cdot}$.

1.- Soient $g : Z \to X$ et $f : X \to Y$ deux morphismes de variétés algébriques où g et $f \circ g$ sont finis. Pour définir le morphisme résidu :

$$\mathrm{Rés}_g^f : f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(g_* \mathcal{O}_Z, \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega_X^{\cdot}, K_X^{\cdot})) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}((f \circ g)_* \mathcal{O}_Z, \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\Omega_Y^{\cdot}, K_Y^{\cdot}))$$

Il suffit de composer les morhismes suivants :

$$f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(g_* \mathcal{O}_Z, \underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega_X^{\cdot}, K_X^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{\cdot}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(g_* \mathcal{O}_Z, K_X^{\cdot}))$$

$$\to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(f_* \Omega_X^{\cdot}, f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(g_* \mathcal{O}_Z, K_X^{\cdot})).$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y^{\cdot}((f \circ g)_* \mathcal{O}_Z, K_Y^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}((f \circ g)_* \mathcal{O}_Z, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y^{\cdot}, K_Y^{\cdot})).$$

Le morphisme I se déduit du morphisme $\Omega_Y^{\cdot} \to f_* \Omega_X^{\cdot}$ et de l'isomorphisme résidu :

$$\mathrm{Rés}_g^f : f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(g_* \mathcal{O}_Z, K_X^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}((f \circ g)_* \mathcal{O}_Z, K_Y^{\cdot}).$$

2.- Soit X une variété algébrique de dim n, on définira au § III un morphisme canonique $C_X : \Omega_X^n \to K_X^{\cdot}[-n]$; on en déduit un morphisme $V^i : \Omega_X^i \to K_X^{-n,n-i} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-i}, K_X^{-n})$, défini ainsi :

$$\forall\, \omega \in \Gamma\Omega_X^i, \quad \forall\, \omega' \in \Gamma\Omega_X^{n-i}, \; V^i(\omega)[\omega'] = C_X(\omega' \wedge \omega).$$

Définition.- Soient $f : X \to Y$ *un morphisme, et* $S_{\cdot} = (S_h \subset \ldots \subset S_1)$ *une suite pure dans* X *de longueur* h*, telle que la restriction de* f *à* S_h *soit finie . Soient* $\mathcal{J}$ *le faisceau d'idéaux de* $\mathcal{O}_X$ *qui définit la structure réduite sur* S_h*, et* $Z_n = (S_h, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)$. *On note* δ' *la différentielle partielle de* $K_X^{\cdot\,\prime *}$*, déduite de celle de* $K_X^{\cdot}$ *. Pour toute section* ω *de* Ω_X^i *, et pour* m *assez grand, l'élément* $\delta'_{S_{\cdot}}(V^i(\omega) = \delta'_{S_h} \circ \ldots \circ \delta'_{S_1}(V^i(\omega))$ *appartient à*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Z_m}, K_X^{-n+h,n-i}).$$

Par définition, $\mathrm{Rés}^f_{S_\bullet}(\omega)$ est égal à $\mathrm{Rés}^f_{Z_m} \circ \delta'_{S_\bullet} \circ V^i(\omega) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathcal{O}_{Z_m}, K_Y^{-n+h,n-i})$ appliqué à la section unité de $f_*\mathcal{O}_{Z_m}$.

Proposition.- Avec les notations de la définition ci-dessus, on a pour tout $\omega \in \Gamma\Omega^{\cdot}_X$:

$$\mathrm{Rés}^f_{S.} \circ d_X(\omega) = d'_Y \circ \mathrm{Rés}^f_{S.}(\omega) \qquad (\text{dém. car}(k) = 0).$$

D'après la proposition 2.1.1, la trace de f commute à d', de même δ' commute à d', donc il reste à démontrer que $V^{\cdot}$ commute à d'_X, et il suffit de le faire au voisinage de tout point générique de X. On peut supposer alors que X est une sous-variété fermée de codim p dans une variété lisse T et que X est irréductible de point générique x ; soit $C_X \in H^p_x(\Omega^p_T)$ la classe fondamentale de X dans T, qui sera définie au § III. Pour toute forme $\omega \in \Gamma\Omega^i_X, V^{\cdot}(\omega) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^{n-i}_X, H^p_x(\Omega^{n+p}_T))$ s'envoie par la trace de l'immersion de X dans T en un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\Omega^{n-i}_T, H^p_x(\Omega^{n+p}_T) \simeq H^p_x(\Omega^{p+i}_T)$ égal à $\tilde{\omega} \wedge C_X$, où $\tilde{\omega}$ désigne un relèvement de ω dans $\Omega^i_{T,x}$.

On verra au § III que $d'_T(C_X) = 0$; on en déduit d'après la proposition 2.1.2 que l'on a :

$$d'_T(\tilde{\omega} \wedge C_X) = d_T\tilde{\omega} \wedge C_X .$$

Comme $d_T\tilde{\omega}$ est un relèvement de $d\omega$, on en déduit, d'après la définition de d'_X :

$$d'_X V^{\cdot}(\omega) = V^{\cdot}(d_X(\omega)).$$

*
* *

III.- LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN CYCLE

Ce paragraphe est une version améliorée de l'article [5]. Grothendieck a annoncé en 1956 [8] que l'on peut associer à tout cycle d'une variété lisse X une classe fondamentale dans la cohomologie de Hodge de X. Le complexe résiduel de la variété X nous permet d'expliciter une construction de cette classe. D'une manière plus précise, on définit pour toute variété Y sur un corps k, une classe fondamentale C_Y dans l'hyperhomologie de De Rham de Y, qui s'envoie lorsque Y se plonge dans X dans l'hyperhomologie $\mathbb{H}.(X)$ (resp. l'homologie de De Rham et de Hodge de X). Si X est lisse, on obtient la classe en cohomologie par dualité. On écrit s.r.p. pour système régulier de paramètres. On suppose d'abord que le corps de base k est parfait, puis à la fin on déduit les résultats pour tout corps k.

3.1.- CONSTRUCTION DE LA CLASSE FONDAMENTALE AU CAS OÙ LE CORPS DE BASE k EST PARFAIT

Théorème.- Pour toute variété algébrique Y, *il existe un morphisme unique* $C_Y \in K_Y^{\cdot}{}'{}^* = \mathrm{Hom}(\Omega_Y^*, K_Y^{\cdot})$ *annulé par* d_Y' *et* δ_Y', *et qui vérifie les propriétés suivantes :*

i) Si Y *est lisse, de point générique* y *et de dim.* m, C_Y *est le morphisme naturel :*

$$\Omega_Y^m \hookrightarrow K_Y^{-m} = \Omega_{Y,y}^m \ .$$

ii) Pour tout morphisme $f : U \to U'$ *fini et dominant, d'un ouvert* U *de* Y *dans une variété* U' *lisse de* dim.m, *soient* $\mathrm{Tr}\ f : f_* K_U^{\cdot} \to K_{U'}^{\cdot}$, *et* $\mathrm{Tr}\ f : f_* \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_{U'}$, *les morphismes traces, et* $f^* : f^*\Omega_{U'}^m \to \Omega_U^m$ *le morphisme canonique ; alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} f_* f^* \Omega_{U'}^m[m] & \xrightarrow{f^*} & f_* \Omega_U^m[m] & \xrightarrow{C_{Y/U}} & f_* K_U^{\cdot} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Tr}\ f \otimes I_d\ [m]} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Tr}\ f} \\ \Omega_{U'}^m[m] & & \xrightarrow{\quad C_{U'} \quad} & & K_{U'}^{\cdot} \end{array}$$

iii) Si Y *est de dim pure* m, C_Y *est de degré* $-2m$.

iv) Si Y *est une somme disjointe de sous-variétés* Y_i *de dim pure,* $C_Y = \sum C_{Y_i}$.

v) *Si* f : Y' → Y *est un morphisme propre, qui induit un isomorphisme sur l'image réciproque d'un ouvert partout dense dans* Y, $\mathrm{Tr}\, f(C_{Y'}) = C_Y$.

On va faire la démonstration en deux étapes : Existence et Unicité.

1.- <u>Existence</u>.- (k non nécessairement parfait). Supposons d'abord Y intègre de dim m, de point générique y. On va construire C_Y et vérifier : $\delta'_Y \circ C_Y = 0$; le raisonnement que l'on va suivre étant local, on suppose qu'il existe une immersion fermée i : Y → X de Y dans une variété lisse X de dim n. Le germe $\mathcal{J}$ en y de l'idéal de définition de Y dans X est engendré par un s.r.p. $(t_1,\ldots,t_p)$ dans $\mathcal{O}_{X,y}$. La suite exacte :

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \Omega^1_{X,y} \to \Omega^1_{Y,y} \to 0$$

montre que le morphisme $\psi : \Omega^m_{X,y} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \to \Omega^m_{Y,y}$ est surjectif, et que le module $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes \Omega^{m-1}_{X,y}$ s'envoie surjectivement sur le module H = ker ψ.

Le morphisme $\Omega^m_{X,y} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \to \Omega^n_{X,y} \otimes \mathcal{O}_{Y,y}$ qui envoie l'élément $\omega \otimes 1$ en $\omega \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p \otimes 1$ s'annule sur l'image de $\Omega^{m-1}_{X,y} \otimes \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ et définit donc un morphisme :

$$\gamma : \Omega^m_{Y,y} \xrightarrow{\sim} (\Omega^m_{X,y} \otimes \mathcal{O}_{Y,y})/H \to \Omega^n_{X,y} \otimes \Lambda^p(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\vee}$$

$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ étant libre de base $t_1,\ldots,t_p$.

Considérons le morphisme composé de γ avec l'isomorphisme fondamental local ([RD] ch.III, prop.7.2, p.179) :

$$C_y : \Omega^m_{Y,y} \xrightarrow{\gamma} \Omega^n_{X,y} \otimes \Lambda^p(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\vee} \simeq \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y}) \simeq K_Y^{-m} .$$

Le morphisme cherché est le composé :

$$C_Y : \Omega^m_Y \to \Omega^m_{Y,y} \to K_Y^{-m} .$$

Il reste à démontrer que le composé de C_Y avec la différentielle est nul.

- <u>Cas où</u> Y <u>est normale</u> : Pour tout point $z \in Y$ de codim 1, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,z}$ est de valuation discrète. De plus, on peut supposer que les éléments $t_1,\ldots,t_p$ sont dans $\mathcal{O}_{X,z}$ et qu'ils forment avec un élément $t_{p+1} \in \mathcal{O}_{X,z}$ un système régulier de paramètres.

Soient $\omega \in \Gamma\Omega^m_Y$ une forme sur Y, et $\omega_z \in \Omega^m_{X,z}$ un relèvement de ω; régulier en z. On a :

$$C_Y(\omega) = \begin{bmatrix} \omega_z \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p \\ \\ t_1,\ldots,t_p \end{bmatrix} \in \mathrm{Ext}^p(k(y),\Omega_X^n) \simeq K_Y^{-m} \quad ;$$

on conclut que $\delta' \circ C_Y(\omega) = 0$ dans $H_z^{p+1}(\Omega_X^n)$, d'après le calcul précédent de la différentielle (I.1.1), et en remarquant que $\omega_z \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p$ est régulier en z.

Remarques 1.- Il est utile de mentionner que l'élément $\begin{bmatrix} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p \\ t_1,\ldots,t_p \end{bmatrix} \in H_y^p(\Omega_X^p)$ ne dépend pas du choix du s.r.p. : $(t_1,\ldots,t_p)$ dans $\mathcal{O}_{X,y}$.

2.- Si Y est de plus séparable sur k (pour tout point $x \in Y$, $k(x)$ est une extension séparable de k), on peut retrouver facilement que le faisceau de cohomologie $\underline{H}^{-m}(K_Y^\bullet)$ s'identifie au faisceau des formes différentielles régulières aux points simples de Y. En effet, soit V un ouvert affine dans Y, d'algèbre A, tel que Ω_V^1 soit libre de base $du_1,\ldots,du_m$. Une forme $\omega \in \Omega_{Y,y}^m$ s'écrit $\omega = \alpha du_1 \wedge \ldots \wedge du_m$ où $\alpha \in k(y)$; pour tout point $z \in V$, soit v_z la valuation de $\mathcal{O}_{X,z}$; alors on a l'équivalence des relations suivantes :

i) $\delta' \circ C_y(\omega) = 0$,

ii) $\forall\ z \in V,\ \ v_z(\alpha) = 0$

iii) $\omega \in \Gamma\Omega_V^m$.

(d'après ([26] § 10, th. 16, cor. 3, vol II) ; ii) implique $\alpha \in A$).

- Cas où Y est intègre. Soient $f : \tilde{Y} \to Y$ la vairété normalisée de Y et $C_{\tilde{Y}}$ le morphisme canonique sur $\tilde{Y}$.

Il suffit de démontrer que $\mathrm{Tr}\, f(C_{\tilde{Y}}) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y^m, K_Y^{-m})$ coïncide au point générique y de Y avec $C_y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\Omega_{Y,y}^m, K_{Y,y}^{-m})$. Le problème étant local, on peut supposer que Y est affine et que f se factorise en une immersion fermée $j : \tilde{Y} \to Y \times k^s$ et la première projection p sur Y.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[dr] & Y \times k^s \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p"] & X \times k^s \arrow[d, "p'"] \\ & Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Soit $(q_1,\ldots,q_s)$ un s.r.p. de $\mathcal{O}_{Y\times k^s,y}$ qui définit donc $\tilde{Y}$ dans $Y \times k^s$ en y.
Pour toute forme $\omega \in \Omega_{Y,y}^m$, soit ω_y un relèvement de ω dans $\Omega_{X,y}^m$, l'élément $C_y(\omega)$ se représente par le symbole :

$$\begin{bmatrix} \omega_y \wedge dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p \\ \\ t_1 \ldots t_p \end{bmatrix} \quad \text{resp. } C_{\tilde{Y}}(\omega) \text{ par } \quad \begin{bmatrix} \omega_y \wedge p^*(dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p) \wedge dq_1\wedge\ldots\wedge dq_s \\ \\ p^*t_1\ldots p^*t_p\; q_1\ldots q_s \end{bmatrix}$$

Le morphisme Tr f s'identifie au morphisme $\text{Rés}^{p'}_{q_j}$ pour $i \in [1,p]$ et $j \in [1,q]$. qui fait correspondre ces deux symboles l'un à l'autre d'après les propriétés générales du Résidu ([RD] p.197, R.3).

- <u>Existence dans le cas d'une variété Y quelconque</u>.- Soient $Y_1,\ldots,Y_t$ les composantes irréductibles de Y, munies de leur structure intègre, et $h_j : Y_j \to Y$ les immersions canoniques. Soit $n_j = \ell g(\mathcal{O}_{Y,y_j})$ la longueur de l'anneau local de Y au point générique y_j de Y_j. Le morphisme $C_Y \in \text{Hom}(\Omega^*_Y, K^\cdot_Y)$ est l'unique morphisme qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Omega^*_Y \arrow[r, "C_Y"] \arrow[d, "\Sigma\, h_j^*"] & K^\cdot_Y \arrow[d, "\Sigma\, \mathrm{Tr}\, h_j"] \\ \Sigma\, h_{j_*}\Omega^*_{Y_j} \arrow[r, "\Sigma n_j C_{Y_j}"'] & \Sigma\, h_{j_*} K^\cdot_{Y_j} \end{tikzcd}$$

- <u>$d'_Y \circ C_Y = 0$</u>

On se ramène au cas où Y est intègre et admet une immersion fermée $i : Y \to X$ dans X lisse. Si $(t_1,\ldots,t_p)$ est un s.r.p. de $\mathcal{O}_{X,y}$, l'image Tr $i(C_Y)$ est égale au symbole $\begin{bmatrix} dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p \\ t_1\ldots\ldots t_p \end{bmatrix} \in H^p_y(\Omega^p_X)$. On a :

$$d'_X \begin{bmatrix} dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p \\ \\ t_1\ldots\ldots t_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_1\ldots t_p)d(dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p) - d(t_1\ldots t_p)\wedge dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p \\ \\ t_1^2\ldots\ldots t_p^2 \end{bmatrix} = 0.$$

- <u>C_Y vérifie les propriétés annoncées</u>.- Toutes les propriétés sont évidentes, sauf ii) que l'on démontre : soit U un ouvert de Y admettant un morphisme f fini et dominant dans U' lisse de dim m. Le raisonnement étant local, on peut supposer U affine, de sorte qu'il existe une factorisation de f en une immersion fermée i dans X lisse et un morphisme lisse $p : X \to U'$. Ayant vu que la restriction de C_Y à Ω^m_U ne fait intervenir que les composantes irréductibles de Y de dim m qui rencontrent U, on se ramène au cas où Y est irréductible de dim m et de point générique y. Soient $(t_1,\dots,t_p)$ un s.r.p. de $\mathcal{O}_{X,y}$, une forme $\omega \in \Gamma\Omega^m_{U'}$, une section a de $\mathcal{O}_U$, on a :

$$\operatorname{Tr} f \circ C_{Y/U} \circ f_*(a \otimes \omega) = \operatorname{Rés}^p_{t.}\begin{bmatrix} \lg(\mathcal{O}_{Y,y})\ ap^*(\omega) \wedge dt_1\wedge\dots\wedge dt_p \\ \\ t_1\dots\dots t_p \end{bmatrix}$$

égal d'après ([RD] p.197, R.6) à :

$$\ell g(\mathcal{O}_{Y,y})\ \operatorname{Tr}(f/Y_r)(a/Y_r)\omega = \operatorname{Tr} f(a)\omega$$

où Y_r désigne la sous-variété intègre de même support que Y.

2. UNICITE

Cas d'une variété Y irréductible, de dim m et de point générique y. Soient U un voisinage de y ouvert et affine, et $f_o : U \to k^m$ un morphisme fini sur un voisinage de $f_o(y)$ et séparable en y. Soient une factorisation de f_o en une immersion fermée $i_o : U \to X$ et une projection lisse $p_o : X \to k^m$, $K = k(y)$ le corps résiduel en y, et $(t_1,\dots,t_p)$ un s.r.p. de $\mathcal{O}_{X,y}$.

Soient X le spectre de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,y} \simeq K[[t_1,\dots,t_p]]$, (X_i) pour $i \in [1,m]$ les paramètres de k^m, et $K_o = k(X_1,\dots,X_m)$ le corps résiduel en $z = f_o(y)$. On construit le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{X} \arrow[dr, "p"] \arrow[ddr] & \\
 & & & U' \arrow[d, "p_o"] \\
\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \arrow[uurr, "i"] \arrow[r, "j"'] & U \arrow[uur, "i_o"] \arrow[urr, "f"] \arrow[rr, "f_o"'] & & k^m
\end{tikzcd}$$

de la manière suivante : d'après ([EGA] ,ch.0, th.19.6.4) on a la factorisation suivante : $K_o \to K \xrightarrow[p^*]{} \widehat{\mathcal{O}}_{X,y}$ du morphisme : $K_o \xrightarrow{p_o^*} \mathcal{O}_{X,y} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,y}$ qui permet d'établir un isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{X,y} \simeq K[[t_1,\dots,t_p]]$. La variété U' est une sous-variété fermée d'un voisinage de y dans X, définie par le s.r.p. $(t_1,\dots,t_p)$, de sorte que l'on puisse supposer $U' = U_{réd}$ pour U et U' assez petits. Le morphisme f est défini en imposant à $f^* : \mathcal{O}_{U',z} \to \mathcal{O}_{U,y}$ d'être égal au composé $K \xrightarrow{p} K[[t_1,\dots,t_p]] \to \mathcal{O}_{Y,y}$.

Soient $(X_i^!)$ (resp. $(\overline{X}_i)$, et (X_i'')) l'image des indéterminées (X_i) sur U' (resp. X et U). Soient $\sigma_S : [1,s] \to [1,p]$ et $\sigma'_s : [s+1,p] \to [1,m]$ des injections ordonnées.

Tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Omega^m_{Y,y},J(y)) \subset \mathrm{Hom}(\Omega^m_{X,y},J(y)) \simeq H^p_y(\Omega^p_X)$ se met sous la forme

$$\varphi = \begin{bmatrix} \omega \\ \\ t_1^n \ldots t_p^n \end{bmatrix} \quad \text{où } \omega = \Sigma a_{\sigma_s,\sigma'_s}\, d\overline{X}_{\sigma'_s} \wedge dt_{\sigma_s}$$

où $d\overline{X}_{\sigma'_s} = d\overline{X}_{\sigma'_s(s+1)} \wedge \ldots \wedge d\overline{X}_{\sigma'_s(p)}, dt_{\sigma_s} = dt_{\sigma_s(1)} \wedge \ldots \wedge dt_{\sigma_s(s)}$. De sorte que pour tout $b \in \mathcal{O}_{Y,y}$ on a :

$$\varphi(bdX''_1 \wedge \ldots \wedge dX''_m) = \begin{bmatrix} ba_{\sigma_p}\, d\overline{X}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{X}_m \wedge dt_{\sigma_p} \\ \\ t_1^n \ldots\ldots\ldots\ldots t_p^n \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions, on a :

$$\mathrm{Tr}\, f(\varphi(bdX''_1 \wedge \ldots \wedge dX''_m)) = \mathrm{Rés}^p_{f\circ j} \begin{bmatrix} ba_{\sigma_p} \wedge dt_{\sigma_p} \\ \\ t_1^n \ldots\ldots t_p^n \end{bmatrix} dX'_1 \wedge \ldots \wedge dX'_m = \mathrm{Tr}\, f(b)(\bigwedge_1^m dX'_h).$$

D'après [2], on a pour tout élément $\alpha = \Sigma \alpha_{i_1 \ldots i_p}\, t_1^{i_1} \ldots t_p^{i_p} \in K[[t_1,\ldots,t_p]]$:

$$\mathrm{Rés}^p_{f\circ j} \begin{bmatrix} \alpha \wedge dt. \\ \\ \ldots t_i^{n_i} \ldots \end{bmatrix} = \alpha_{n_1-1,\ldots n_p-1} \in K \simeq k(z').$$ En prenant $b = \pi_i t_i^{\beta_i}$, on détermine la composante de φ sur $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p$ égale à : $a_{\sigma_p} = \Sigma \gamma_{i_1 \ldots i_p}\, t_1^{i_1} \ldots t_p^{i_p}$, on trouve

$$\gamma_{n-1-\beta_1,\ldots,n-1-\beta_p} = \mathrm{Tr}\, f(b) = \begin{cases} \lg(\mathcal{O}_{Y,y}) & \text{si } \beta_i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais pour déterminer les composantes de φ sur les autres éléments de la base de $\Omega^p_{X,y}$, il faut faire varier f. Dans la suite, on raisonne par récurrence : supposons $a_{\sigma_s,\sigma'_s} = 0$ pour tout $t \le s < p$ et $a_{\sigma_p} = \lg(\mathcal{O}_{Y,y})$, on va démontrer $a_{\sigma_{t-1},\sigma'_{t-1}} = 0$. Soient δ une permutation de $[1,m]$ et $\gamma : [1,t+1] \to [1,p]$ une injection ordonnée. On définit un morphisme $\overline{p}_o = p_o(\delta,\gamma) : X \to k^m$ en envoyant X_{δ_i} sur $U_{\delta_i} = \overline{X}_{\delta_i} + t_{\gamma_i}$ pour $i \le t+1$ et sur $U_{\delta_i} = \overline{X}_{\delta_i}$ pour $i > t+1$. Soit $\overline{f}_o = p_o \circ i_o$, on remarque que $\overline{f}_o$ et f_o induisent le même morphisme sur $U_{réd}$, puisque les t_i sont nilpotents sur Y ; on en déduit que $\overline{f}_o$ est fini et séparable. Comme pour f_o ci-dessus, le morphisme $\overline{f}_o^{\,*}$ admet une factorisation $K_o \to K \xrightarrow{\overline{p}^*} \widehat{\mathcal{O}}_{X,y}$, ce qui permet d'associer $\overline{p} : X \to U'$ à $\overline{p}^{\,*}$ et de définir un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{X,y} \simeq K[[t_1,\ldots,t_p]]$ et $\overline{f} : U \to U'$ tel que $\overline{f} \circ j = \overline{p} \circ i$. On note $d\overline{X}_{\delta(\widehat{h_o,\ldots,h_\mu})} = d\overline{X}_{\delta_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{X}_{\delta_{h_o}}} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{X}_{\delta_h}} \wedge \ldots \wedge d\overline{X}_{\delta_m}$, où le signe $\wedge$ désigne une omission et $\varepsilon_i = \pm 1$. Alors, on a : $dU_{\delta_1} \wedge \ldots \wedge dU_{\delta_m} = \wedge d\overline{X}_{\delta_\cdot} + \Sigma \varepsilon_i d\overline{X}_{\delta(\widehat{i})} \wedge dt_{\gamma_i} + \ldots + \varepsilon_{t+1}\, d\overline{X}_{\delta(\widehat{1,\ldots,t+1})} \wedge dt_{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\gamma_{t+1}}$, et

$$\varphi(b(\wedge\, dU_{\delta.})) = \begin{bmatrix} \omega \\ \\ \cdot\cdot\, t_i^n \cdot\cdot \end{bmatrix} \quad \text{où } \omega' = b(\lg(\mathcal{O}_{Y,y}) + \varepsilon a_{\sigma^o_{p-t-1},\sigma'^o_{p-t-1}}) \wedge d\overline{X}_{\delta.} \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p$$

où σ^o_{p-t-1} est complémentaire à $\gamma([1,t+1])$ et σ'^o_{p-t-1} est complémentaire à $\delta([t+1,m])$; comme $d\overline{X}_{\delta.} \wedge dt. = dU_{\delta.} \wedge dt.$, on a : $\omega' = b(\lg\mathcal{O}_{Y,y} + \varepsilon\, a_{\sigma^o_{p-t-1},\sigma'^o_{p-t-1}}) \wedge dU_{\delta.} \wedge dt.$;

$\mathrm{Tr}\, \overline{f}(\varphi)(bdU_{\delta.}) = \mathrm{Tr}\, \overline{f}(b)dU_{\delta.} = \mathrm{Rés}^{\overline{p}}_{\overline{f}\circ j} \begin{bmatrix} \omega \\ t^n_{\cdot} \end{bmatrix}$. En prenant $b = \pi t_i^{\beta_i}$, on trouve comme précédemment que $a_{\sigma^o_{p-t-1},\sigma'^o_{p-t-1}}$ est nul.

Cas général.- Soit Y^o_m la sous-variété réduite et fermée dans Y, réunion des composantes irréductibles de Y de dim m, définie par l'idéal $\mathfrak{J}^o_m$; il existe un entier assez grand n_m tel que $\mathfrak{J}_m = (\mathfrak{J}^o_m)^{n_m}$ soit nul au voisinage de chacun des points génériques de Y^o_m. Soient la variété Y_m définie par $\mathfrak{J}_m$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $Y' = \coprod_m Y_m$, la propriété (v) s'applique pour le morphisme $g : Y' \to Y$, ce qui nous ramène au cas où Y est de dim pure (d'après (iv)). Enfin, la condition iii) montre qu'il suffit de s'intéresser aux points génériques de Y, donc on peut supposer Y irréductible.

Proposition 1.- Soit $f : Y \to Y'$ *un morphisme fini et dominant dans* Y' *lisse. Le morphisme* $\mathrm{Tr}\, f : f_*K^{\cdot}_Y \to K^{\cdot}_{Y'}$, *induit un isomorphisme :*

$$T : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega^m_Y[m],K^{\cdot}_Y) \xrightarrow{\sim} \overline{f}^* \,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'}}(f_*\Omega^m_Y,\Omega^m_{Y'}),$$

où $m = \dim Y'$ *et* $\overline{f}^*$ *désigne le foncteur* $\mathcal{O}_Y \underset{f^{-1}f_*\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}$.

Corollaire.- La classe fondamentale correspond par cet isomorphisme à un morphisme $\mathrm{Tr}\, f : f_*\Omega^m_Y \to \Omega^m_{Y'}$, *qui induit sur tout ouvert de* Y *lisse et fini sur un ouvert de* Y' *le morphisme trace classique ([2] par exemple).*

Définition 1.- i) Soit Y *une variété algébrique ; on appelle classe fondamentale de* Y , *et on note aussi* c_Y, *l'image de* $c_Y \in K^{\cdot\,\prime *}_Y$ *dans l'hyperhomologie de De Rham* $\mathbb{H}_{\cdot}(Y)$. *Si* Y *est de dim pure* m, $c_Y \in \mathbb{H}_{2m}(Y)$.

ii) La classe fondamentale en homologie de De Rham est l'image de c_Y *par le morphisme canonique :* $\mathbb{H}_*(Y) \to H_*(Y)$.

iii) Si Y *est de dim pure* m, *la classe fondamentale en homologie de Hodge est l'image de* c_Y *par le morphisme canonique :* ${}_m\mathbb{H}_{2m}(Y) \to H_{m,m}(Y)$ *(il est évidant que* $c_Y \in {}_m\mathbb{H}_{2m}(Y)$.)

Définition 2.- i) Soit $i : Y \to X$ *une immersion fermée dans une variété lisse* X *de dim* n, *la classe fondamentale de* Y *dans la cohomologie de De Rham de* X *est l'image de* C_Y *par le morphisme composé :* $\mathbb{H}.(Y) \xrightarrow{\operatorname{Tr} i} \mathbb{H}.(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{2n+\cdot}(X)$.

ii) Si de plus Y *est de dim pure* m, *la classe fondamentale de* Y *dans la cohomologie de Hodge de* X *est l'image de* C_Y *par le morphisme composé :*

$$ {}_m\mathbb{H}_{2m}(Y) \to H_{m,m}(Y) \xrightarrow{\operatorname{Tr} i} H_{m,m}(X) \simeq H^{n-m}(X,\Omega_X^{n-m}). $$

Remarque 2.- Dans ce dernier cas, C_Y appartient plus précisément à $\operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega_X^p)$ où $p = n-m$.

Image directe d'une classe fondamentale.

Proposition 2.- Soit $f : Y \to Y'$ *un morphisme propre et dominant de variétés irréductibles, de même dimension et de points génériques* y *et* y'. *On a :*

$$ \operatorname{Tr} f(C_Y) = \lg(\mathcal{O}_{Y,y})(\dim_{k(y')} k(y)) C_{Y'_{\text{réd}}}. $$

C'est évident d'après la propriété ii) dans le théorème.

3.2.- COMPATIBILITE AVEC LA FORMULE DE KÜNNETH

Dans toute la suite, on considère deux variétés X et X' lisses sur k, et leur produit $V = X \times_k X'$ muni des projections P sur X et P' sur X'.

Rappel de la formule de Künneth

Théorème.- Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{O}_X$*-modules, resp.* $\mathcal{F}'$ *de* $\mathcal{O}_{X'}$*-modules, on a l'isomorphisme suivant entre les espaces de cohomologie :*

$$ H^n(X \times X', P^* \mathcal{F} \otimes P'^* \mathcal{F}') \quad \sum_{q+q'=n} H^q(X,\mathcal{F}) \otimes_k H^{q'}(X',\mathcal{F}') $$

On trouve la démonstration dans ([EGA] livre III, ch.0, § 11).

Cas de la cohomologie de Hodge

Proposition 2.- Soient Z *(resp.* Z'*) une sous-variété fermée intègre de codim* p *dans* X *(resp.* p' *dans* X'*), et la variété produit* $Z \times Z'$ *(non nécessairement intègre). Alors la classe* $C_{X\times X'}(Z\times Z')$ *dans* $H^{p+p'}(X\times X', \Omega^{p+p'}_{X\times X'})$ *est l'image par l'isomorphisme de Künneth de* $C_X(Z) \otimes C_{X'}(Z')$ *dans* $H^p(X,\Omega_X^p) \otimes H^{p'}(X',\Omega_{X'}^{p'})$.

On trouve la démonstration dans [T].

Cas de la cohomologie de De Rham

Dans ce cas, on définit un quasi-isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_X(\Omega_X^\bullet, K_X^\bullet) \underset{k}{\otimes} \underline{\mathrm{Hom}}_{X'}(\Omega_{X'}^\bullet, K_{X'}^\bullet) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X\times X'}(\Omega_{X\times X'}^\bullet, K_{X\times X'}^\bullet)$$

qui induit un morphisme :

$$\mathbb{H}_{DR}^{2p}(X,\Omega_X^\bullet) \underset{k}{\otimes} \mathbb{H}_{DR}^{2p'}(X',\Omega_{X'}^\bullet) \to \mathbb{H}_{DR}^{2(p+p')}(X\times X',\Omega_{X\times X'}^\bullet)$$

compatible avec le morphisme de Künneth.

Si la classe fondamentale C_Z (resp. $C_{Z'}$) d'une sous-variété intègre Z (resp.Z') de X (resp.X') est représentée par le symbole :

$$\begin{bmatrix} dt_1 \wedge\ldots\wedge dt_p \\ t_1\ldots t_p \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} dt'_1 \wedge\ldots\wedge dt'_{p'} \\ t'_1\ldots t'_{p'} \end{bmatrix}$$

l'image de $C_Z \times C_{Z'}$ est le symbole

$$\begin{bmatrix} dt_1 \wedge\ldots\wedge dt_p \wedge dt'_1 \wedge\ldots\wedge dt'_{p'} \\ t_1\ldots t_p\ t'_1\ldots t'_{p'} \end{bmatrix} \quad \text{clase de la variété produit } Z \times Z'.$$

3.3.- COMPATIBILITE DU PRODUIT D'INTERSECTION ET DU CUP-PRODUIT

Proposition 1.- Soient un schéma affine X *, des faisceaux quasi-cohérents* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{H}$ *sur* X*, deux sous-schémas fermés, l'un* Y *défini par une suite* $(f_i)_{i\in[1,p]}$ *dans* $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ *, l'autre* Z *défini par une suite* $(g_i)_{i\in[1,q]}$ *dans* $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$.

La cohomologie à support dans un fermé d'un faisceau se calcule comme limite inductive de cohomologie de complexes de Koszul associés à une suite de sections de $\mathcal{O}_X$ *définissant ce fermé* ([EGA] *ch.III, § 1).*

L'isomorphisme du complexe simple associé à $K^\bullet((f_i^n),\mathcal{F}) \otimes K^\bullet((g_i^n),\mathcal{H})$ *avec le complexe* $K^\bullet((f_i^n,\ldots,\ldots g_j^n),\mathcal{F}\otimes\mathcal{H})$*, défini pour tout entier* n*, passe à la limite inductive sur* n *et induit sur les cohomologies le morphisme cup-produit :*

$$H_Y^i(X,\mathcal{F}) \otimes H_Z^j(X,\mathcal{H}) \to H_{Y\cap Z}^{i+j}(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{H}).$$

Corollaire.- Avec les notations précédentes, on a pour tout symbole :

$$\begin{bmatrix} \omega \\ f_1\ldots f_p \end{bmatrix} \in H_Y^p(X,\Omega_X^p) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \omega \\ g_1\ldots g_q \end{bmatrix} \in H_Z^q(X,\Omega_X^q) \text{ la formule :}$$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ f_1\ldots f_p \end{bmatrix} \smile \begin{bmatrix} \omega' \\ g_1\ldots g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\wedge\omega' \\ f_1\ldots f_p\ g_1\ldots g_q \end{bmatrix} \in H_{Y\cap Z}^{p+q}(X,\Omega_X^{p+q})$$

Proposition 2.- Soient deux sous-variétés irréductibles Y *et* Z *de codim respectives* p *et* q *dans* X *lisse, admettant pour intersection une sous-variété irréductible* S *de codim* p + q *dans* X *et de point générique* s. *Il existe une suite régulière* (f_i) *pour* $i \in [1,p]$ *dans* $\mathcal{O}_{X,s}$, *qui admet* Y *parmi ses composantes irréductibles au voisinage de* s, *et tel que les restrictions* f'_i *des* f_i *à* Z *soient en position d'intersection complète géométrique au voisinage de* s.

Alors pour tout symbole $\theta = \begin{bmatrix} \varphi \\ f_1 \dots f_p \end{bmatrix} \in H^p_Y(X,\Omega^p_X)$, *le cup-produit avec la classe fondamentale* C_Z : $\theta \smile C_Z$ *appartient à* $\mathrm{Hom}_Z(\Omega_Z^{n-p-q}[n-p-q],K_Z^\bullet)$ *et fait correspondre à* $\omega \in \Gamma\Omega_Z^{n-p-q}$ *l'élément* $\mathrm{Rés}_{f'_1\dots f'_p}\left((-1)^{(n-q)p}\ \dfrac{\omega \wedge \varphi/Z}{f'_1\dots f'_p}\right) \in \Gamma K_Z^\bullet$.

On trouve la démonstration dans [T].

Théorème.- Supposons le corps de base k *parfait, et soient* Y *et* Z *deux sous-variétés intègres de codim respectives* p *et* q *dans* X *lisse d'intersection* $Y \cap Z$ *de codim pure* p + q *dans* X. *Alors, on a :*

$$C_Y \smile C_Z = C_{Y.Z} \quad \text{dans} \quad H^{p+q}_{Y\cap Z}(X,\Omega_X^{p+q})$$

où Y.Z *désigne le cycle intersection de* Y *et* Z *dans* X.

Lemme 1.- Soient Y *une sous-variété lisse de codim* p *dans* X *et* S *une sous-variété de codim* q *dans* Y. *Le cup-produit avec* C_Y *définit un morphisme injectif* $\tilde{C}_Y$:

$$H^q_S(Y,\Omega^\ell_Y) \to H^{q+p}_S(X,\Omega^{\ell+p}_X) \ .$$

Le morphisme $\tilde{C}_Y$ se déduit du morphisme : $H^q_s(\Omega^\ell_Y) \to H^{q+p}_s(\Omega^{\ell+p}_X)$ défini au point générique s de S, qui établit la correspondance suivante des symboles, où $\omega \in \Omega^\ell_{X,s}$:

$$\begin{bmatrix} \omega/Y \\ g_{1/Y}\dots g_{q/Y} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \omega \\ g_1\dots g_q \end{bmatrix} \smile C_Y$$

(pour la notation, voir le corollaire précédent).

L'image de la classe fondamentale de S dans Y est celle de S dans X.

Lemme 2.- (réduction à la diagonale). Soit $\Delta : X \to X \times X$ *le morphisme diagonal. On a :*

$$\tilde{C}_{\Delta(X)}(C_Y \smile C_Z) = C_{Y\times Z} \smile C_{\Delta(X)} \quad \text{et} \quad \tilde{C}_{\Delta(X)}(C_{Y.Z}) = C_{Y\times Z.\Delta(X)} \ .$$

L'isomorphisme de Künneth fait correspondre $C_{Y\times Z}$ à $C_Y \otimes C_Z$, d'où :

$\Delta^* C_{Y\times Z} = C_Y \smile C_Z$. On en déduit : $\tilde{C}_{\Delta(X)}(C_Y \smile C_Z) = \tilde{C}_{\Delta(X)}(\Delta^* C_{Y\times Z}) = C_{Y\times Z} \smile C_{\Delta(X)}$.

L'isomorphisme $\Delta : X \xrightarrow{\sim} \Delta(X)$ fait correspondre $C_X(Y.Z)$ à $C_{\Delta(X)}(\Delta_*(Y.Z) = C_{\Delta(X)}(Y\times Z.\Delta(X))$; on en déduit :

$$\breve{C}_{\Delta(X)}(C_{Y.Z}) = C_{\Delta(X)}(Y\times Z.\Delta(X)) \smile C_{\Delta(X)} = C_{Y\times Z.\Delta(X)}$$

<u>Revenons à la démonstration du théorème</u>.- D'après la réduction à la diagonale, on peut supposer Y lisse. Il suffit de vérifier l'égalité au voisinage des points génériques de $Y \cap Z$, le problème est donc local, et on peut supposer l'intersection $Y \cap Z$ irréductible. Soit S la sous-variété intègre de support $Y \cap Z$, de point générique s. Il existe p éléments : $f_1,\dots,f_p \in \mathcal{O}_{X,s}$ qui définissent Y au voisinage de s.

<u>Cas où</u> Y <u>est définie par une équation</u> f.-

Supposons Z affine d'algèbre A et soit $f' \in A$ la restriction de f à Z, qui définit S' d'algèbre $A/(f')$. La sous-variété intègre S est définie par un idéal premier P_S dans Z, nilpotent dans $A/(f')$.

<u>$C_Y \smile C_Z \in \mathrm{Hom}(\Omega_S^{n-q-1}, K_S^{\cdot}[-n+q+1])$.</u>

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "\psi"] \\ S \arrow[r, "i"'] & Z \end{tikzcd}$$

où i désigne l'immersion canonique, ψ la normalisée de Z, et $(\tilde{\psi},\tilde{i})$ le produit fibré de (ψ,i). D'après la proposition 2, $C_Y \smile C_Z$ dans $\mathrm{Hom}(\Omega_Z^{n-q-1}[n-q-1],K_Z^{\cdot})$ se représente par le morphisme qui fait correspondre à $\omega \in \Gamma\Omega^{n-q-1}$ le symbole $\mathrm{Rés}_{f'}((-1)^{n-q}\frac{\omega\wedge df'}{f'}) \in \Gamma K_Z^{\cdot}$. On va voir qu'en fait $C_Y \smile C_Z$ appartient à $\mathrm{Tr}\ i(K_S^{\cdot\,\prime *})$. Soient z le point générique de Z, $\tilde{f} = \psi^*(f')$ et $\tilde{\omega} = \psi^*(\omega)$. On a :

$$\mathrm{Tr}\ \psi(\frac{\tilde{\omega}\wedge d\tilde{f}}{\tilde{f}}) = \frac{\omega\wedge df'}{f'} \in \Omega_{Z,z}^{n-q}$$

et

$$\mathrm{Tr}\ \tilde{\psi} \circ \mathrm{Rés}_{\tilde{f}}(\frac{\tilde{\omega}\wedge d\tilde{f}}{\tilde{f}}) = \mathrm{Rés}_{f'}(\frac{\omega\wedge df'}{f'}).$$

Soient $\tilde{s}$ un point générique d'une composante irréductible de $\tilde{S}$, u une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\tilde{Z},\tilde{s}}$, $b \in P_S$ et $\omega = b\omega_1$ (resp. $\omega = db \wedge \omega_1$) dans $\Gamma\Omega_Z^{n-q-1}$. On peut écrire : $\psi^*(b) = a_1 u^{n_1}$ et $\tilde{f} = a_2 u^{n_2}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{Z},\tilde{s}}$ où a_1 et a_2 sont inversibles, et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$. Alors la forme :

$$\frac{\tilde{\omega} \wedge d\tilde{f}}{\tilde{f}} = a_1 u^{n_1} \frac{\tilde{\omega}_1 \wedge da_2}{a_2} + n_2 a_1 u^{n_1 - 1} \tilde{\omega}_1 \wedge du$$

est régulière en $\tilde{s}$ et de résidu nul ; resp. $\frac{\tilde{\omega} \wedge d\tilde{f}}{\tilde{f}} = (n_1 a_1 u^{n_1-1})/a_2 du \wedge \tilde{\omega}_1 \wedge da_2 + u^{n_1}/a_2\, da_1 \wedge \tilde{\omega}_1 \wedge da_2 + n_2 u^{n_1-1}\, da_1 \wedge \tilde{\omega}_1 \wedge du$ est régulière en $\tilde{s}$ et de résidu nul.
On en déduit que si $i^*\omega = 0$, $\text{Rés}_{f'}(\frac{\omega \wedge df'}{f'})$ est nul.

<u>Lemme</u>.- *Soit* A *un anneau semi-local noethérien intègre, contenant un anneau de valuation discrète* B, *d'uniformisante* t. *Alors si* A *est fini sur* B, *et* $t \in \text{Rad}(A)$:

i) A *est libre sur* B;

ii) Si $(y_i)_{i \in I}$ *désigne la famille finie des points fermés de* Spec A *au-dessus du point fermé* y_o *de* Spec B , *on a* :

$$\forall d \in A : (\text{Tr}_{A/B}(d))(y_o) = (\lg \frac{A}{tA}) \sum_{i \in I} \text{Tr}_{k(y_i)/k(y_o)} d(y_i).$$

où $d(y_i)$ *désigne la classe résiduelle de* d *dans* $k(y_i)$.

<u>Suite de la démonstration</u>.- Le produit d'intersection Y.Z est égal à $\lg(A/f'A)S$ et il s'agit de démontrer : $C_Y \smile C_Z = \lg(A/f'A)C_S$.

On va déduire ce résultat du lemme précédent et de la construction suivante au voisinage de s :

$$\begin{tikzcd}
 & S'' \arrow[rr] \arrow[ddl, "p'"] & & Z_1 \arrow[ddl, "p"] \\
S \arrow[ur] \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "\varphi'"'] & & Z \arrow[ur, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & \\
T' \arrow[rr, shift left, "j"] & & T \arrow[ll, shift left, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

On considère un morphisme φ' fini et étale sur un espace affine T' de dim n-q-1 (c'est là qu'on utilise k parfait) , une immersion j de T' sur l'hyperplan défini par une indéterminée X dans un espace affine de dim n-q, un morphisme $\varphi : Z \to T$ tel que $\varphi^*(X) = f'$ et qui prolonge φ', c'est un morphisme quasi-fini sur un voisinage de s qu'on suppose égal à Z. D'après le "main theorem" de Zariski, il existe une immersion ouverte g et un morphisme fini p tel que $\varphi = p \circ g$. Soit S" l'image réciproque $p^{-1}(T')$ dans Z_1.

Soient S_i les composantes irréductibles de S", de points génériques (s_i) pour $i \in [1,r]$ tel que $s_o = s$, resp. t et t' les points génériques de T et T', B l'algèbre de T et A_1 l'algèbre affine de Z_1, et $f_1 = p^*(X)$. L'algèbre $A_{1(X)}/(f_1)$ est finie sur $k(t')$ et donc isomorphe à $\Sigma_i A_{1,s_i}/(f_1)$.

On s'intéresse à p et p' parce que leur trace commute au calcul résidu ; l'élément e_o dans $A_{1(X)}$, qui induit dans $\Sigma A_{1,s_i}/(f_1)$ zéro pour $i \neq 0$ et 1 pour $i = 0$, va nous permettre dans le calcul suivant d'isoler $\mathrm{Tr}\,\varphi'$ dans $\mathrm{Tr}\,p'$.

Toute forme $\omega \in \Omega^{n-q-1}_{S,s}$ se met sous la forme $a'\varphi'^*(\omega')$ où $a' \in \mathcal{O}_{S,s}$ et $\omega' \in \Omega^{n-q-1}_{T',t'}$, la forme $p^* \circ \gamma^*(\omega')$ est un relèvement de $\varphi'^*(\omega')$ régulier aux points s_i.

On peut considérer $C_Y \smile C_Z(\omega)$ comme un élément de $\mathrm{Hom}(\varphi'_*\mathcal{O}_S, K^{\cdot}_{T'})$; il fait correspondre à $b' \in \mathcal{O}_{S,t'}$ la forme : $\mathrm{Tr}\,\varphi'(\mathrm{Rés}_{f'}((-1)^{n-q}\, ba\varphi^* \circ \gamma^*(\omega'))/f')) \in \Omega^{n-q-1}_{T',t'}$ où b et a sont des relèvements de b' et a' dans $A_{1(X)}$.

La forme $(bae_o p^* \circ \gamma^*(\omega') \wedge df_1)/f_1$ est régulière aux points s_i pour $i \neq 0$, et son résidu est nul en ces points car e_o est un multiple de f_1 en ces points. Soit $\varepsilon = (-1)^{n-q}$; on a :

$$\mathrm{Tr}\,p' \circ \Sigma\, \mathrm{Rés}_{s_i}((\varepsilon\, bae_o p^* \circ \gamma^*(\omega') \wedge df_1)/f_1) =$$

$$\mathrm{Tr}\,\varphi' \circ \mathrm{Rés}_s((\varepsilon\, bae_o\varphi^* \circ \gamma^*(\omega') \wedge df')/f') =$$

$$\mathrm{Rés}_{T'} \circ \mathrm{Tr}\,p((\varepsilon\, bae_o p^* \circ \gamma^*(\omega') \wedge df_1)/f_1) =$$

$$\mathrm{Rés}_{T'}((\varepsilon\ \mathrm{Tr}\,\varphi(bae_o)\gamma^*(\omega') \wedge dX)/X) = j^*(\mathrm{Tr}\,\varphi(bae_o))\omega'$$

Soient $j_i : S_i \to S''$ les immersions canoniques, en appliquant le lemme pour $d = bae_o$, et sachant que $j_i^*(e_o) = 0$ si $i \neq 0$, et 1 si $i = 0$, on a :

$$j^*(\mathrm{Tr}\,\varphi(bae_o))\omega' = \lg(A_S/(f'))\ \mathrm{Tr}\,\varphi'(i^*ba)\omega' \ ;$$

or, $C_S(\omega) \in \mathrm{Hom}(\varphi'_*\mathcal{O}_S, K^{\cdot}_{T^{n-q-1}})$ fait correspondre à tout $b' \in \mathcal{O}_{S,t'}$ la forme $\mathrm{Tr}\,\varphi'(a'b')\omega'$ on en déduit :

$$C_Y \smile C_Z(\omega) = \lg(A_S/(f'))C_S(\omega) = i(Y.Z)C_S(\omega)\ .$$

Cas général

Supposons la proposition vraie dans le cas d'une intersection avec une sous-variété lisse de codim p-1. Soit Y' la sous-variété lisse définie au voisinage de s par $(f_2,\dots,f_p)$ et considérons les cycles premiers $(W_j)_{j\in[1,p]}$ correspondant aux idéaux premiers minimaux à contenir l'idéal de $\mathcal{O}_{X,s}$ engendré par l'idéal de Z et l'élément f_1. Soient $f_{1,j}$ la classe de f_1 dans $\mathcal{O}_{Z,W_j}$ et $n_j = \lg(\mathcal{O}_{Z,W_j}/(f_{1,j}))$ la longueur. Si Y_1 désigne le cycle défini par f_1, le produit d'intersection $Y_1.Z$ est égal à $\Sigma n_j W_j$. D'après l'hypothèse de récurrence : $C_{Y'.W_j} = C_Y \smile C_{W_j}$ et d'après ce qui précède : $C_{Y_1.Z} = C_{Y_1} \smile C_Z = \sum_{j\in[1,p']} n_j C_{W_j}$, enfin l'associativité du produit d'intersection et du cup-produit permet d'écrire :

$$C_{Y.Z} = C_{(Y'.Y_1).Z} = C_{Y'.(Y_1.Z)} = \Sigma\, n_j C_{Y'.W_j} = \Sigma\, n_j C_{Y'} \smile C_{W_j}$$

$$= C_{Y'} \smile (C_{Y_1} \smile C_Z) = (C_{Y'} \smile C_{Y_1}) \smile C_Z = C_Y \smile C_Z \,.$$

<u>*Corollaire*</u>.- *Soit* Y *une sous-variété, localement intersection complète dans une variété lisse* X, *de composantes irréductibles* Y_i *et de points génériques* y_i *pour* $i \in [1,q]$. *Si* $(f_{1,i},\dots,f_{p,i})$ *est une suite régulière dans* $\mathcal{O}_{X,y_i}$, *qui définit* Y *en* y_i, *on a :*

$$\begin{bmatrix} df_{1,i}\wedge\dots\wedge df_{p,i} \\ \\ f_{1,i},\dots,f_{p,i} \end{bmatrix} = \lg(\mathcal{O}_{Y,y_i}) C_{Y_i} \quad \text{dans } H^p_{y_i}(\Omega^p_X)$$

<u>Indépendance du choix de la suite régulière</u>.-

Soit une suite régulière $f'_1,\dots,f'_p$ qui définit Y au voisinage de y_i, on a des égalités du type : $f'_j = \Sigma_h a^h_j f_h$ dans $\mathcal{O}_{X,y_i}$, soit A la matrice des coefficients.

On a :

$$df'_j = (a^h_j df_h + f_h da^h_j)$$

$$\wedge_j\, df'_j = |A|\, \Lambda_h\, df_h + \varphi \quad \text{où } \varphi \in \mathcal{J}_{Y,y_i}\, \Omega^p_{X,y_i}$$

d'où l'égalité des symboles :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_j\, df'_j \\ \\ ..f'_j.. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_h\, df_h \\ \\ ..f_h.. \end{bmatrix}$$

<u>Suite de la démonstration</u>.- Raisonnons au voisinage d'un point y_i. Soient y^h_j pour $h \in H_j$ les points génériques des composantes irréductibles y^h_j, passant par y_i, de la sous-variété Y_j définie par l'équation f_j. On a : $f_j = a^h_j (g^h_j)^{n_h}$ où $n_h \in \mathbb{N}$, a^h_j est inversible dans $\mathcal{O}_{X,y^h_j}$ et g^h_j désigne une uniformisante de cet anneau. Un calcul simple montre que :

$$\begin{bmatrix} d(g^h_j)^{n_h} \\ \\ (g^h_j)^{n_h} \end{bmatrix} = n_h \begin{bmatrix} dg^h_j \\ \\ g^h_j \end{bmatrix} = n_h C_{Y^h_j}$$

On en déduit :

$$\begin{bmatrix} df_j \\ f_j \end{bmatrix} = \Sigma_h n_h C_{Y_j^h} \in \Sigma\, H^1_{y_j^h}(\Omega^1_X)$$

et

$$\begin{bmatrix} \Lambda_j df_j \\ ..f_j.. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df_1 \\ f_1 \end{bmatrix} \smile \cdots\cdots \smile \begin{bmatrix} df_p \\ f_p \end{bmatrix} = \Sigma_{h_j \in H_j, j\in[1,p]} n_{h_1} \cdots n_{h_p} C_{Y_1^{h_1}} \cdots$$

$$\cdots C_{Y_p^{h_p}} = m_i\, C_{Y_{r,i}} ,$$

où $m_i \in \mathbb{N}$ et $C_{Y_{r,i}}$ désigne la classe de la sous-variété intègre de support Y_i.
Il reste à voir que $m_i = \lg(\mathcal{O}_{Y,y_i})$. Soit g un morphisme lisse défini au voisinage de y_i dans X sur un espace affine T de dim n-p et de point générique t_o, et tel que la restriction de g sur $Y_{r,i}$ soit un revêtement étale. La classe $C_{Y_i} \in \mathrm{Hom}(\Omega^{n-p}_{Y,y_i}, \Omega^{n-p}_{T,t_o})$ fait correspondre à toute forme : $ag^*_{/Y_i}(\omega)$ où $a \in \mathcal{O}_{Y_i,y_i}$; et $\omega \in \Omega^{n-p}_{T,t_o}$, la forme :

$$\mathrm{Rés}^g \begin{bmatrix} ag^*(\omega) \wedge (\Lambda_j df_j) \\ \\ \cdots\cdots f_j \cdots\cdots \end{bmatrix} = (\mathrm{Tr}_{Y_i/T}\, a)\omega = \lg(\mathcal{O}_{Y,y_i})(\mathrm{Tr}_{k(y_i)/k(t_o)}\bar{a})\omega .$$

On en déduit que $\lg(\mathcal{O}_{Y,y_i}) = m_i$.

<u>Image réciproque d'une classe fondamentale</u>.-

<u>*Proposition 3*</u>.-*Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés lisses. Si le cycle* $f^{-1}Z$, *image réciproque d'une sous-variété* Z *intègre dans* Y, *est défini, on a en cohomologie de Hodge :*

$$C_{f^{-1}Z} = f^*C_Z .$$

Soit $\Gamma : X \to X\times Y$ le morphisme graphe de f. Soit $\tilde{C}_{\Gamma(X)}$ le morphisme injectif, cup-produit par $C_{\Gamma(X)}$ défini au lemme 3.3.1. On a : $C_{X\times Z} = p^* C_Z$ et $f^* C_Z = \Gamma^* \circ p^*(C_Z) = \Gamma^*(C_{X\times Z})$. D'où :

$$\tilde{C}_{\Gamma(X)}(f^*C_Z) = C_{X\times Z} \smile C_{\Gamma(X)} = C_{X\times Z.\Gamma(X)} = C_{X\times Y}(\Gamma_*(f^{-1}Z)) = C_{f^{-1}Z} \smile C_{\Gamma(X)} = \tilde{C}_{\Gamma(X)}(f^{-1}Z).$$

Corollaire 1.- Si f est cohomologiquement transversal à Z, ou en général si f est plat, on a : $f^*C_Z = C_{f^*Z}$ *, où* f^*Z *désigne la variété image réciproque de Z.*

En effet, soit V_i une composante irréductible de f^*Z, de point générique v_i, on a dans ce cas : la longueur de $\mathcal{O}_{f^*Z,v_i}$ est égale à la multiplicité de V_i dans $f^{-1}Z$.

Proposition 4.- Deux cycles équivalents dans X ont la même classe fondamentale en cohomologie de Hodge.

Soit P^1 la droite projective, et considérons la résolution de $\Omega^1_{P^1}$ par $K^{\cdot}_{P^1}$. On a : $-\,\mathrm{Rés}_0\left(\frac{dT}{T(T-1)}\right) = \mathrm{Rés}_1\left(\frac{dT}{T(T-1)}\right) = 1$. Le résidu est nul partout ailleurs, d'où:

$$-\,\delta_{P^1}\left(\frac{dT}{T(T-1)}\right) = \begin{bmatrix} dT \\ T-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dT \\ T \end{bmatrix} = C_1 - C_0 .$$

Les classes de deux points de P^1 sont donc cohomologues.

La projection canonique $p : X \times P^1 \to P^1$ étant plate, on a, pour tout point $t \in P^1$, $C_{X_t} = p^*(C_t)$,et les classes de deux fibres de p sont donc cohomologues aussi.

Soient maintenant deux cycles Y et Z équivalents dans X, D un cycle de $X \times P^1$ tel que $D.X_0$ et $D.X_1$ soient définis, et correspondent resp. à Y et Z par les immersions $i_0 : X \to X\times P^1$ tel que $i_0(x) = x\times 0$ resp. i_1 tel que $i_1(x) = x\times 1$. On a : $C_Y = i_0^* C_{D.X_0} = i_0^*(C_D \smile C_{X_0}) = i_0^*(C_D \smile C_{X_1}) = C_Z$ puisque $i_0^* = i_1^* = (p^*)^{-1}$.

Proposition 5.- La classe fondamentale définit par linéarité un morphisme C_X : $A^{\cdot}(X) \to \mathbb{H}^{\cdot}(X,\Omega^{\cdot}_X)$ *de l'anneau de Chow dans la cohomologie de Hodge.*

3.4.- <u>CAS D'UN CORPS DE BASE QUELCONQUE</u>.-

Au N° 3.1, la construction de la classe fondamentale n'utilise aucune hypothèse sur le corps de base, c'est uniquement pour démontrer l'unicité que l'on a utilisé la condition sur k d'être parfait. Pour démontrer l'unicité, lorsque k est quelconque, il suffit d'appliquer la proposition suivante, lorsque k est une extension algébriquement close de k, pour se ramener à la démonstration de l'unicité dans le cas parfait :

Proposition.- Soient K une extension parfaite de k, $i : Y \to X$ *une immersion fermée d'une variété Y dans une variété lisse X, et* $i_K : Y_K \to X_K$ *l'immersion déduite par changement de base.*

i) Si $\mathcal{F}$ désigne un faisceau quasi-cohérent sur X, *on a pour tout entier* p:

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_{X_K}}(\mathcal{O}_{Y_K},\mathcal{F}_K) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_{X_K}}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{F}) \otimes_k K.$$

Le morphisme canonique : $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{Y_K},\mathcal{F}_K)$ *est donc injectif.*

ii) L'image réciproque du morphisme C_Y *dans* $K^{\cdot,*}_{Y_{Y_K}}$ *est égale à* C_{Y_K}.

On vérifie i) sans difficulté en considérant une résolution localement libre de $\mathcal{O}_Y$. Pour démontrer ii), on peut supposer Y irréductible de point générique y. Soient $(t_1,\dots,t_p)$ un s.r.p. de $\mathcal{O}_{X,y}$ qui définit donc la sous-variété intègre Y_r de support Y, en y.

Soit $g : X_K = X \times_k K \to X$ le morphisme canonique. Les éléments $t'_i = g^*(t_i)$ pour $i \in [1,p]$ forment une suite régulière qui définit $Y_{r,K} = g^*(Y_r)$ dans X_K. La sous-variété $Y_{r,K}$ peut avoir plusieurs composantes irréductibles (Y_i) pour $i \in [1,s]$ de points génériques (y_i) au-dessus de y.

La classe fondamentale $C_{Y_{r,K}} : \Omega^m_{Y_{r,K}} \to \underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathcal{O}_{Y_{r,K}},\Omega^{m+p}_{X_K})$ où dim Y = m se représente d'après le corollaire au théorème 3.3 par le symbole $\begin{bmatrix} \Lambda_i dt'_i \\ \dots t'_i \dots \end{bmatrix} \in H^p_{Y_{r,K}}(\Omega^p_{X_K})$, elle est donc égale à l'image réciproque de C_{Y_r}.

Il reste à calculer la longueur de $\mathcal{O}_{Y_K,y_i}$. Désignons $\mathcal{O}_{Y,y}$ par A, $\mathcal{O}_{Y_K,y_i}$ par A_i, par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et par $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m} \otimes_k K)A_i$ l'idéal qui définit $Y_{r,K}$ en y_i. Le groupe gradué $\Sigma_j \frac{\mathfrak{m}^j}{\mathfrak{m}^{j+1}}$ est un k(y) espace vectoriel de dimension égale à lg(A). L'image de $A_i \otimes_A \mathfrak{m}^j$ dans A_i s'identifie à l'idéal $\mathfrak{m}_i^j$, et le groupe gradué $A_i/\mathfrak{m}_i \otimes_{k(y)} \Sigma_j \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ est isomorphe au groupe gradué $\Sigma_j \mathfrak{m}_i^j/\mathfrak{m}_i^{j+1}$ qui est donc un $A_i/\mathfrak{m}_i$ module libre de dimension égale à lg(A).

On en déduit que $C_{Y_K} = \lg(A) C_{Y_{r,K}}$ est l'image réciproque de C_Y, ce qui achève la démonstration de la proposition.

<u>Remarque 1</u>.- *Le théorème 3.3 et son corollaire sont vrais, même si le corps de base n'est pas nécessairement parfait.*

En effet, avec les notations de ce théorème, les éléments $C_Y \smile C_Z$ et $C_{Y.Z}$ sont dans $\mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{O}_{Y\cap Z},\Omega^{p+q}_X)$ en appliquant l'assertion i) de la proposition pour une extension algébriquement close de k, on se ramène à démontrer l'égalité de ces deux éléments, au cas où le corps de base est parfait.

On en déduit :

<u>Remarque 2</u>.- *La proposition est vraie pour toute extension* K *de* $\bar{k}$, *non nécessairement parfaite.*

<u>Remarque 3</u>.- *Lorsque* k *n'est pas parfait, la condition d'unicité devient : il existe une classe fondamentale unique* C_Y *dont l'image réciproque, pour toute extension parfaite* K *de* k, *est égale à* C_{Y_K}.

IV.- LA CLASSE FONDAMENTALE RELATIVE

Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse de variétés. Dans ce paragraphe on cherche à associer à tout cycle Y dans X, une classe fondamentale dans $H^*(X, \Omega^*_{X/S})$. On énonce la "propriété de la trace" qui implique l'unicité de la classe $C_{Y/S}$ pour Y plat sur S. Puis on établit différents théorèmes d'existence dans le cas d'une base S lisse, normale ou réduite.

4.1.- COMPLEXE DUALISANT RELATIF ET MORPHISME TRACE

Définition.- Soit $f : X \to S$ *un morphisme de type fini de préschémas noethériens admettant des complexes résiduels* $K^\bullet_X$ *et* $K^\bullet_S$. *On appelle complexe dualisant relatif le complexe* $f^!\mathcal{O}_S = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\underline{L}}\, f^*K^\bullet_S, K^\bullet_X)$ *où* $f^!$ *désigne l'image réciproque extraordinaire ([RD], ch. VII, cor. 3.4, p.383).*

Remarque 1.- En général, on désigne le complexe dualisant relatif dans la catégorie dérivée par $\mathcal{D}^\bullet_{X/S}$, si f est plat on considère toujours le complexe :

$K^\bullet_{X/S} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(f^*K^\bullet_S, K^\bullet_X) \simeq \prod_{s\in S} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X \otimes J(s), \sum_{x\in X} J(x))$, égal en degré k à $\sum_h \underline{\mathrm{Hom}}(f^*K^h_S, K^{h+k}_X)$.

Soient s_i un point de codim i dans S, et x_j un point de codim j dans X (notations que l'on respectera dans la suite), le module : $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X \otimes f^{-1}(J(s_i)), J(x_j))$ est nul si $f(x_j) \notin \overline{s_i}$, il ne peut être non nul que pour $j \geq i$. On en déduit que si f est plat de dim. relative n et si $\dim.S = r$, le complexe $K^\bullet_{X/S}$ est concentré sur les degrés $[-n,+r]$.

Si f est lisse de dim relative n, $K^\bullet_{X/S}$ est une résolution flasque de $\Omega^n_{X/S}[n]$.

Remarque 2.- Soit $f : X \to S$ un morphisme plat. Si $i : Y \to X$ est une immersion fermée telle que $g = f \circ i$ soit plat, on a :

$$K^\bullet_{Y/S} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, K^\bullet_{X/S}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(g^*K^\bullet_S, K^\bullet_Y)$$

En effet, on définit un morphisme : $\underline{\mathrm{Hom}}(g^*K^\bullet_S, K^\bullet_Y) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K^\bullet_{X/S})$ qui induit pour tous points $s \in S$ et $x \in X$ l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y,x}, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes J(s), J(x)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y,x} \otimes J(s), \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y,x}, J(x))).$$

Proposition 2.- Soient $g : Z \to S$ *un morphisme lisse de variétés, de dim relative* n *et* $f : Y \to Z$ *un morphisme fini. La trace de* f, $\mathrm{Tr}\, f : f_* \mathcal{D}^\bullet_{Y/S} \to \mathcal{D}^\bullet_{Z/S}$ *induit un isomorphisme canonique :*

$$T_f : \underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y/S}, \mathcal{D}^\bullet_{Y/S}[-n]) \xrightarrow{\sim} \overline{f}^* \underline{\mathrm{Hom}}(f_*\Omega^n_{Y/S}, \Omega^n_{Z/S})$$

où $\overline{f}^*$ *désigne le foncteur* $\mathcal{O}_Y \underset{f^{-1}f_*\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}$.

Cette proposition énonce la propriété de dualité du complexe dualisant relatif ([RD] ch.VII, cor.3.4).

On trouve dans [25] une formule de changement de base pour $\mathcal{D}^\bullet_{Y/S}$ dans le cas plat, ou,plus généralement le cas cohomologiquement transversal à Y sur S.

On admet la proposition suivante :

Proposition 3.- Avec les notations de la proposition 2, soient $h : S' \to S$ *un morphisme cohomologiquement transversal à* f, $g' : Z' \to S'$ *et* $f' : Y' \to Z'$ *les morphismes qui se déduisent de* g *et* f *par le changement de base* h, *et enfin les morphismes canoniques* $h' : Z' \to Z$ *et* $h'' : Y' \to Y$. *Alors le diagramme suivant, où* h^* *et* $\tilde{h}$ *sont définis canoniquement, est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
h''^* \underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y/S}, \mathcal{D}^\bullet_{Y/S}[-n]) \arrow[r, "\sim", "T_f"'] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & h''^*\overline{f}^* \underline{\mathrm{Hom}}_Z(f_*\Omega^n_{Y/S}, \Omega^n_{Z/S}) \arrow[d, "h^*"] \\
\underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y'/S'}, \mathcal{D}^\bullet_{Y'/S'}[-n]) \arrow[r, "\sim", "T_{f'}"'] & \overline{f'}^* \underline{\mathrm{Hom}}_Z(f'_*\Omega^n_{Y'/S'}, \Omega^n_{Z'/S'})
\end{tikzcd}$$

(Le morphisme h^* *peut être défini même si* h *est quelconque).*

Proposition 4.- Avec les notations de la proposition 2, soient

$$\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y/S}, \mathcal{D}^\bullet_{Y/S}[-n]) \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \underline{\mathrm{Hom}}(f_*\Omega^n_{Y/S}, \Omega^n_{Z/S}).$$

i) Soient U *un ouvert de* Y *et* F *un fermé de* Z *tel que* $\underline{H}^0_F(\mathcal{O}_Z) = 0$. *Alors le morphisme suivant :*

$$\Gamma(U, \mathcal{E}) \to \Gamma(U - f^{-1}(F), \mathcal{E}) \quad \text{est injectif.}$$

ii) Supposons S *réduit, et soient* s_λ *pour* $\lambda \in \Lambda$ *les points génériques de* S; *et* $\mathcal{H}_\lambda$ *les faisceaux déduits de* $\mathcal{H}$ *par le changement de base :* $\mathrm{Spec}(k(s_\lambda)) \to S$. *Alors il existe au plus* 1 *section de* $\mathcal{H}$ *qui induit pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *une section donnée de* $\mathcal{H}_\lambda$.

Pour démontrer i), on peut supposer S et Z affines, et l'ouvert $U = D(u)$ défini par un élément u dans $\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)$. Soit $\mathcal{J}_F$ l'idéal de définition de F dans Z. Les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\overline{f}^*\mathcal{H}$ étant isomorphes, il suffit de démontrer pour toute section φ de $\overline{f}^*\mathcal{H}$, l'implication suivante : $\{\forall t \in \mathcal{J}_F, \exists m \in \mathbb{N} : (ut)^m\varphi = 0\} \Longrightarrow \{\exists m' \in \mathbb{N} : u^{m'}\varphi = 0\}$ or, on a pour toute forme $W \in \Gamma\Omega^n_{Y/S}$: $((ut)^m\varphi)(W) = \varphi((ut)^m W) = t^m((u^m\varphi)(W)) = 0$, où l'entier m dépend de t et de W. Soit r le plus grand entier m lorsque t parcourt un système de générateurs de $\mathcal{J}_F$, on a : $\mathcal{J}^r_F((u^r\varphi)(W)) = 0$ et du fait que $\underline{H}^0_F(\mathcal{O}_Z) = 0$, on déduit que $(u^r\varphi)(W) = 0$. Soit m' le plus grand des entiers r lorsque W parcourt un système de générateurs de $\Gamma\Omega^n_{Y/S}$, on a $u^{m'}\varphi = 0$.

L'assertion ii) se déduit facilement de i) car pour tout fermé F ne contenant aucun des points s_λ, on a : $\underline{H}^0_{g^{-1}_{(F)}}(\mathcal{O}_Z) = 0$.

<u>La propriété de la trace</u>.-

<u>Définition 2</u>.- Soit Y *une variété au-dessus d'une variété* S. *On dit qu'<u>un élément</u>* $\varphi \in \Gamma\ \underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y/S}, \mathcal{D}^\cdot_{Y/S}[-n])$ *où* r *est la dim relative* (dim Y - dim S) *de* Y *sur* S, *<u>vérifie la propriété de la trace</u>, si pour tout ouvert* U *de* Y *et tout morphisme fini et plat* $f : U \to Z$ *de* U *dans une variété* Z *lisse sur* S, *l'élément* $T_f(\varphi) \in \mathrm{Hom}(f_*\Omega^n_{U/S}, \Omega^n_{Z/S})$ *induit sur* $f_*f^*\Omega^n_{Z/S}$ *le morphisme* : $\mathrm{Tr}\ f \otimes \mathrm{Id} : f_*\mathcal{O}_U \otimes \Omega^n_{Z/S} \to \Omega^n_{Z/S}$.

<u>Unicité de la classe fondamentale</u>.-

<u>Proposition 5</u>.- Avec les notations de la définition 2, supposons S *réduite* (*) *et* Y *équidimensionnelle sur* S. *Soient* $(s_i)_{i\in I}$ *les points génériques de* S.

i) Supposons $k(s_i)_{i\in I}$ *parfaits. Il existe au plus 1 élément* $\varphi \in \Gamma(\underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y/S}, \mathcal{D}^\cdot_{Y/S}[-n]))$ *qui vérifie la propriété de la trace (déf. 2). Un tel élément, quand il existe, s'appelle la classe fondamentale de* Y *sur* S.

ii) Si tous les corps résiduels ne sont pas parfaits, soient K_i *des extensions parfaites de* $k(s_i)$ *, et* $\Sigma_i Y_i$ *l'image réciproque de* Y *par le morphisme de changement de base* $\Sigma_i K_i \to S$ *. Alors il existe au plus 1 élément* $\varphi \in \Gamma(\underline{\mathrm{Ext}}^0(\Omega^n_{Y/S}, \mathcal{D}^\cdot_{Y/S}[-n])$

* Si S n'est pas réduite, on peut modifier légèrement la propriété de la trace pour obtenir l'unicité de la classe fondamentale (supposer Y plat sur S, et exiger la propriété pour les complétés aux points de Y pour obtenir assez de morphismes finis). (voir l'Appendice).

dont l'image réciproque dans $\Gamma(\underline{\mathrm{Ext}}^{o}(\Omega^{n}_{Y_i/K_i},\mathcal{D}^{\bullet}_{Y_i/K_i}[-n]))$ *vérifie la propriété de la trace. Un tel élément quand il existe, s'appelle la classe fondamentale de* Y *sur* S .

Démonstration i).- Tout point de Y admet un voisinage quasi-fini sur $S \times k^{n}$ ([EGA] IV, Prop. 13.3.1). Etant donné que le morphisme quasi-fini admet une factorisation (de Zariski) en une immersion ouverte et un morphisme fini, on peut appliquer la proposition 4, et se ramener à vérifier l'unicité au voisinage des points génériques de Y, donc sur l'image réciproque de Y par le morphisme de changement de base $\coprod_i k(s_i) \to S$, ce qui nous ramène au cas absolu vu au ch.III,N°4.1).

La démonstration de ii) procède de la même manière que i).

Dans la suite, on va établir des théorèmes d'existence de la classe fondamentale $C_{Y/S}$. Voici un schéma des résultats que l'on obtient :

1.- *La base* S *est quelconque : définir* $C_{Y/S}$ *pour* Y *intersection complète relative et plate sur* S.

2.- *La base* S *est lisse : définir* $C_{Y/S}$ *pour toute variété* Y *sur* S.

3.- *La base* S *est normale : définir* $C_{Y/S}$ *pour* Y *équidimensionnelle sur* S.

4.- *La base* S *est réduite : définir* $C_{Y/S}$ *pour* Y *plate sur* S.

Existence de la classe fondamentale dans le cas d'une intersection complète relative locale

Proposition 6.- Soit $f : Y \to S$ *un morphisme plat, localement intersection complète relative, de dim relative* n. *Il existe un morphisme canonique* $C_{Y/S} : \Omega^{n}_{Y/S}[n] \to K^{\bullet}_{Y/S}$ *qui vérifie la propriété de la trace (déf.2). Si on ne suppose plus* f *plat, on trouve* $C_{Y/S}$ *dans* $\Gamma(Y,\underline{\mathrm{Ext}}^{o}(\Omega^{n}_{Y/S}[n],\mathcal{D}^{\bullet}_{Y/S})))$.

1.- Construction locale de $C_{Y/S}$.- Supposons qu'il existe une immersion régulière $i : Y \to X$ de Y dans une variété lisse X sur S, et soit $\mathcal{J}$ l'idéal de définition de Y dans X. Soit p la codim de Y dans X. On déduit de la suite exacte : $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{2} \to i^{*}\Omega^{1}_{X/S} \to \Omega^{1}_{Y/S} \to 0$ un morphisme : $\Omega^{n}_{Y/S} \to \Omega^{n+p}_{X/S} \otimes (\Lambda^{p}\mathcal{J}/\mathcal{J}^{2})^{\vee}$ et on obtient $C_{Y/S}$: $\Omega^{n}_{Y/S} \to \mathrm{Ext}^{p}(\mathcal{O}_{Y},\Omega^{n+p}_{X/S})$ en composant le morphisme ci-dessus, avec l'isomorphisme fondamental local ([RD], ch.III, prop. 7.2, p.179).

Si $(t_1,\dots,t_p)$ est une suite régulière qui engendre $\mathcal{J}$, l'image de $C_{Y/S}$ dans $\mathrm{Hom}(\Omega^{n}_{X/S},\underline{\mathrm{Ext}}^{p}(\mathcal{O}_{Y},\Omega^{n+p}_{X/S})) \simeq \Gamma(Y,\underline{\mathrm{Ext}}^{p}(\mathcal{O}_{Y},\Omega^{p}_{X/S}))$ se représente par le symbole :

$$\begin{bmatrix} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p \\ t_1 \;\dots\dots\; t_p \end{bmatrix}.$$

2.- Invariance.- Soit $i : Y \to X$ (resp. $i' : Y \to X'$) une immersion fermée régulière dans une variété X lisse sur S de dim relative $n+p$ (resp. X' lisse sur S de dim relative $n+p'$).

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[r, "j"] \arrow[dl, shift left, "r"] & X'' \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "q'"] & \\ Y \arrow[ur, shift left, "s"] \arrow[urr, "i''"] \arrow[rrr, "i"] \arrow[drr, "i'"'] & & & X \\ & & X' & \end{tikzcd}$$

Soient $X'' = X' \underset{S}{\times} X$ le produit fibré muni des projections q sur X et q' sur X' et $Y' = Y \underset{S}{\times} X' \simeq Y \underset{X}{\times} X''$ muni de la projection r sur Y et de l'immersion fermée régulière j, image réciproque de i par le changement de base $X'' \to X$. La section $s : Y \to Y'$ du morphisme lisse r, qui relève $i' : Y \to X'$ est localement une immersion régulière. On déduit que le morphisme $i'' = i \times i' = j \circ s$ est aussi localement une immersion régulière.
Il suffit de comparer $C_{Y/S}(i'') : \Omega^n_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Ext}}^{n+p+p'}_{\mathcal{O}_{X''}}(\mathcal{O}_Y, \Omega^{2n+p+p'}_{X''/S})$ et $C_{Y/S}(i) : \Omega^n_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \Omega^{n+p}_{X/S})$ (resp. $C_{Y/S}(i')$).On peut vérifier que l'on a : $\mathrm{Rés}^q_{i'',i} \circ C_{Y/S}(i'') = C_{Y/S}(i)$.

3.- La propriété de la trace.- Soit $h : U \to Z$ un morphisme fini et plat d'un ouvert U de Y dans une variété Z lisse sur S de dim relative n. Le problème étant local sur Z, on suppose Z affine. Soit une factorisation de h par une immersion fermée : $i : U \to X$ dans une variété X lisse sur Z. D'après ([EGA] IV, prop. 19.3.2 et 11.3.8) le morphisme i est nécessairement localement une immersion régulière. Supposons U défini par la suite régulière $(t_1,\dots,t_p) \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ et soit $q : X \to Z$ la projection. Pour toute forme $W \in \Gamma\Omega^n_{Z/S}$ et $a \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, on a :

$$\mathrm{Rés}^q_i \circ C_{Y/S}(a/Y\ W) = \mathrm{Rés}\begin{bmatrix} aq^*(W)dt_1 \wedge\dots\wedge dt_p \\ t_1 \dots\dots\dots t_p \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\ h(a/Y)W.$$

Corollaire.- Soit $h : Y \to Z$ *un morphisme fini et plat, intersection complète relative sur la variété* Z *lisse sur* S *de dim relative* n. *Alors il existe un morphisme canonique* $\mathrm{Tr}\ h : h_*\Omega^n_{Y/S} \to \Omega^n_{Z/S}$.

Il suffit d'appliquer l'isomorphisme T_h de la proposition 2 à la classe fondamentale $C_{Y/S}$.

4.2.- EXISTENCE DE LA CLASSE FONDAMENTALE DANS LE CAS D'UNE BASE LISSE

Proposition 1.- Soit $f : Y \to S$ *un morphisme d'une variété* Y *de dim pure* $n+r$ *dans une variété lisse* S *de dim* r. *Alors il existe une classe fondamentale* $C_{Y/S}$

dans $\Gamma(Y, \underline{\mathrm{Ext}}^{o}(\Omega^{n}_{Y/S}[n], \mathcal{D}^{\bullet}_{Y/S}))$ *qui vérifie la propriété de la trace.*

Construction locale de $C_{Y/S}$.- Supposons qu'il existe une immersion $i : Y \to X$ de codim p dans une variété X lisse sur S, et soit $C_{Y/S}$ l'image de la classe fondamentale absolue C_Y par le morphisme : $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^p_X) \to \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^p_{X/S})$.

Lemme.- *Le morphisme* $\Omega^n_{X/S} \to \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^{n+p}_{X/S})$ *opérant par cup-produit avec la classe* $C_{Y/S}$ *induit un morphisme* $C_{Y/S}: i_* \Omega^n_{Y/S} \to \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^{n+p}_{X/S})$.

On peut supposer Y réduit. Le morphisme $H^p_Y(X, \Omega^n_{X/S}) \to \Sigma_j H^p_{y^j}(\Omega^n_{X/S})$ étant injectif lorsque y^j parcourt les points génériques de Y, on se ramène à faire un raisonnement local au voisinage des points y_j et identique à celui du cas absolu(III.4.1).

On en déduit que $C_{Y/S} \in \mathrm{Ext}^p(\Omega^n_{Y/S}, \Omega^{n+p}_{X/S})$; pour une forme $\omega \in \Gamma\, \Omega^n_{Y/S}$, on note $C_{Y/S}(\omega)$ par $\omega \smile C_{Y/S}$ ou $\omega \wedge C_{Y/S}$.

Invariance.- Il suffit de considérer une factorisation de i en une immersion $i' : Y \to X'$ et une projection lisse $p : X' \to X$, alors les classes $C_{Y/S}(i)$ et $C_{Y/S}(i')$ se correspondent par le morphisme $\mathrm{Rés}^p_{i',i}$.

La propriété de la trace.- Soient U un ouvert de Y et $h : U \to Z$ un morphisme fini et plat sur la variété Z lisse sur S, de dim relative n. On se ramène à faire un raisonnement au voisinage des points génériques de U, donc au cas où U est une intersection complète relative sur S.

Remarque.- Si le morphisme $Y \to S$ n'est pas dominant, la classe fondamentale $C_{Y/S}$ est nulle. En effet, au voisinage d'un point générique y dans Y, plongé dans X, on peut supposer l'un des éléments t_i d'un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$ provenant d'une section locale sur S, alors $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p$ est nul dans $\Omega^p_{X/S}$.

Corollaire.- *i) Si* Y *est plat sur* S*, on peut définir la classe fondamentale comme un morphisme* $C_{Y/S}: \Omega^n_{Y/S}[n] \to K^{\bullet}_{Y/S}$ *qui vérifie la propriété de la trace.*

ii) Si Y *est plongé dans une variété* X *lisse sur* S*, de dim relative* $n+p$ *, on peut définir un morphisme* $C_{Y/S} : \Omega^n_{Y/S}[n] \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K^{\bullet}_X(\Omega^{n+p}_{X/S})[-r])$ *. Si de plus* Y *est équidim. sur* S*, on peut définir la classe fondamentale comme un morphisme* $C_{Y/S} : \Omega^n_{Y/S}[n] \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K^{\bullet}_{X/S})$ *qui vérifie la propriété de la trace.*

Démonstration. i).- D'après la remarque 4.1, $K^{\bullet}_{Y/S}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K^{\bullet}_{X/S})$ c'est un complexe nul en degré $< n$, on définit $C_{Y/S}$ comme composé des morphismes suivants :

$$\Omega^n_{Y/S}[n] \to \underline{\mathrm{Ext}}^{-n}(\mathcal{O}_Y, K^{\bullet}_{Y/S}) \to K^{\bullet}_{Y/S} .$$

Démonstration ii).- Là aussi le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K^\cdot_X(\Omega^{n+p}_{X/S})[-r])$ est nul en degré < n et si Y est de plus équidim. le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K^\cdot_{X/S})$ est aussi nul en degré < n.

Propriétés par rapport à un changement de base.-

Proposition 2.- Soient X *une variété lisse sur* S *de dim relative* n+p *et* Y *une sous-variété de* X *de codim* p, *et équidim. sur* S. *Pour toute sous-variété lisse* Z *dans* S , *l'image de* $c_{Y/S}$ *par le morphisme canonique* $H^p_Y(X,\Omega^p_{X/S}) \to H^p_{Y_Z}(X_Z,\Omega^p_{X_Z/Z})$ *est égale à la classe fondamentale* $c_{Y.X_Z}$ *du cycle intersection* $Y.X_Z$ *dans* X.
On trouve la démonstration dans [T].

Corollaire 1-*Soient* z *le point générique de* Z *et* K *une extension de* k(z). *L'image réciproque* $(c_{Y/S})_K$ *sur* K *de* $c_{Y/S}$ *est égale à* $\Sigma n_\lambda c_{Y_\lambda,K}$ *où* $c_{Y_\lambda,K}$ *désigne l'image réciproque de* $c_{Y_\lambda/S}$. *Si, de plus, il existe un ouvert de* Y *qui rencontre tous les* Y_λ *et qui est cohomologiquement transversal sur* S *à* K, *on a* : $(c_{Y/S})_K = c_{Y_K}$; *en particulier, c'est vrai si* Y *est plat sur* S.

Si K = k(z), il suffit d'appliquer la proposition et pour une extension quelconque de k(z), on applique la proposition (III.4.1)

Soient y_λ le point générique de Y_λ , et $s_1,\ldots,s_q$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{S,z}$. La multiplicité n_λ est donnée par la formule des Tor :

$$\Sigma(-1)^i \lg \mathrm{Tor}^i_{\mathcal{O}_{X,y_\lambda}}(\mathcal{O}_{Y,y_\lambda},\mathcal{O}_{X,y_\lambda}/(s_1,\ldots,s_q))$$

Si Y est cohomologiquement transversal à K en y, cette formule se réduit à : $\lg(\mathcal{O}_{Y,y_\lambda}/(s_1,\ldots,s_q)) = n_\lambda$; en particulier,c'est le cas si Y est plat sur S.

Corollaire.- Avec les notations de la proposition 1, soient $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *les composantes irréductibles de* Y, *de points génériques* y_λ. *La classe* $c_{Y/S}$ *est l'unique section de* $\underline{\mathrm{Ext}}^o(\Omega^n_{Y/S}[n],\mathcal{D}^\cdot_{Y/S})$ *qui induit* 0 *au voisinage de* y_λ *si* Y_λ *ne domine pas une composante de* S, *et qui induit* $c_{Y_{s_\lambda}} \in \mathrm{Hom}(\Omega^n_{Y_{s_\lambda}}[n],K^\cdot_{Y_{s_\lambda}})$ *si l'image de* y_λ *est le point générique* s_λ *d'une composante de* S.

Il suffit d'appliquer la proposition 4.1.4.

Proposition 3.- Soient g : Z → S *un morphisme lisse de dim relative* n, *et* h : Y → Z *un morphisme fini et équidimensionnel. Il existe un morphisme unique* $\mathrm{Tr}\ h : h_*\Omega^n_{Y/S} \to \Omega^n_{Z/S}$ *qui induit en tout point générique* z_λ *d'une composante de* Z, *le morphisme trace* : $\mathrm{Tr}\ h_\lambda : h_{\lambda *}\Omega^n_{Y_{z_\lambda}/k(g(z_\lambda))} \to \Omega^n_{k(z_\lambda)/k(g(z_\lambda))}$.

Il suffit d'appliquer les propositions 4.1.2 et 4.1.4.

Remarque.- Pour toutes formes $\omega \in \Gamma\Omega^n_{Y/S}$ et $\varphi \in \Gamma\Omega^r_S$, soit $\omega \otimes \varphi \in \Gamma\Omega^{n+r}_Y$, on a : $\mathrm{Tr}\ h(\omega \otimes \varphi) = \mathrm{Tr}\ h(\omega) \otimes \varphi \in \Gamma\Omega^{n+r}_Z$.

4.3.- EXISTENCE DE LA CLASSE FONDAMENTALE DANS LE CAS D'UNE BASE NORMALE

Supposons dans la suite le corps de base parfait.

Proposition.- Soient Z *une variété lisse sur une variété normale* S*, de dim relative* n*, et* $h : Y \to Z$ *un morphisme fini et équidimensionnel.*

i) Alors, il existe un morphisme trace unique :

$$\mathrm{Tr}\ h : h_*\Omega^n_{Y/S} \to \Omega^n_{Z/S}$$

qui est compatible avec tout changement de base plat en une base S' *normale, et qui induit le morphisme trace défini dans 4.2 lorsque* S' *est lisse.*

ii) Si Y *est plat sur* S*, pour tout point de* S *à valeur dans un corps* K*, le morphisme* Tr h *induit sur* K *le morphisme* $\mathrm{Tr}\ h_K$ *. (dém. de ii en car.0).*

Démonstration i)- Le corps de base k étant parfait, l'ouvert U des points lisses de S, est de codim 2 dans S. Si la trace existe, elle est unique à induire sur U le morphisme trace défini dans 4.2.

Existence.- On peut supposer S et Z affines et $\Omega^n_{Z/S}$ libre de base $dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_n$. Soit $\omega \in \Gamma\Omega^n_{Y/S}$, on a : $\mathrm{Tr}\ h/Y_U(\omega) = a_U \Lambda_i\ dX_i$ où $a_U \in \Gamma(Z_U, \mathcal{O}_Z)$; on peut prolonger a_U en une section a régulière sur Z, on définit :

$$\mathrm{Tr}\ h(\omega) = a\ \Lambda_i\ dX_i$$

Les propriétés par changement de base plat, se déduisent du cas lisse.

Démonstration ii) - Soient S' une désingularisée de S, et un point de S' à valeur dans une extension K' de K, au-dessus du point de S dans K. Soient π' : Spec K' $\to$ Spec K le morphisme associé à l'extension et φ le morphisme de Spec K dans S. On note $h_K : Y_K \to Z_K$ le morphisme déduit de h par le changement de base φ. Il s'agit de démontrer : $\mathrm{Tr}\ h_K = \varphi^*(\mathrm{Tr}\ h)$ et il suffit de le faire pour l'image réciproque par π', ce qui nous ramène au cas d'une base lisse S' (voir corol. 1 à la prop. 4.2.2).

Théorème.- Soit Y *une variété équidimensionnelle de dim relative* n *sur une variété normale* S*. Il existe une classe fondamentale unique* $c_{Y/S} \in \Gamma(Y, \mathcal{E})$ *où*

Il existe une classe fondamentale unique $C_{Y/S} \in \Gamma(Y,\mathcal{E})$ *où* $\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Ext}}^{\circ}(\Omega^n_{Y/S}[n], \mathcal{D}^{\bullet}_{Y/S})$ *qui est compatible avec tout changement de base plat en une base* S' *normale et qui induit la classe définie dans 4.2 si* S' *est lisse.*

Tout point de Y admet un voisinage quasi-fini sur $S \times k^n$ ([EGA] IV, prop. 13.3.1). On va construire $C_{Y/S}$ localement sur S et sur Y, donc en choisissant des recouvrements affines adéquats de S et de Y, on peut supposer S et Y affines. D'après le théorème de Zariski, on peut réaliser Y comme un ouvert dense d'une variété Y_1 finie sur $S \times k^n$. Soit h_1 le morphisme $Y_1 \to S \times k^n$, le morphisme Tr h_1 induit d'après l'isomorphisme T_{h_1} de la proposition 4.1.2, une classe fondamentale $C_{Y/S}$ qui est unique à induire la classe fondamentale sur l'ouvert lisse de S (d'après la proposition 4.1.4). Ces différentes classes se recollent donc bien lorsqu'on parcourt les différents ouverts des recouvrements de Y et de S. La propriété par changement de base se déduit du cas lisse.

Un contre-exemple dans le cas d'une base non normale.-

Supposons la base S affine intègre et non normale. Soient Y la normalisée de S qui est équidimensionnelle sur S, et $i : Y \to X$ une immersion fermée dans une variété X affine et lisse sur S de dim relative n. Supposons qu'il existe une classe fondamentale $C_{Y/S} \in H^n_Y(X,\Omega^n_{X/S})$ qui induit la classe canonique sur l'ouvert lisse de S.

Il existe un entier m assez grand tel que $C_{Y/S} \in \mathrm{Ext}^n(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m, \Omega^n_{X/S})$ où $\mathcal{J}$ désigne l'idéal de Y dans X.

Soit $h : (Y,\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m) \to (S,\mathcal{O}_S)$ le morphisme induit par la projection de X sur S, l'isomorphisme résidu :

$$\mathrm{Ext}^n(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m, {}^n_{X/S}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(h_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m),\mathcal{O}_S)$$

montre que notre assertion revient à dire qu'il existe un morphisme : $h_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m) \to \mathcal{O}_S$ qui induit la trace de h sur l'ouvert lisse de S, ce qui est absurde.

4.4.- EXISTENCE DANS LE CAS D'UNE BASE REDUITE

LEMME 1.- *i) Soient* X *une variété lisse sur une variété* S, *une sous-variété fermée* Y *de codim* p *dans* X, *un point* s *dans* S *et* y *l'un des points génériques de la fibre* Y_s , *des éléments* $t_1,\ldots,t_p \in \mathcal{O}_{X,y}$ *qui induisent un s.r.p. dans* $\mathcal{O}_{X_{s,y}}$ *et* $p : Y \to Z$ *un morphisme lisse de* X *sur une variété* Z *lisse sur* S *et de dim relative* n , *tel que la restriction de* p *à* Y *soit quasi-finie et séparable en* y.

Alors on a :

$$\Omega^n_{Y/S,y} = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \Omega^n_{Z/S} + \Sigma\, \mathcal{O}_{Y,y}\, dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_j} \wedge \Omega^{n-j}_{Z/S}$$

où : $i_1 < \ldots < i_j$ et $j \in [1,n]$.

ii) Il existe une famille finie $f_\lambda : Y \to Z$ *pour* $\lambda \in \Lambda$ *, de morphismes quasi-finis et séparables en* y *telle que l'on ait :*

$$\Omega^n_{Y/S,y} = \Sigma_\lambda (f^*_\lambda \Omega^n_{Z/S})_y.$$

Démonstration i) Soit $\mathcal{I} = \Sigma_i t_i \mathcal{O}_{X,y}$ l'idéal engendré par les t_i ; son image $\mathcal{I}_s = \Sigma\, t_{i,s} \mathcal{O}_{X_{s,y}}$ dans $\mathcal{O}_{X_{s,y}}$ définit la sous-variété réduite $Y_{s\,\text{réd}}$ associée à Y_s dans X_s. La restriction f de p à Y induit sur $Y_{s\,\text{réd}}$, au voisinage de y, un revêtement étale de Z_s, on en déduit :

$$\Omega^1_{Y/S,y} = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \Omega^1_{Z/S} + \Sigma\, \mathcal{O}_{Y,y}\, dt_i + \mathcal{I}\,\Omega^1_{Y/S,y} + \mathfrak{m}_s \Omega^1_{Y/S,y}$$

où $\mathfrak{m}_s$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,s}$.

L'idéal $\mathcal{I}_s$ étant nilpotent dans $\mathcal{O}_{X_s}$, il existe un entier h assez grand tel que $\mathcal{I}^h$ soit inclus dans $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X,y}$; donc en multipliant par $\mathcal{I}$ l'égalité précédente, on trouve par récurrence :

$$\Omega^1_{Y/S,y} = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \Omega^1_{Z/S} + \Sigma\, \mathcal{O}_{Y,y} dt_i + \mathfrak{m}_s \Omega^1_{Y/S,y} .$$

Enfin en appliquant le lemme de Nakayama à l'idéal $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{Y,y}$ dans $\mathcal{O}_{Y,y}$ et au module $\Omega^1_{Y/S,y}$, on trouve :

$$\Omega^1_{Y/S,y} = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \Omega^1_{Z/S} + \Sigma\, \mathcal{O}_{Y,y}\, dt_i$$

En prenant la puissance extérieure n fois, on trouve l'énoncé du lemme i).

Démonstration ii) La construction faite pour démontrer l'unicité dans III, théorème 3.1, permet d'établir ce résultat.

Théorème.- Soit $f : Y \to S$ *un morphisme de variétés plat de dim relative* n. *Supposons* S *réduite et pour tout point* $s \in S$ *et tout point générique* y *de* Y_s *, l'extension* k(y) *de* k(s) *est séparable (par exemple* car(k)= 0). *Il existe une classe fondamentale unique* $c_{Y/S} : \Omega^n_{Y/S}[n] \to K^{\cdot}_{Y/S}$ *qui est compatible avec tout changement de base en une base* S' *réduite et qui induit la classe définie dans 4.2, si* S' *est lisse.*

On va déduire ce résultat du cas normal précédent. Considérons la normalisée $\pi : S' \to S$ de S et soient $f' : Y' \to S'$ le morphisme canonique déduit de f par le changement de base π, et $\pi' : Y' \to Y$ le morphisme canonique.

D'après I.1.3, on a la suite exacte : $0 \to N^{\cdot} \to \pi_* K^{\cdot}_{S'} \xrightarrow{\mathrm{Tr}\ \pi} K^{\cdot}_S \to 0$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f^*N^{\cdot} \arrow[r] & f^*\pi_* K^{\cdot}_{S'} \arrow[r, "f^*\mathrm{Tr}\ \pi"] \arrow[d, "C_{Y'/S'}(\pi'^*\omega)"'] & f^*K^{\cdot}_S \arrow[r] \arrow[d, dotted, "C_{Y/S}(\omega)"] & 0 \\
 & & \pi'_* K^{\cdot}_{Y'} \arrow[r, "\mathrm{Tr}\ \pi'"] & K^{\cdot}_Y &
\end{tikzcd}$$

où $\omega \in \Gamma\Omega^n_{Y/S}$ et $C_{Y/S}(\omega)$ est le morphisme que l'on cherche à définir.

L'isomorphisme : $f^*\pi_* K^{\cdot}_{S'} \simeq \pi'_* f'^* K^{\cdot}_{S'}$ permet d'appliquer le morphisme $C_{Y'/S'}(\pi'^*\omega)$, construit dans le cas normal, à $f^*\pi_* K^{\cdot}_{S'}$.

Pour démontrer que $C_{Y/S}(\omega)$ est bien défini, il suffit de vérifier que $\mathrm{Tr}\ \pi' \circ C_{Y'/S'}(\pi'^*\omega)$ s'annule sur $f^*N^{\cdot}$, ce qui fait l'objet du lemme suivant.

<u>Lemme 2</u>.- *Avec les notations du théorème, soient* S' *une variété normale, un morphisme* $\pi : S' \to S$, *le produit fibré* $Y' = Y \times_S S'$ *muni de la projection* π' *sur* Y. *(Le morphisme* $\mathrm{Tr}\ \pi$ *est défini bien qu'il ne soit pas nécessairement un morphisme de complexes). Pour toute forme* $\omega \in \Gamma\Omega^n_{Y/S}$ *et tout symbole* $\beta \in \Gamma\ K^{\cdot}_{S'}$, *tel que* $\mathrm{Tr}\ \pi(\beta) = 0$, *on a :* $\mathrm{Tr}\ \pi'(C_{Y'/S'}(\pi'^*\omega)(\beta)) = 0$.

<u>Démonstration 1</u>.- Le problème est local sur Y, et on peut supposer qu'il existe une factorisation de f en un morphisme lisse $g : Z \to S$ et un morphisme quasi-fini $h : Y \to Z$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dr, "g'"] \arrow[d, "\pi''"] & \\
Y' \arrow[ur, "h'"] \arrow[rr, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] & Z \arrow[dr, "g"] & S' \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & S
\end{tikzcd}$$

où $Z' = Z \times_S S'$.

Soient s un point de S et $(s_i^!)_{i\in I}$ un nombre fini de points fermés dans la fibre $\pi^{-1}(s)$.. On peut supposer que la fibre $g^{-1}(s)$ (resp. $f^{-1}(s)$) admet un point générique z (resp. y), et que le symbole β soit dans $\Sigma\, J(s_i^!)$. On a $J(y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z,z}}(\mathcal{O}_{Y,y}, J(z))$, et par conséquent, pour établir le lemme, il suffit de vérifier la relation :

$$\mathrm{Tr}\ \pi(\beta) = 0 \Longrightarrow \forall a \in \mathcal{O}_{Y,y},\ \mathrm{Tr}\ h \circ \mathrm{Tr}\ \pi'(C_{Y'/S'}(\pi'^{*}(a\ \omega))(\beta)) = 0$$

Et puisque $\mathrm{Tr}\ \pi'' \circ \mathrm{Tr}\ h' = \mathrm{Tr}\ h' \circ \mathrm{Tr}\ \pi'$, il suffit d'établir :

$$R : \forall\ a \in \mathcal{O}_{Y,y},\ \mathrm{Tr}\ \pi'' \circ \mathrm{Tr}\ h'(C_{Y'/S'}(\pi'^{*}(a\ \omega))(\beta)) = 0.$$

D'après le lemme 4.4.1, ii); on peut supposer $(a\ \omega) \in (h^{*}\Omega^{n}_{Z/S})_y$, et même $\omega \in \Gamma\Omega^{n}_{Z/S}$; si h' était fini, il suffirait d'appliquer la propriété de la trace à $C_{Y'/S'}$ pour se ramener à établir le lemme dans le cas d'un morphisme lisse (ici $g : Z \to S$), auquel cas il est facile. Effectivement, on peut supposer h fini: d'après ([EGA] ch.IV, cor. 18.2.3), il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[rr, "\tilde{h}"] \arrow[dr] & & \tilde{Z} \arrow[dr] & \\ & Y \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

où le morphisme $\tilde{h}$ est fini, $\tilde{Z}$ étale sur Z et la fibre de $\tilde{Z}$ en z contient un point $\tilde{z}$ d'extension résiduelle triviale sur $z (k(\tilde{z}) \simeq k(z))$, $\tilde{Y}$ étale sur Y et la fibre $\tilde{Y}_{\tilde{z}}$ contient un point $\tilde{y}$ avec : $k(\tilde{y}) \simeq k(y)$. On en déduit sur les modules dualisants les isomorphismes suivants : $J(\tilde{y}) \simeq J(y)$ et $J(\tilde{z}) \simeq J(z)$.

En supposant h fini, h' l'est aussi et R devient :

$$\forall\ a \in \mathcal{O}_{Y,y}\ ,\ \mathrm{Tr}\ \pi''(C_{Z'/S'}(\mathrm{Tr}\ h'(a)(\pi''^{*}\omega))(\beta)) = 0\ ;$$

ce qui est vrai car Z est lisse sur S et on peut appliquer la commutativité du Résidu pour tout changement de base ([RD] p. 198 (R.5)).

*
* *

B I B L I O G R A P H I E

E.G.A. GROTHENDIECK (A) et DIEUDONNE (J) : Eléments de Géométrie Algébrique. Publ. Math. I.H.E.S. France

S.G.A. GROTHENDIECK : Séminaire de Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Heidelberg

R.D. HARTSHORNE (R) : Residues and Duality Lecture Notes in Math. 20.1966 Springer-Verlag, Heidelberg

T. EL ZEIN (F) : Complexe Dualisant et Applications. Thèse à l'Univ. Paris VII, 1976.

[1] BASS (H) : On the Ubiquity of Gorenstein rings, Math. Zeitschrift, t.82, 1963, p. 8-28.

[2] BEAUVILLE (A) : Traces et Résidus en Géométrie Algébrique. Thèse de 3ème cycle. Fac. des Sciences, ORSAY, France, ou "Une notion de résidu en Géométrie analytique, Séminaire Pierre Lelong Lecture notes in Math. 205 Springer-Verlag, Heidelberg.

[3] DELIGNE (P) : voir Appendice à R.D. .

[4] EL ZEIN (F) : Résidus en Géométrie Algébrique, Compositio Math. Gröningen, t.23, 1971, p. 379-405.

[5] " " : La Classe fondamentale d'un Cycle, Compositio Math. Gröningen, t.29, 1974, p. 9-33.

[6] " " : Comparaison des Résidus de Grothendieck et de Herrera, C.R. Acad. Sc. Paris, t.278, 1974, Série A, p.863-866.

[7] GODEMENT (R) : Topologie algébrique et Théorie des faisceaux, Paris, Hermann 1958.

[8] GROTHENDIECK (A) : The cohomology theory of abstract algebraic varieties Proceedings of the international congress of Math.(1958, Edimbourg), p.103-118. Cambridge, at the University Press, 1960

[9] GROTHENDIECK (A) : Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki 1956-57 exposé N° 149

[10] " " Local Cohomology: Berlin, Springer-Verlag 1967, Lecture notes in Math. 41.

[11] " " Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam North-Holland publishing company 1963, Advanced studies in pure Math. 3

[12] " " On the De Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. I.H.E.S. N° 29, 1966 p. 95-103

[13] HARTSHORNE (R) : Ample subvarieties of algebraic varieties. Berlin, Springer Verlag 1970. Lecture notes in Math 156. 1970

[14] " " Algebraic De Rham cohomology Manuscripta Math Berlin t. 7 1972, p. 125-140

[15] HERRERA (M) and LIBERMANN (D) : Residues and Principal values on Complex spaces. Math Annalen t.194, 1971 p. 259-294

[16] " " Duality and the De Rham cohomology of infinitesimal neighbourhoods, Invent. Math. Berlin t. 13, 1971, p. 97-124

[17] HERRERA (M) et COLEFF (N) : Les Courants résiduels associés à une forme méromorphe, Berlin Springer-Verlag. Lecture notes in Math. 633

[18] KLEIMAN (S.L.) : Motives in : Algebraic Geometry Oslo, 1970. Oort F. Editor Wolters Noordhoff, p. 53-88

[19] RAMIS (J.P.) et RUGET (G) : Résidus et dualité. Invent. Math. Berlin t. 26 1974, p. 89-131

[20] " " Complexe dualisant et théorèmes de dualité en Géométrie analytique. Publ. Math. I.H.E.S. N° 38, 1970, p. 77-91

[21] ROSENLICHT (M) : Equivalence relations on algebraic curves, Annals of Math 2^{nd} Series t.56, 1952 p. 169-191

[22] SERRE (J.P.) : Algèbre locale et multiplicité. Berlin, Springer-Verlag 1965 Lecture notes in Math. 11

[23] " " : Groupes algébriques et corps de classe. Paris, Herman 1959

[24] TATE (J.) : Residues of differentials on curves. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série t.1, 1968, p. 149-159.

[25] VERDIER (J.L.) : Base change for twisted inverse image of coherent sheaves in "Algebraic geometry", 1968 Bombay, p.393-408. Bombay, Tata Institute 1969 studies in Math. 4

[26] ZARISKI (O) and SAMUEL (P) : Commutative algebra 2 vol. Princeton, D. Van NOSTRAND Company 1958 and 1960 (the university series in higher Math.)

[27] HARTSHORNE (R) : On the De Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. I.H.E.S. N°45, 1975, p. 6-98

[28] BRIESKORN (E) : Die Monodromie der Isolierten singularitäten von Hyperflächen manuscripta Math. 2, 103-161, 1970

[29] SAITO (K) : Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen Inventiones Math. 14, 123-142, 1971.

Fouad EL ZEIN
Université Paris VII
Math. Tour 45-55
2, place Jussieu
752211 PARIS 5