

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HARRIE HENDRIKS

Applications de la théorie d'obstruction en dimension 3

Mémoires de la S. M. F., tome 53 (1977), p. 81-196

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__53__81_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE LA THÉORIE D'OBSTRUCTION
EN DIMENSION 3

par

Harrie HENDRIKS

-:-:-:-

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 0 : INTRODUCTION GÉNÉRALE.

Chapitre I : PRÉLIMINAIRES.

Introduction.

§ 1 : Conventions.

§ 2 : Systèmes locaux.

2.1. Systèmes locaux.

2.2. Homologie et cohomologie.

2.3. Homologie de groupes.

§ 3 : Revêtements.

3.1. Le revêtement universel.

3.2. Revêtements, transfert.

§ 4 : Aperçu de la théorie d'obstruction.

4.1. La première obstruction.

4.2. La deuxième obstruction.

4.3. Propriétés de naturalité.

Chapitre II : LE DEUXIÈME GROUPE D'HOMOTOPIE D'UNE 3-VARIÉTÉ.

Introduction.

§ 1 : Systèmes d'Epstein.

§ 2 : Une présentation de $\pi_2(N)$.

§ 3 : Plans projectifs à fibré normal trivial.

§ 4 : Self-intersection homotopique.

Chapitre III : DÉMARRAGE, L'HYPOTHÈSE FONDAMENTALE.

Introduction.

§ 1 : Position du problème et l'hypothèse fondamentale.

§ 2 : Implications de l'hypothèse fondamentale.

2.1. Le degré.

2.2. Le deuxième groupe d'homotopie.

Chapitre IV : DU 1-SQUELETTE AU 2-SQUELETTE.

Introduction.

§ 1 : Le calcul du groupe de premières obstructions.

1.1. La mise en une suite exacte courte.

1.2. Fonctorialité et scindement.

§ 2 : Sur la réalisation de premières obstructions.

- 2.1. Le degré.
- 2.2. Les rotations parallèles aux plans projectifs à fibré normal trivial.

Chapitre V : DU 2-SQUELETTE AU 3-SQUELETTE.

Introduction.

§ 1 : Le groupe $H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))$.

- 1.1. Le groupe abélien $\pi_2(N; n)$.
- 1.2. $\pi_3(N, n)$ comme conséquence de $\pi_2(N, n)$.

§ 2 : Le calcul de $\Delta^1(f; \partial M) \cap^1$.

- 2.1. Une façon d'engendrer $H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*))$.
- 2.2. Calcul de $\Delta^1(f; \partial U) \cap^1 U$.
- 2.3. Remarques sur $\text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1$.
- 2.4. Les rotations parallèles aux sphères - 1.

§ 3 : La contribution de $\text{coker } \cap^1$ à l'image de $\Delta^1(f; \partial M)$.

- 3.1. Réduction à des variétés "simples".
- 3.2. Le cas des variétés simples : exemples.
- 3.3. Le cas des variétés simples.

§ 4 : Résumé.

- 4.1. Le groupe de deuxième obstructions.
- 4.2. Le cas d'équivalence d'homotopie.
- 4.3. Les rotations parallèles aux sphères - 2.
- 4.4. Evaluation.
- 4.5. Conjectures.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire se situe dans la topologie différentielle et algébrique des variétés différentiables de dimension 3.

Soit donnée une application $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ de 3-variétés compactes connexes satisfaisant à l'hypothèse fondamentale $F(f)$, que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux et que f respecte la première classe de Stiefel-Whitney. Dans cette situation ce travail comporte les éléments d'une classification à homotopie rel ∂M près d'applications qui sont homotopes à une application qui coïncide avec f jusqu'au 1-squelette de M (qui possède une décomposition cellulaire).

Ceci peut être conçu comme une continuation des travaux de THOMAS et SWARUP dans la théorie d'homotopie de dimension 3. D'après ces travaux on est tenté de voir le type d'homotopie d'une 3-variété (fermée) M comme la donnée de 1° son groupe fondamental $\pi_1 M$ qui prescrit grosso modo le 2-squelette de la variété, i. e. le type d'homotopie de M -point, et de 2° la façon dont "la 3-cellule" est attachée au 2-squelette. SWARUP la voit comme l'image de la classe fondamentale $\{M\} \in H_3(M; \tilde{\mathbb{Z}})$ dans le troisième groupe d'homologie de l'espace d'Eilenberg-MacLane de $\pi_1 M$, $\tau_M \in H_3(K(\pi_1 M, 1); \tilde{\mathbb{Z}})$. Dans [H4] cet invariant est interprété comme la première obstruction pour trouver une rétraction de M sur son 2-squelette (ou, ce qui revient au même sur M -point). SWARUP a montré qu'un isomorphisme $\theta : \pi_1 M \rightarrow \pi_1 N$ tel que $\theta * \tau_M = \tau_N$ peut être réalisé par une équivalence d'homotopie de degré 1. Si on attache peu d'importance à la donnée 2°, une 3-variété ressemble à un espace d'Eilenberg-MacLane et on peut s'attendre à ce que la classification à homotopie près des applications réalisant θ soit abordable. Ceci est un cas spécial de la classification recherchée.

Des résultats partiels sont connus. Dans [P ; p. 356] et [L ; App. II] on montre que la rotation parallèle à une sphère qui ne sépare pas la 3-variété n'est pas homotope à l'identité. Dans [H1] j'ai considéré le problème suivant : Soit donnée une variété M qui est une somme connexe de variétés suffisamment larges et d'exemplaires de $S^2 \times S^1$ et une 2-sphère dans M . Est-ce que la rotation parallèle à cette 2-sphère est homotope à l'identité ? Il y est montré que c'est le cas seulement si cette sphère est nul-homotope.

Le théorème de sphères de Laudénbach (voir [L ; Ch. III]) et [H1] menaient à un théorème à la Waldhausen pour des variétés non nécessairement indécomposables pour la somme connexe dans [H2]. Ce dernier travail comporte principalement un théorème de scindement d'équivalences d'homotopie de variétés P^2 -inscérables (i. e. ne pas possédant de plans projectifs à fibré normal trivial) le long d'une

2-sphère (voir aussi [L ; Ch. V]). Le présent mémoire a servi dans [H3] à décrire l'obstruction totale au scindement d'équivalences d'homotopie le long d'une 2-sphère dans la situation générale de la présence de plans projectifs à deux côtés.

Ce travail nous place au plein milieu du problème suivant, qui est en quelque sens la version absolue de ce qu'on a discuté tout au début.

Soit $f : (N, \partial N) \rightarrow (N, \partial N)$ une application coïncidant avec l'identité sur ∂N et sur le 1-squelette et qui est (une équivalence d'homotopie) de degré 1. Est-ce que f est homotope à un homéomorphisme ?

Remarquons qu'on a éliminé les effets de la Conjecture de Poincaré et de la torsion de Franz-Reidemeister. En plus dans [H3] on a montré que dans cette situation-ci la torsion de Whitehead de f est nulle. On sait décider si f est homotope à une composition de rotations parallèles aux sphères et aux plans projectifs à deux côtés (voir g. plus loin). Si N est P^2 -inscérable f est homotope à une rotation parallèle à une sphère. Si N ne l'est pas, f n'est pas nécessairement homotope à un homéomorphisme selon [H3 ; Th. C] (voir aussi la Conjecture I de Ch. V, 4.5).

LES AUXILIAIRES

1. La théorie d'obstruction à la Eilenberg-Steenrod-Olm ou la récurrence par squelettes. Cette théorie a déjà eu succès dans la classification des applications $K^3 \rightarrow S^2$ d'un 3-complexe K sur la 2-sphère. C'est le travail de HOPF et PONTRYAGIN ([P]) dont le résultat est comme suit. Soient $f, g : K \rightarrow S^2$ deux applications coïncidant sur le 2-squelette ; alors f est homotope à g si et seulement si la première obstruction $d(f, g) \in H^3(K ; f^* \pi_3 S^2)$ satisfait à une égalité comme suit :

$$d(f, g) = x \cup f^* z^2$$

où $x^1 \in H^1(K ; f^* \pi_2 S^2)$ et où z^2 est un générateur du groupe infini cyclique $H^2(S^2 ; \pi_2 S^2)$ et où on utilise le produit de Whitehead comme homomorphisme $\pi_2 S^2 \otimes \pi_2 S^2 \rightarrow \pi_3 S^2$.

2. Le théorème de la sphère de Papakyriakopoulos-Whitehead-Epstein (voir [E]).

Etant donnée une 3-variété compacte et connexe N , il fournit une résolution de $\pi_2 N$ en tant que $\pi_1 N$ -module.

3. Le théorème de Hilton sur les groupes d'homotopie d'un bouquet de sphères. Si $\pi_2 N \neq 0$, le revêtement universel $\tilde{N}$ de N a le type d'homotopie d'un bouquet de 2-sphères et alors ce théorème nous donne une expression du groupe abélien (libre)

$\pi_3 N$ en termes du groupe abélien libre $\pi_2 N$.

En l'absence de plans projectifs à fibré normal trivial ceci mène déjà à une simplification surprenante. Si $f, g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ coïncident sur le 1-squelette et satisfont à $F(f)$ et $F(g)$ et que $\deg f = \deg g$, alors il y a une composition ρ de rotations parallèles à des sphères dans N telle que $f \sim \rho g$. Pour compléter la classification, il restera à considérer les cas suivants : Soit W une variété compacte telle que $\partial W \cong S^2$ et que $\pi_1 W$ soit fini ; est-ce que la rotation ρ_W le long de ∂W est homotope ou non à l'identité (rel ∂W) ?

La réponse suit d'une recherche de suffisamment de propriétés formelles de l'obstruction $\partial(\rho_W, \text{Id})$ et de l'injection des théorèmes suivants.

4. Théorèmes de Smith, d'Artin-Tate et de Burnside sur les groupes finis. D'après SMITH, la cohomologie d'un groupe fondamental fini π d'une 3-variété fermée est périodique, d'après ARTIN-TATE, tout Sylow-sous-groupe est alors soit cyclique, soit quaternionique généralisé. BURNSIDE donne une présentation d'un groupe dont tout Sylow-sous-groupe est cyclique.

En présence de plans projectifs à fibré normal trivial on a besoin d'une étude supplémentaire de $\pi_2(N)$ en tant que $\pi_1 N$ -module. Remarquons que la présence des plans projectifs n'est pas toujours comme celle dans un facteur de somme connexe $\mathbb{P}^2 \times I$ ou $\mathbb{P}^2 \times S^1$ ([R]).

5. Grâce aux Théorèmes d'Epstein relatifs aux plans projectifs à fibré normal trivial [E], on obtient une notion de self-intersection homotopique sur $\pi_2 N$ (voir plus loin) qui mène à une description de la classification entamée, indépendante du choix fait dans 2.

LES RESULTATS PRINCIPAUX

Soit N une 3-variété compacte connexe, posons Λ_N le sous-ensemble de $\pi_1 N$ des éléments d'ordre 2 et renversant l'orientation. Λ_N est muni de l'action de $\pi_1 N$ par conjugaison, et il a ainsi un nombre fini d'orbites $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, représenté par des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Soit pour chaque élément $\lambda \in \Lambda_N$, $\sigma_\lambda : (S^2, *) \rightarrow (N, *)$ une immersion dont l'image est un plan projectif à fibré normal trivial portant le lacet λ , alors :

(a) Il est défini une suite exacte de $\pi_1 N$ -modules

$$0 \rightarrow \pi_2^{\text{sph}(N)} \rightarrow \pi_2 N \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[\Lambda_N] \rightarrow 0$$

en posant $1(\sigma_{\alpha_i}) = 1 \otimes \alpha_i$ et $1(\sigma) = 0$ si σ est un plongement de la sphère

dans $N \cdot \pi_2^{\text{sph}}(N)$ est le sous-module de $\pi_2 N$ engendré par les plongements. L'homomorphisme 1 est la self-intersection homotopique (voir 5.).

Etant données deux applications $f, g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ coïncidant sur le 1-squelette et qui satisfont aux hypothèses fondamentales $F(f)$ resp. $F(g)$, alors :

(b) Si $\deg f = \deg g$, il y a un homéomorphisme ρ composé de rotations parallèles à un système de plans projectifs à fibré normal trivial dans M , mutuellement disjoints, tel que $g\rho$ et f sont homotopes jusqu'au 2-squelette.

Précisé d'une autre façon, les classes d'applications $g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ coïncidant avec f sur le 1-squelette et homotopes entre eux jusqu'au 2-squelette, sont en correspondance avec les éléments de $H^2(M, \partial M; f^* \pi_2 N)$. Cette correspondance est donnée par la première différence $g \leftrightarrow d(f, g)$.

(c) L'homomorphisme $H^2(M, \partial M; f^* \pi_2 N) \xrightarrow{(\partial, \omega)} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1 N} \mathbb{Z}[\Lambda_N])$ donnée par $\partial d(f, g) = \deg g - \deg f$ et

$$\omega d(f, g) = (w_K \cup 1_* d(f, g)) \cap \{M, \partial M\} \in H_0(M; \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda_N]) = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1 N} \mathbb{Z}[\Lambda_N]$$

est un isomorphisme sur son image (w_K désigne la première classe de Stiefel-Whitney de M).

(d) N est fermée et $\pi_1 N$ admet un sous-groupe libre d'indice fini si et seulement si l'image de ∂ n'est pas triviale, ce qui revient à dire que

$$H_2(M, \partial M; f^* \pi_2 N)$$

est de rang 1.

Les résultats b, c et d généralisent les résultats de [12; § 2] qui étaient restreints aux variétés P^2 -insécables (i. e. $\Lambda = \emptyset$).

Dans la suite on considère des applications qui sont une équivalence d'homotopie. Soit $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une telle application. Il y a un homomorphisme $\Delta : H^1(M, \partial M; f^* \pi_2 N) \rightarrow H^3(M, \partial M; f^* \pi_3 N)$ tel que $\text{coker } \Delta$ est en correspondance avec les classes d'homotopie rel ∂ d'applications qui coïncident avec f jusqu'au 2-squelette. Posons $\overline{W}(\Lambda_N)$ le $\mathbb{Z}$ -module engendré par les paires $\langle \lambda, \mu \rangle$, ($\lambda, \mu \in \Lambda_N$) et les éléments λ ($\lambda \in \Lambda_N$) avec certaines relations.

(e) Il y a une suite exacte de $\mathbb{Z}_2$ -modules

$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1 M} \pi_2^{\text{sph}}(M) \xrightarrow{r} \text{coker } \Delta \xrightarrow{t} \overline{W}(\Lambda_N) \rightarrow 0.$$

En posant pour $x \in \pi_3 M$, $\{x\}$ la classe d'homologie du cocycle qui prend sur la 3-cellule de M la valeur x , on construit t de telle façon que

$$t(\{f_{\#} \sigma_{f_{\#}^{-1} \lambda}, f_{\#} \sigma_{f_{\#}^{-1} \mu}\}) = \langle \lambda, \mu \rangle \text{ et que } t(\{\sigma_{\lambda} \text{ Hopf}\}) = \lambda$$

(où $[,]$ est le produit de Whitehead et où Hopf est le générateur de $\pi_3 S^2$). L'image de r correspond aux applications ρf où ρ est une rotation parallèle à une sphère dans N .

(f) La rotation parallèle à la sphère plongée S dans N est homotope à l'identité si, et seulement si, $r(1 \otimes J) = 0$, ce qui est le cas si, et seulement si, J sépare N , $N = N_1 \#_S N_2$ et que soit N_1 , soit N_2 , est la somme connexe de variétés fermées homotopiquement équivalentes à un S^2 -fibré sur S^1 ou à $\mathbb{P}^2 \times S^1$ et de variétés fermées à groupe fondamental fini et à 2-Sylow-sous-groupe cyclique.

En posant $\pi^1(N, n)$ l'espace topologique des équivalences d'homotopie $g : (N, \partial N, n) \rightarrow (N, \partial N, n)$ homotope $\text{rel}\{n\} \cup \partial N$ à l'identité jusqu'au 1-squelette, on a la propriété suivante.

(g) Il y a une suite exacte de $\mathbb{Z}_2$ -modules

$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1 N} \pi_2 N \xrightarrow{r} \pi_0 \pi^1(N, n) \xrightarrow{T} \overline{w}(\Lambda_N) \rightarrow 0$$

où l'image de r est engendrée par les rotations parallèles à des sphères et des plans projectifs.

Les introductions aux chapitres suivies de Ch V, 4 forment une partie conçue pour être lisible en soi et elles servent comme guide de lecture.

PRELIMINAIRES

Introduction.

Ce chapitre donne un résumé des outils algébriques dont on va se servir.

Dans §1 on a rassemblé des conventions et des notations et dans §2 les résultats employés de la théorie de l'homologie et de la cohomologie à coefficients dans un système local. Dans §3 on donne des applications aux revêtements du théorème de Leray-Serre.

Dans §4 on trouve un aperçu de la théorie d'obstruction. Grosso modo, étant donné un complexe cellulaire relatif (X, A) et des applications $f, g : X \rightarrow Y$ telles que f et g coïncident sur le k -squelette $(X, A)^k$ ($k \geq 1$) il y a la première obstruction $d^{k+1}(f, g; A) \in H^{k+1}(X, A; f^* \pi_{k+1}(Y))$ qui décide si g est homotope à une application g' rel $(X, A)^{k-1}$ telle que f et g' coïncident sur le $(k+1)$ -squelette. Supposé qu'elle soit triviale et que g' soit comme ci-dessus, il y a l'obstruction $d^{k+2}(f, g'; A)$ et un sous-ensemble image d'une fonction

$$\Delta^k(f; A) : H^k(X, A; f^* \pi_{k+1}(Y)) \rightarrow H^{k+2}(X, A; f^* \pi_{k+2}(Y))$$

tel qu'il y ait une application g'' , homotope à g' rel $(X, A)^{k-1}$ et coïncidant avec f sur le $(k+2)$ -squelette si et seulement si $d^{k+2}(f, g'; A) \in \text{im } \Delta^k(f; A)$.

$\Delta^k(f; A)(\zeta)$ donne l'effet d'une homotopie qui "bouge" le k -squelette de la façon prescrite par ζ . En fait $\Delta^k(f; a)$ est un homomorphisme (!) et la classe de $d^{k+2}(f, g'; A)$ dans $\text{coker } \Delta^k(f; A)$, le groupe des deuxièmes obstructions, est bien déterminée par g .

§1. Conventions.

Soient X et Y des espaces topologiques, il est sous-entendu que les applications $f : X \rightarrow Y$ sont continues. Les homomorphismes induits en

groupes d'homotopie (resp. homologie et cohomologie) sont évoqués par les symboles $f_{\#}$, (resp. f_* et f^*). H_*^{lf} désigne l'homologie à chaînes (singulières) localement finies. H_c^* désigne la cohomologie à cochaînes à support compact.

Si $\sigma : S^n \rightarrow X$ est une application, sa classe d'homotopie rel le point base est notée par $[\sigma]$. Si λ est un cycle ou un cocycle sa classe d'homologie ou de cohomologie est notée par $\{\lambda\}$.

Si on a des inclusions de paires $(X, Y) \subset (X', Y \cup (X' - X)) \supset (X', Y')$, l'homomorphisme composé de l'excision (si elle existe) et de la restriction $e_{X, X'} : H^*(X, Y) \xrightarrow{\text{excision}} H^*(X', Y \cup (X' - X)) \xrightarrow{\text{restriction}} H^*(X', Y')$ est évoqué par le mot extension.

Un complexe cellulaire relatif (X, A) est toujours supposé CW, le k-squelette $(X, A)^k$ est la réunion de A et des cellules de dimension inférieure ou égale à k .

S^i désigne la sphère standard (plongée dans R^{i+1}) de dimension i . Les points base de S^1 , S^2 et S^3 sont désignés par x_0 , y_0 et z_0 . P^i est l'espace projectif réel de dimension i . $p_2 : S^2 \rightarrow P^2$ est le revêtement standard à deux feuillets et on note $p_2(y_0) = \bar{y}_0$.

Si X est un espace topologique et $Y \subset X$, alors $\bar{Y}$ désigne l'adhérence de Y , $\text{Int } Y$ désigne l'intérieur de Y et $\sim$ signifie homotopie ou homotopiquement équivalent. Si X est une variété, w_X est l'homomorphisme d'orientation $w_X : \pi_1(X) \rightarrow \{+1, -1\} = \text{Gl}(1, \mathbb{Z})$. Une variété de dimension 3 est irréductible si toute sphère plongée y borde une boule et elle est P^2 -insécable s'il n'existe pas de plongements à fibré normal trivial du plan projectif. Un espace d'Eilenberg-MacLane sera toujours de la forme $K(\pi, 1)$.

Soit E un ensemble, alors $\mathbb{Z}[E]$ désigne le groupe abélien libre de combinaisons $\mathbb{Z}$ -linéaires finies d'éléments de E . Si E a en plus une structure de groupe, $\mathbb{Z}[E]$ est un anneau de la façon naturelle et on dira souvent E -module au lieu de $\mathbb{Z}[E]$ -module.

Si R est un anneau, A (resp. B) un R -module à droite (resp. à gauche) $A \otimes_R B$ désigne le produit tensoriel. Si π est un groupe et A et B sont des $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules à gauche $A \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} B$ désigne le quotient de $A \otimes_{\mathbb{Z}} B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ par le sous-groupe engendré par les éléments $g^{-1}a \otimes b - a \otimes gb$, où $a \in A$, $b \in B$ et $g \in \pi$.

Les références intérieures à un chapitre sont débitées après le signe § (p.e. §3.1), intérieures à ce travail après Ch (p.e. Ch III, 3.1) et celles qui sont extérieures entre les signes [] (p.e. $[E]$ et aussi $[E; (9,5)]$).

§ 2.

Systèmes locaux ([S 2; p.281-283])

2.1 -

Systèmes locaux.

Soit X un espace topologique. Un système local (G, Γ) (ou simplement G) sur X est la donnée pour tout $x \in X$ d'un groupe abélien G_x et pour tout chemin $\omega: [0,1] \rightarrow X$ d'un isomorphisme $\Gamma_\omega: G_{\omega(1)} \rightarrow G_{\omega(0)}$ ayant les propriétés suivantes:

1) Γ_ω ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de ω , et

2) étant donnés des chemins ω_1 et ω_2 tels que $\omega_1(1) = \omega_2(0)$, on a la relation $\Gamma_{\omega_1 \omega_2} = \Gamma_{\omega_1} \Gamma_{\omega_2}$.

Soient (G, Γ) et (G', Γ') des systèmes locaux sur X , alors le

produit tensoriel $(G \otimes G', \Gamma \otimes \Gamma')$ de G et G' est le système local défini par $(G \otimes G')_x = G_x \otimes G'_x$ pour $x \in X$ et par $(\Gamma \otimes \Gamma')_\omega = \Gamma_\omega \otimes \Gamma'_\omega : G_{\omega(1)} \otimes G'_{\omega(1)} \rightarrow G_{\omega(0)} \otimes G'_{\omega(0)}$ pour tout chemin ω .

D'une façon analogue on définit la somme directe $(G \oplus G', \Gamma \oplus \Gamma')$ de G et G' .

Un homomorphisme de systèmes locaux $\mu: (G, \Gamma) \rightarrow (G', \Gamma')$ est la donnée pour tout $x \in X$ d'un homomorphisme $\mu_x: G_x \rightarrow G'_x$ tel que pour tout chemin ω , $\Gamma'_\omega \mu_{\omega(1)} = \mu_{\omega(0)} \Gamma_\omega$.

On a la notion du noyau $\ker \mu$, du conoyau $\operatorname{coker} \mu$ de μ et des suites exactes de systèmes locaux. Pour qu'une suite soit exacte il suffit qu'elle soit exacte au-dessus d'un point de chaque composante connexe par arcs.

Soit $x_0 \in X$; un isomorphisme rel x_0 de systèmes locaux, $\mu: G \rightarrow G'$, est un homomorphisme inversible, tel que μ_{x_0} soit l'identité (et donc $G_{x_0} = G'_{x_0}$).

Remarque: Supposé que X est connexe par arcs, et que $x_0 \in X$; un système local G est déterminé à un isomorphisme rel x_0 près par G_{x_0} et l'action de $\pi_1(X, x_0)$ définie par Γ sur G_{x_0} . Un homomorphisme de systèmes locaux est déterminé par sa valeur en x_0 .

Soit G un système local sur X et $f: W \rightarrow X$ une application, alors f^*G désigne le système local induit par f de G sur W . Si W est connexe par arcs et que $w \in W$, il est déterminé à isomorphisme rel w près par $(f^*G)_w = G_{f(w)}$ et par l'action de $\pi_1(W, w)$ sur $G_{f(w)}$, induite de l'action de $\pi_1(X, f(w))$ par l'homomorphisme

$$f_{\#} : \pi_1(W, w) \rightarrow \pi_1(X, f(w)).$$

On désignera f^*G aussi par $(f_{\#})^*G$ bien que le dernier ne détermine un

système local qu'à isomorphisme rel w près.

Exemple: Soit X un espace topologique, alors $\pi_k(X)$ désigne le système local défini par $\pi_k(X)_x = \pi_k(X, x)$ ($k=2, 3, \dots$), un chemin ω donne lieu à un isomorphisme $\pi_k(X, \omega(1)) \rightarrow \pi_k(X, \omega(0))$ qui sera noté par $z \rightarrow \omega.z$.

2.2 -

Homologie et cohomologie.

Pour une paire d'espaces topologiques (X, Y) et un système local G sur X on a les groupes d'homologie $H_k(X, Y; G)$ et de cohomologie $H^k(X, Y; G)$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

Soit $\mu: G \rightarrow G'$ un homomorphisme de systèmes locaux, alors il y a

l'homomorphisme de coefficients $H_k(X, Y; G) \xrightarrow{\mu_k} H_k(X, Y; G')$ et

$H^k(X, Y; G) \xrightarrow{\mu^k} H^k(X, Y; G')$; il est fonctoriel.

Soit $f: (X', Y') \rightarrow (X, Y)$ une application, alors il y a des homomor-

phismes induits $f_k: H_k(X', Y'; f^*G) \rightarrow H_k(X, Y; G)$ et $f^k: H^k(X, Y; G) \rightarrow$

$H^k(X', Y'; f^*G)$; ils sont fonctoriels.

L'homomorphisme de coefficients "commute" avec l'homomorphisme induit d'une application.

A la paire (X, Y) munie d'un système local G sont associées des suites exactes longues d'homologie (on note $i: Y \subset X$ et $j: X \subset (X, Y)$)

$\dots \rightarrow H_{k+1}(X, Y; G) \rightarrow H_k(Y; i^*G) \xrightarrow{i_k} H_k(X; G) \xrightarrow{j_k} H_k(X, Y; G) \rightarrow \dots$

et de cohomologie

$\dots \rightarrow H^{k-1}(Y; i^*G) \rightarrow H^k(X, Y; G) \xrightarrow{j^k} H^k(X; G) \xrightarrow{i^k} H^k(Y; i^*G) \rightarrow \dots$

Les homomorphismes associés à des applications de paires et les homomorphismes de coefficients induisent des morphismes de suites exactes.

Pour un couple excisif de paires dans X on a les suites exactes de Mayer-Vietoris en homologie et en cohomologie. De même on a, dans la

même situation que pour l'homologie et la cohomologie singulière classique, la propriété d'excision.

A une suite exacte courte de systèmes locaux sont associées les suites exactes longues de coefficients en homologie et en cohomologie, fonctorielles par rapport aux homomorphismes associés à des applications et des homomorphismes de coefficients provenant d'un morphisme de suites exactes courtes. L'homomorphisme connectant de la suite exacte longue sera évoqué par l'homomorphisme de Bockstein associé à la suite exacte courte.

Remarque: Pour les systèmes locaux G et G' il y a des isomorphismes fonctoriels

$$H_k(X, Y; G \otimes G') = H_k(X, Y; G) \otimes H_k(X, Y; G') \text{ et} \\ H^k(X, Y; G \otimes G') = H^k(X, Y; G) \otimes H^k(X, Y; G').$$

Soient $A \subset X$ et $B \subset X$, G_1 et G_2 des systèmes locaux sur X , alors on a le cap-produit

$$\cap : H^p(X, A; G_1) \otimes H_q(X, A \cup B; G_2) \rightarrow H_{q-p}(X, B; G_1 \otimes G_2)$$

fonctoriel par rapport aux homomorphismes de coefficients. La fonctorialité par rapport aux applications s'énonce comme suit:

Soit $f: (X', A', B') \rightarrow (X, A, B)$ une application, pour tout

$$u \in H^p(X, A; G_1) \text{ et } z \in H_q(X', A' \cup B'; f^* G_2) \text{ on a l'égalité} \\ f_{q-p}(f^p(u) \cap z) = u \cap f_q(z).$$

Soit M une variété connexe de dimension m , $x \in M$, alors $\tilde{\mathbb{Z}}^\gamma$ désigne le système local défini par $\tilde{\mathbb{Z}}^\gamma_x = \mathbb{Z}$ muni de l'action définie par l'homomorphisme d'orientation $w_M: \pi_1(M, x) \rightarrow \{+1, -1\} = \text{Gl}(1, \mathbb{Z})$. Soit $\{M, \partial M\}$ une classe fondamentale de M , i.e. un générateur du groupe infini cyclique $H_m^{lf}(M, \partial M; \tilde{\mathbb{Z}}^\gamma)$, alors pour tout système local G

$$\cap\{M, \partial M\} : H_C^p(M, \partial M; G) \rightarrow H_{m-p}(M; G \otimes \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout p , il s'appelle l'isomorphisme de la dualité de Poincaré.

Soient M et N des variétés de dimension m et $f: (M, x) \rightarrow (N, y)$ une application propre telle que $f(\partial M) \subset \partial N$ et que $w_N f_{\#} = w_M: \pi_1(M, x) \rightarrow \{+1, -1\}$ (i.e. $f^* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$). En choisissant des classes fondamentales $\{M, \partial M\}$ resp. $\{N, \partial N\}$ de M et de N , le degré de f est défini comme l'entier d tel que $f_* \{M, \partial M\} = d \{N, \partial N\}$. Le degré est invariant par homotopie rel $\partial M \cup \{x\}$ de f . Si $w_N f_{\#} \neq w_M$ on définit le degré de f comme étant zéro.

2.3 -

Homologie de groupes.

Soit X un complexe cellulaire connexe par arcs et soit $x \in X$. On peut construire un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi_1(X, x), 1)$ en ajoutant à X des cellules de dimension supérieure à 3, d'où

Lemme 1: Soit $i = 0, 1$. Il y a une identification

$$H_i(X; A) = H_i(\pi_1(X, x); A_x)$$

pour tout complexe cellulaire connexe X , $x \in X$ et tout système local A . (On est conseillé de prendre les groupes pour des espaces d'Eilenberg-MacLane dans ce contexte.)

Lemme 2: Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(X, x)} A_x = H_0(X; A).$$

Il fait correspondre à $1 \otimes a$, pour $a \in A_x$, la classe de la chaîne $a \cdot \sigma$ où σ est le 0-simplexe singulier à valeur x .

Les isomorphismes du lemme 1 et 2 sont fonctoriels.

§ 3 -

Revêtements.

3.1 -

Le revêtement universel.

Soit X un complexe cellulaire connexe par arcs et soit $x_0 \in X$. Le revêtement universel $p: (\tilde{X}, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ est défini comme suit: un point $(y, [\gamma])$ de $\tilde{X}$ consiste en un point $y = p((y, [\gamma])) \in X$ et en une classe d'homotopie à extrémités fixes $[\gamma]$ d'un chemin γ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = y$. La topologie sur $\tilde{X}$ est déterminée par la condition que p est un revêtement. L'action à gauche de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\tilde{X}$ est la suivante: étant donné un lacet α en x_0 dans X , on pose $[\alpha] \cdot (y, [\gamma]) = (y, [\alpha\gamma])$.

Soit $H_0(p^{-1}; \mathbb{Z})$ le système local sur X défini comme suit:

pour $x \in X$, $H_0(p^{-1}; \mathbb{Z})_x = H_0(p^{-1}(x); \mathbb{Z})$,

pour $\omega: [0, 1] \rightarrow X$, $\Gamma_\omega: H_0(p^{-1}(\omega(1)); \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(p^{-1}(\omega(0)); \mathbb{Z})$ est induit de l'application $(\omega(1), [\gamma]) \rightarrow (\omega(0), [\gamma\omega^{-1}])$.

De la même façon on définit le système local $H_c^0(p^{-1}; \mathbb{Z})$ à ceci près, que pour un chemin ω , $\Gamma_\omega: H_c^0(p^{-1}(\omega(1)); \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^0(p^{-1}(\omega(0)); \mathbb{Z})$ est induit de l'application $(\omega(0), [\gamma]) \rightarrow (\omega(1), [\gamma\omega])$.

Puisque $p^{-1}(x_0)$ s'identifie par définition à $\pi_1(X, x_0)$ il y a clairement des isomorphismes "canoniques".

(Is.) $H_0(p^{-1}(x_0); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ et $H_c^0(p^{-1}(x_0); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$,

et Γ définit la structure de $\pi_1(X, x_0)$ -module suivante, ρ , sur

$\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$: pour un lacet γ à point base x_0 et

$\sum_g n_g g \in \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ on pose

$$\rho_{[\gamma]}(\sum_g n_g g) = \sum_g n_g (g [\gamma]^{-1}).$$

L'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\tilde{X}$ définit pour tout $g \in \pi_1(X, x_0)$ des isomorphismes de systèmes locaux définis par

$$H_0(p^{-1}(x_0); \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} H_0(p^{-1}(x_0); \mathbb{Z}) \text{ et } H_c^0(p^{-1}(x_0); \mathbb{Z}) \xrightarrow{(g^{-1})^*} H_c^0(p^{-1}(x_0); \mathbb{Z}),$$

qui coïncident par les isomorphismes (Is.) avec

$$\lambda_g: \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$$

défini par la multiplication à gauche par g .

Notation: Le système local défini par l'action ρ de $\pi_1(X, x_0)$ sur

$\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ sera désigné par $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]^0$. Si l'action λ est sous-entendue on note $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$. Soit $T: \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ l'homomorphisme de groupes abéliens défini par $g \mapsto g^{-1}$ pour $g \in \pi_1(X, x_0)$, alors T définit un isomorphisme de systèmes locaux (toujours dénoté par T)

$$T: \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(X)]^0.$$

3.2 -

Revêtements, transfert.

Soient $p: (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$ un revêtement, $Y \subset X$ et G un système local sur X . Supposé que (X, Y) est un complexe cellulaire relatif, on a le principe général suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème de Leray-Serre:

Théorème: Il y a des isomorphismes

$$H_*(X, Y; H_0(p^{-1}; p^*G)) \cong H_*(\hat{X}, p^{-1}Y; p^*G)$$

et si (X, Y) est un complexe relatif fini,

$$H^*(X, Y; H_c^0(p^{-1}; p^*G)) \cong H_c^*(\hat{X}, p^{-1}Y; p^*G)$$

qui sont fonctoriels par rapport aux morphismes de revêtements et aux homomorphismes de systèmes locaux. Ils sont compatibles avec la structure du cap-produit et du cup-produit.

Ces isomorphismes proviennent des isomorphismes

$E_{s,0}^2 \cong E_{s,0}^\infty$ (resp. $E_2^{s,0} = E_\infty^{s,0}$) dans les suites spectrales dégénérées associées au revêtement p .

On en fait les applications suivantes: On considère $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$ comme $p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ -module libre à droite et comme $\pi_1(X, x)$ -module à gauche (par la multiplication). Si $\pi_1(X, x)$ agit trivialement sur G_X et X et $\hat{X}$ sont connexes, on a des isomorphismes de systèmes locaux.

$$H_0(p^{-1}; G) \cong \mathbb{Z}[p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x}) \backslash \pi_1(X, x)]^0 \otimes G \cong \mathbb{Z}[\pi_1(X, x)] \otimes_{p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})} G$$

où le dernier isomorphisme est induit par T (voir §3.1).

Proposition: Soient $f: (W, w) \rightarrow (X, x)$ une application de complexes cellulaires connexes, $q: (\hat{W}, \hat{w}) \rightarrow (W, w)$ le revêtement induit de p par f , $\hat{f}: (\hat{W}, \hat{w}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$ le relèvement de f et G un groupe abélien, alors il y a un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont des isomorphismes, comme suit:

$$\begin{array}{ccc} H_*(W; f^*(\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)] \otimes_{p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})} G)) & \xrightarrow{f_*} & H_*(X; \mathbb{Z}[\pi_1(X, x)] \otimes_{p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})} G) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_*(\hat{W}; G) & \xrightarrow{\hat{f}_*} & H_*(\hat{X}; G) \end{array}$$

Si en plus $f_{\#}\pi_1(W, w) \subset p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$, désignons la composante de $\hat{W}$ contenant $\hat{w}$ par W' et $i: W' \subset \hat{W}$ alors $q|_{W'}: W' \rightarrow W$ est un homéomorphisme et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_*(W; G) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_*(W; f^*(\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)] \otimes_{p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})} G)) \\ \cong \downarrow (q|_{W'})^{-1} & & \downarrow \cong \\ H_*(W'; G) & \xrightarrow{i_*} & H_*(\hat{W}; G) \end{array} ,$$

où α est l'homomorphisme de systèmes locaux défini par l'injection

$$G = \mathbb{Z}[p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})] \otimes_{p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})} G \subset \mathbb{Z}[\pi_1(X, x)] \otimes_{p_{\#}\pi_1(\hat{X}, \hat{x})} G .$$

Définition: Soient $p: (\hat{X}, \hat{\mathcal{X}}) \rightarrow (X, \mathcal{X})$ un revêtement fini, $Y \subset X$ tel que (X, Y) soit un complexe cellulaire relatif (fini) et G un système local sur X .

On définit l'homomorphisme de systèmes locaux

$$\text{tr}_0: G \rightarrow H_0(p^{-1}; p^*G) \quad (\text{resp. } \text{tr}^0: H^0(p^{-1}; p^*G) \rightarrow G)$$

par la formule $(\text{tr}_0)_x(a) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} a \cdot \{y\}$ pour $a \in G_x$

$$(\text{resp. } (\text{tr}^0)_x \left(\sum_{y \in p^{-1}(x)} a_y \cdot y^* \right) = \sum_y a_y y^* ; \text{ où } y^* \text{ désigne la 0-cochaîne}$$

indicatrice de y). A l'aide de l'isomorphisme de Leray-Serre on obtient le transfert en homologie (resp. en cohomologie) comme suit:

$$\text{tr}_*: H_*(X, Y; G) \xrightarrow{(\text{tr}_0)^*} H_*(X, Y; H_0(p^{-1}; p^*G)) \cong H_*(\hat{X}, p^{-1}Y; p^*G)$$

$$(\text{resp. } \text{tr}^*: H^*(\hat{X}, p^{-1}Y; p^*G) \cong H^*(X, Y; H^0(p^{-1}; p^*G)) \xrightarrow{(\text{tr}^0)^*} H^*(X, Y; G)).$$

On a les propriétés bien connues que les compositions

$$\text{tr}_i^i p^i: H^i(X, Y; G) \rightarrow H^i(X, Y; G) \text{ et } p_i \text{tr}_i: H_i(X, Y; G) \rightarrow H_i(X, Y; G)$$

coïncident avec la multiplication par l'ordre du revêtement.

Remarque: Soit $p: (\hat{M}, \hat{\mathcal{M}}) \rightarrow (M, \mathcal{M})$ un revêtement fini. Si M est une variété compacte, de dimension n , à bord ∂M , munie d'un système local G , les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} H^i(\hat{M}, \partial \hat{M}; p^*G) & \xrightarrow{\text{tr}^i} & H^i(M, \partial M; G) \\ \downarrow \cap \{\hat{M}, \partial \hat{M}\} & & \downarrow \cap \{M, \partial M\} \\ H_{n-i}(\hat{M}; p^*(G \otimes \mathbb{Z})) & \xrightarrow{p_{n-i}} & H_{n-i}(M; G \otimes \mathbb{Z}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(\hat{M}, \partial\hat{M}; p^*G) & \xleftarrow{p^i} & H^i(M, \partial M; G) \\
 \downarrow \cap \{\hat{M}, \partial\hat{M}\} & & \downarrow \cap \{M, \partial M\} \\
 H_{n-i}(\hat{M}; p^*(G \otimes \mathbb{Z})) & \xleftarrow{tr_{n-i}} & H_{n-i}(M; G \otimes \mathbb{Z})
 \end{array}$$

pour des choix convenables des classes fondamentales de M et $\hat{M}$, c'est à dire en prenant $\{\hat{M}, \partial\hat{M}\} = tr_n \{M, \partial M\}$.

[La remarque suit des propriétés par rapport au cap-produit des isomorphismes de Leray-Serre. La structure du cap-produit est particulièrement simple dans la fibre du revêtement.]

§ 4 -

Aperçu de la théorie d'obstruction.

La théorie d'obstruction pour l'existence d'homotopies sera traitée jusqu'à la deuxième obstruction. La référence est le travail d'Olm [0], voir aussi le livre de Hu [H7; p.193].

4.1 -

La première obstruction.

Soit (X, A) un complexe cellulaire relatif et soit $x \in (X, A)^0$. Soient données des applications $f, g: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ telles que $f|(X, A)^0 = g|(X, A)^0$.

(i) Au cas où $(X, A)^0 = \{x\}$, il y a une application $g': (X, x) \rightarrow (Y, y)$ telle que $g' \sim g$ rel x et que $f|(X, A)^1 = g'|(X, A)^1$ si et seulement si $f_{\#} = g_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$.

(ii) Soit $k \geq 1$, supposons que $f|(X, A)^k = g|(X, A)^k$ et soit

$$\theta = f_{\#} = g_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y).$$

On définit une classe de cohomologie $d^{k+1}(f, g; A) \in H^{k+1}(X, A; \theta^* \pi_{k+1}(Y))$

par le cocycle dans le $(k+1)$ -ième groupe du complexe de "cochaînes cellulaires" $H^{k+1}((X,A)^{k+1}, (X,A)^k; \theta^* \pi_{k+1}(Y))$ qui est l'obstruction pour trouver une homotopie

$$f|(X,A)^{k+1} \sim g|(X,A)^{k+1} \text{ rel } (X,A)^k.$$

$d^{k+1}(f,g;A)$ est la première obstruction pour l'existence d'une homotopie $f \sim g \text{ rel } A$.

Elle a les propriétés suivantes:

- (a) Soit $g': X \rightarrow Y$ une application telle que $g'|_{(X,A)^k} = g|(X,A)^k$ et qu'il y ait une homotopie $g' \sim g'' \text{ rel } (X,A)^{k-1}$ telle que $g''|(X,A)^{k+1} = g|(X,A)^{k+1}$, alors $d^{k+1}(f,g;A) = d^{k+1}(f,g';A)$,
- (b) Il y a une application $g': X \rightarrow Y$ telle que $g' \sim g \text{ rel } (X,A)^{k-1}$ et telle que $f|(X,A)^{k+1} = g'|_{(X,A)^{k+1}}$ si et seulement si $d^{k+1}(f,g;A) = 0$,
- (c) Soit $z \in H^{k+1}((X,A)^{k+2}, A; \theta^* \pi_{k+1}(Y)) = H^{k+1}(X,A; \theta^* \pi_{k+1}(Y))$ alors il y a une application $g': (X,A)^{k+2} \rightarrow Y$ telle que $f|(X,A)^k = g'|_{(X,A)^k}$ et que $d^{k+1}(f|(X,A)^{k+2}, g'; A) = z$, et
- (d) Soit $h: X \rightarrow Y$ une application telle que $f|(X,A)^k = h|(X,A)^k$, alors $d^{k+1}(f,h;A) = d^{k+1}(f,g;A) + d^{k+1}(g,h;A)$.

4.2 -

La deuxième obstruction.

Soient (X,A) , $x \in X$ et $f: (X,x) \rightarrow (Y,y)$ comme dans §4.1. Soit

$F: X \times [0,1] \rightarrow Y$ l'homotopie constante de f définie par $F(z,t) = f(z)$.

On identifie $\pi_1(X \times [0,1], (x,0))$ et $\pi_1(X,x)$ et on note

$(X,A)^{[k,1]} = X \times 0 \cup (X,A)^k \times 1 \cup (X,A)^1 \times [0,1]$. Voir la figure 1 pour $(X,A)^{[k,k-2]}$.

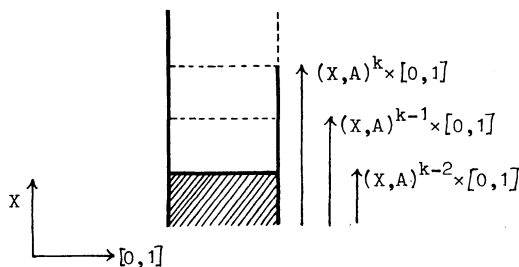


figure 1.

Définition: Pour $u \in H^k(X \times [0,1], (X,A)^{[k,k-2]}; \theta^* \pi_k(Y))$, soit $G: X \times [0,1] \rightarrow Y$ une application telle que F et G coïncident sur $(X,A)^{[k,k-2]}$ et que $d^k(F,G; (X,A)^{[k,k-2]}) = u$. On définit $\xi(u) = d^{k+1}(f, G_1; A) \in H^{k+1}(X, A; \theta^* \pi_{k+1}(Y))$.

Remarque: G existe par la propriété (c) de §4.1 et du fait que $X \times 0 \cup (X,A)^k \times [0,1]$ est un rétracte par déformation de $X \times [0,1]$.

Soit G' une autre homotopie satisfaisant aux conditions de la définition, alors

$$G^{-1} \cdot G' : G_1 \sim G'_1$$

est une homotopie rel $(X,A)^{k-2}$, homotope à une homotopie rel $(X,A)^{k-1}$ (par (d) et (b)) et donc par (a) $d^{k+1}(f, G_1; A) = d^{k+1}(f, G'_1; A)$.

Supposé que $f': (X,x) \rightarrow (Y,y)$ est une application telle que $f'|_{(X,A)^k} = f|_{(X,A)^k}$, que F' et ξ' sont construits à partir de f' comme ci-dessus, et que G' est construite avec f' et u alors on peut supposer que $G'|_{(X,A)^k \times [0,1]} = G|_{(X,A)^k \times [0,1]}$ et par conséquent que $d^{k+1}(f, f'; A) = d^{k+1}(G_1, G'_1; A)$ [les deux correspondent par la "formule de Künneth" à $d^{k+1}(G, G'; A \times [0,1]) \in H^{k+1}((X,A) \times [0,1]; \theta^* \pi_{k+1}(Y))$]; la formule de Künneth est encore valable pour les produits cartésiens $(X,A) \times [0,1]$ et $(X,A) \times ([0,1], \{0,1\})$ où elle est de vérification

immédiate si on se sert de la cohomologie "cellulaire"] . Par conséquent

$$\begin{aligned}\xi'(z) &= d^{k+1}(f', G'_1) = d^{k+1}(f', f) + d^{k+1}(f, G_1) + d^{k+1}(G_1, G'_1) = \\ &= d^{k+1}(f, G_1) = \xi(z),\end{aligned}$$

et ξ est déterminé par $f|(X, A)^k$.

Corollaire: ξ est un homomorphisme.

ξ est construit pour la propriété suivante (qui justifie le titre de cette section):

Soient $k \geq 2$, $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, Y)$ des applications telles que $f|(X, A)^k = g|(X, A)^k$, alors il y a une application $g': X \rightarrow Y$ telle que $g' \sim g$ rel $(X, A)^{k-2}$ et que $f|(X, A)^{k+1} = g'|(X, A)^{k+1}$ si et seulement si $d^{k+1}(f, g; A) \in \text{im } (\xi)$.

Le but du suivant est de trouver un homomorphisme ayant la même image que ξ mais qui a un domaine de définition plus convenable.

Affirmation: ξ s'annule sur le noyau de la restriction surjective

$$H^k(X \times [0, 1], (X, A)^{[k, k-2]}; \theta^* \pi_k(Y)) \rightarrow H^k(X \times [0, 1], (X, A)^{[k, 0]}; \theta^* \pi_k(Y)).$$

En effet, soit $z \in H^{k-1}((X, A)^{[k, k-2]}, (X, A)^{[k, 0]}; \theta^* \pi_k(Y))$, et soit

ζ un cocycle qui représente z , alors il y a une application

$G: X \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que (voir la figure 2)

$G(x, s, t) = f(x)$ si $(x, s, t) \in X \times ([0, 1] \times 0 \cup \{0, 1\} \times [0, 1]) \cup$

$(X, A)^{k-3} \times [0, 1] \times [0, 1] \cup (X, A)^{k-2} \times [0, 1] \times 1$ et que pour toute

$(k-2)$ -cellule σ de (X, A) ,

$$d^k(G|_{\sigma \times [0, 1] \times [0, 1]}, f \text{ pr}_1 |_{\sigma \times [0, 1] \times [0, 1]}; \partial(\sigma \times [0, 1] \times [0, 1])) =$$

$\zeta(\sigma \times [0, 1])$. (En d'autres mots, $d^k(G, f \text{ pr}_1)$ correspond à $z \times 1$, où 1

désigne le générateur de $H^1([0, 1], \{0, 1\}; \mathbb{Z})$.)

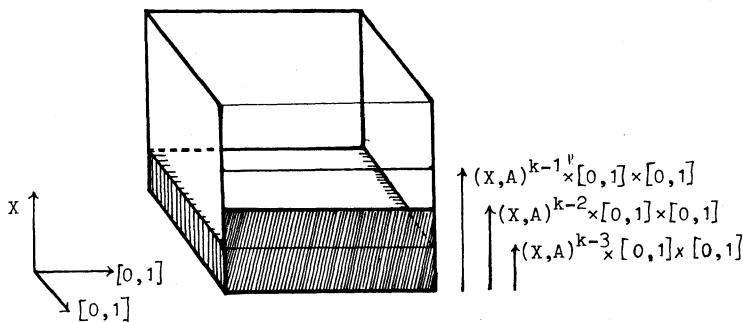


figure 2

Clairement $d^k(G|X \times [0,1] \times 1, F; (X,A)^{[k,k-2]}) = \{\delta\zeta\} = \delta z$.

Puisque $G|X \times 1 \times 1 = G|X \times 0 \times 1 = f$, on a la propriété $\xi(\delta z) = 0$.

L'homomorphisme induit

$$H^k(X \times [0,1], (X,A)^{[k,0]}; \theta^* \pi_k(Y)) \rightarrow H^{k+1}(X,A; \theta^* \pi_{k+1}(Y))$$

sera toujours noté par ξ .

Soit η l'isomorphisme composé de l'isomorphisme de Künneth

(voir ci-dessus) et de la restriction

$$\begin{aligned} H^{k-1}(X,A; \theta^* \pi_k(Y)) &\rightarrow H^k(X \times [0,1], (X,A)^{[\infty,0]}; \theta^* \pi_k(Y)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^k(X \times [0,1], (X,A)^{[k,0]}; \theta^* \pi_k(Y)) \end{aligned}$$

Définition:

$$\Delta^{k-1}(f;A) = \xi \eta : H^{k-1}(X,A; \theta^* \pi_k(Y)) \rightarrow H^{k+1}(X,A; \theta^* \pi_{k+1}(Y)).$$

Puisque $\text{im } \Delta^{k-1}(f;A) = \text{im } \xi$ on peut résumer:

Résumé: Soient $k \geq 2$, $f, g: (X,x) \rightarrow (Y,y)$ des applications telles que

$f|(X,A)^k = g|(X,A)^k$, alors il y a une application $g': X \rightarrow Y$, telle que $g' \sim g \text{ rel } (X,A)^{k-2}$ et que $f|(X,A)^{k+1} = g'|(X,A)^{k+1}$ si et seulement si la classe de $d^{k+1}(f,g;A)$ dans coker $\Delta^{k-1}(f;A)$ s'annule.

La classe $d^{k+1}(f,g;A)$ dans coker $\Delta^{k-1}(f;A)$ est la deuxième obstruction pour l'existence d'une homotopie $f \sim g \text{ rel } A$.

Recette: Soit $z \in H^{k-1}(X, A; \theta^* \pi_k(Y))$, soit ζ un cocycle représentant z .

On construit une homotopie de f rel $(X, A)^{k-2}$

$$G : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

telle que pour toute $(k-1)$ -cellule σ de (X, A) ,

$$d^k(G|_{\sigma \times [0, 1]}, f|_{\sigma \times [0, 1]}; \partial(\sigma \times [0, 1])) = \zeta(\sigma) \quad (\text{voir}$$

figure 1), et que $G_1|_{(X, A)^k} = f|_{(X, A)^k}$.

Alors $d^{k+1}(f, G_1; A) = \Delta^{k-1}(f; A)(z)$.

4.3 -

Propriétés de naturalité.

Soient (X, A) et (W, B) des complexes cellulaires relatifs, $x \in (X, A)^0$, $w \in (W, B)^0$, Y et Z des espaces, $f, g: (X, x) \rightarrow (Y, y)$, $r: (Y, y) \rightarrow (Z, z)$, $s: (W, B, w) \rightarrow (X, A, x)$ des applications et supposons que $f|_{(X, A)^k} = g|_{(X, A)^k}$.

On note $r_{\#}$ l'homomorphisme de systèmes locaux (pour $n = k, k+1$)

$$r_{\#} : \theta^* \pi_n(Y) = f^* \pi_n(Y) \rightarrow f^* r^* \pi_n(Z) = \theta^* r^* \pi_n(Z),$$

alors on a les égalités suivantes

$$(r_{\#})^{k+1} d^{k+1}(f, g; A) = d^{k+1}(rf, rg; A)$$

$$s^{k+1} d^{k+1}(f, g; A) = d^{k+1}(fs, gs; B)$$

et les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccc} H^{k-1}(X, A; \theta^* \pi_k(Y)) & \xrightarrow{(r_{\#})^{k-1}} & H^{k-1}(X, A; \theta^* r^* \pi_k(Z)) \\ \downarrow \Delta^{k-1}(f; A) & & \downarrow \Delta^{k-1}(rf; A) \\ H^{k+1}(X, A; \theta^* \pi_{k+1}(Y)) & \xrightarrow{(r_{\#})^{k+1}} & H^{k+1}(X, A; \theta^* r^* \pi_{k+1}(Z)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 H^{k-1}(X, A; \theta^* \pi_k(Y)) & \xrightarrow{s^{k-1}} & H^{k-1}(W, B; s^* \theta^* \pi_k(Y)) \\
 \downarrow \Delta^{k-1}(f; A) & & \downarrow \Delta^{k-1}(fs; B) \\
 H^{k+1}(X, A; \theta^* \pi_{k+1}(Y)) & \xrightarrow{s^{k+1}} & H^{k+1}(W, B; s^* \theta^* \pi_{k+1}(Y)).
 \end{array}$$

LE DEUXIEME GROUPE D'HOMOTOPIE D'UNE 3-VARIETE

Introduction.

Ce chapitre sert de référence pour tout ce travail. On y a rassemblé les propriétés du deuxième groupe d'homotopie $\pi_2(N, n)$ d'une 3-variété N , compacte et connexe, en tant que $\pi_1(N, n)$ -module.

Le point de départ est le théorème d'Epstein affirmant que $\pi_2(N, n)$ est engendré par un système $\mathcal{W}$ de 2-sphères et de plans projectifs plongés à fibré normal trivial dans N (§1). En posant $S = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$ et $p: (\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow (N, n)$ le revêtement universel on obtient sous l'hypothèse $SE(N)$, disant que $\tilde{N}$ n'est pas fermée, une suite exacte (§2)

$$SE(N): 0 \rightarrow H_3(\tilde{N}, p^{-1}(S)) \rightarrow H_2(p^{-1}(S)) \rightarrow \pi_2(N, n) \rightarrow 0$$

et dans §3 on étudie dans quelle mesure une composante connexe $\hat{V}$ de $p^{-1}(S)$, telle que $p(\hat{V}) \cong \mathbb{P}^2$, est déterminée par son groupe d'isotropie pour l'action de $\pi_1(N, n)$ sur $\tilde{N}$ (lemme 2). Cette étude revient à une application presque immédiate des théorèmes d'Epstein sur les plans projectifs dans N .

Dans §4 on tombe sur une expression du quotient de $\pi_2(N, n)$ par le $\pi_1(N, n)$ -sous-module $\pi_2^{\text{sph}}(N, n)$ engendré par les plongements de la sphère: En notant $\underline{\Lambda}$ l'ensemble des sous-groupes d'isotropie des composantes $\hat{V}$ de $p^{-1}(S)$ différents du groupe trivial, on a la suite exacte

$$0' \rightarrow \pi_2^{\text{sph}}(N, n) \hookrightarrow \pi_2(N, n) \xrightarrow{1} \mathbb{Z} [\underline{\Lambda}] \otimes \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

$\underline{1}$ ne dépend que légèrement de $\mathcal{W}$: son choix sert pour étalonner un nombre fini de signes. $\underline{1}$ est une sorte de "self-intersection homotopique".

§ 1 -

Systèmes d'Epstein.

Soit N une variété compacte et connexe de dimension 3, $n \in \mathbb{N}$. On a le théorème suivant d'Epstein, qui est une généralisation du théorème de la sphère.

Théorème ([E;(2.1)]) : Il y a un nombre fini d'applications

$$\sigma_i: S^2 \rightarrow \text{Int } N$$

telles que (i) σ_i soit un plongement ou une immersion dont l'image est un plan projectif à fibré normal trivial ,

$$\text{que (ii) } \sigma_i(S^2) \cap \sigma_j(S^2) = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

et que (iii) pour des chemins γ_i joignant n à $\sigma_i(y_0)$,

$\{ [\gamma_i \sigma_i] ; i \}$ engendre $\pi_2(N, n)$ en tant que $\pi_1(N, n)$ -module. (y_0 désigne le point base de S^2 .)

Un système $\{ \langle \gamma_i, \sigma_i \rangle ; i \}$ satisfaisant aux propriétés du théorème sera appelé un système d'Epstein paramétrisé de N , le système $\{ \sigma_i(S^2) ; i \}$ y associé est un système d'Epstein de N . On note $\tilde{\sigma}_i: S^2 \rightarrow \tilde{N}$ le relèvement de σ_i dans le revêtement universel $p: (\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow (N, n)$ de (N, n) obtenu en relevant $\gamma_i \sigma_i$ à partir de $\tilde{n}$.

Définition: $h_{N, n}: H_2(\tilde{N}) \rightarrow \pi_2(N, n)$ est l'isomorphisme composé de l'inverse de l'isomorphisme de Hurewicz $\pi_2(\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow H_2(\tilde{N})$ et de l'isomorphisme $p_{\#}: \pi_2(\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow \pi_2(N, n)$.

Clairement $h_{N, n}$ est l'isomorphisme de $\pi_1(N, n)$ modules ayant la propriété $h_{N, n}(\tilde{\sigma}_i(S^2)) = [\gamma_i \sigma_i]$.

De ceci il suit que la propriété (iii) du théorème équivaut

Remarque 1: Pour l'injection $i: S^* = p^{-1}(\bigcup_i \sigma_i(S^2)) \subset \tilde{N}$, l'homomorphisme $i_*: H_2(S^*) \rightarrow H_2(\tilde{N})$ est surjectif, ou, ce qui revient au même, $H_2(\tilde{N}, S^*) = 0$.

La remarque suivante exprime que les membres d'un système d'Epstein n'ont rien de particulier:

Remarque 2: Pour tout système fini $\{\sigma_i; i\}$ satisfaisant à (i) et (ii) du théorème, $\{\sigma_i(S^2); i\}$ peut être complété en un système d'Epstein de N. En effet, soit U un voisinage régulier de $\bigcup_i \sigma_i(S^2)$. Selon le théorème on peut munir les composantes de N-Int U de systèmes d'Epstein. On note $\{\tau_\alpha(S^2); \alpha\}$ la réunion de ces systèmes. On vérifie facilement à l'aide de la remarque 1, que $\{\tau_\alpha(S^2); \alpha\}$ et à fortiori $\{\tau_\alpha(S^2); \alpha\} \cup \{\sigma_i; i\}$ est un système d'Epstein de N.

Une autre propriété caractéristique d'un système d'Epstein est donnée par:

Proposition: Soit $\{\sigma_i; i\}$ un système fini satisfaisant à (i) et (ii) du théorème.

On note $S = \bigcup_i \sigma_i(S^2)$. $\{\sigma_i(S^2); i\}$ est un système d'Epstein si et seulement si pour toute sous-variété V qui est une 2-sphère ou un plan projectif à fibré normal trivial dans N et qui est disjointe de S, il y a une composante W de N-(V ∪ S) telle que $V \subset \partial \bar{W} \subset V \cup S$ et que $\pi_1(V) \cong \pi_1(W)$.

Démonstration: Supposons que $\{\sigma_i(S^2); i\}$ est un système d'Epstein. Le revêtement universel de (N, n) est noté par $p: (\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow (N, n)$. Soit $\hat{V}$ une composante de $p^{-1}(V)$. S'il n'existe pas de composante W de $N-(V \cup S)$ comme demandée on peut trouver une application propre $c: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{N} - \partial \tilde{N}$,

telle que $c(\mathbb{R})$ soit disjoint de $p^{-1}(S)$ et que c rencontre $\hat{V}$ transversalement et en un point. On fait serpenter c d'une composante de $p^{-1}(V)$ vers une autre en faisant les rencontrer (au plus) une fois (et transversalement) ou on fait rapprocher c d'une composante de $\partial\tilde{N}$.

Par une orientation de $\tilde{N}-\partial\tilde{N}$ il est définie l'intersection homologique

$$\cap : H_1^{lf}(\tilde{N}-\partial\tilde{N}) \otimes H_2(\tilde{N}-\partial\tilde{N}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

et il est clair que $\{c\} \cap \{\hat{V}\} = \pm 1$ bien que $\{c\} \cap \hat{\sigma}_{i*}\{S^2\} = 0$ pour tout relèvement $\hat{\sigma}_i : S^2 \rightarrow \tilde{N}$ de σ_i . Ceci est absurde par la remarque 1.

Pour montrer la suffisance, soit $\{\sigma_i(S^2); i\} \cup \{\tau_\alpha(S^2); \alpha\}$ un système d'Epstein de N , ceci existe selon la remarque 2. L'hypothèse sur $\{\sigma_i; i\}$ exprime que tout $[\tau_\alpha]$ est une combinaison $\pi_1(N, n)$ -linéaire des éléments $[\sigma_i]$ (tous reportés au point base n) et par conséquent $\{\sigma_i(S^2); i\}$ était déjà un système d'Epstein de N .

c.q.f.d.

§ 2 -

Une présentation de $\pi_2(N)$.

Soit dans la situation de §1, $\mathcal{M}$ un système d'Epstein de N ; on notera S la sous-variété $S = \bigcup_{V \in \mathcal{M}} V$ de N , S^* la préimage $S^* = p^{-1}(S)$ et $i : S^* \subset \tilde{N}$ l'injection.

Selon la remarque 1 de §1 l'homomorphisme

$i_* = h_{N,n} i_* : H_2(S^*) \rightarrow \pi_2(N, n)$ est surjectif. En outre sous l'hypothèse suivante

HYPOTHESE SE(N): $\pi_1(N, n)$ est un groupe infini ou le bord ∂N de N n'est pas vide,

le revêtement universel $\tilde{N}$ n'est pas une variété fermée et donc $H_3(\tilde{N}) = 0$.

De la suite exacte longue de la paire $(\tilde{N}, S^*)$ on déduit donc la suite

exacte courte de $\pi_1(N, n)$ -modules:

$$SE(N): \quad 0 \rightarrow H_3(\hat{N}, S^*) \xrightarrow{d} H_2(S^*) \xrightarrow{1} \pi_2(N, n) \rightarrow 0.$$

L'hypothèse SE sera faite chaque fois que l'on fait appel à la suite SE.

Remarque: Puisque le deuxième groupe d'homotopie d'une variété fermée à groupe fondamental fini est trivial, l'hypothèse SE(N) est vérifiée dès que $\pi_2(N, n) \neq 0$.

On note $\mathcal{M} = \{W; W \text{ est une composante connexe de } N-S \text{ telle que } \bar{W}-W \subset S \text{ et que } \pi_1(W) \text{ soit fini}\}$. Alors

Lemme : 1) On a les décompositions suivantes en somme directe de $\pi_1(N, n)$ -modules:

$$H_3(\hat{N}, S^*) = \bigoplus_{W \in \mathcal{M}} H_3(p^{-1}\bar{W}, p^{-1}(\bar{W}-W)) \text{ et } H_2(S^*) = \bigoplus_{V \in \mathcal{M}} H_2(p^{-1}V).$$

Pour tout $W \in \mathcal{M}$, soit $\hat{W}$ l'adhérence d'une composante connexe de $p^{-1}W$ et soit pour tout $V \in \mathcal{M}$, $\hat{V}$ une composante connexe de $p^{-1}V$. On se donne des orientations de $\hat{N}$ et du fibré normal à S dans N (la dernière revient à une trivialisation du fibré normal). On oriente $p^{-1}W$ de façon compatible avec l'orientation de $\hat{N}$ et $p^{-1}V$ de façon que pour $x \in p^{-1}V$ une base orientée du fibré tangent à $p^{-1}V$ en x suivie d'une base orientée du fibré normal à $p^{-1}V$ en x , dont l'orientation est induite de celle du fibré normal à S , est une base orientée du fibré tangent à $\hat{N}$ en x . Les classes fondamentales choisies seront compatibles avec ses orientations. Pour un sous-ensemble $T \subset \hat{N}$, le groupe d'isotropie de T est noté par $I(T) = \{g \in \pi_1(N, n); gT = T\}$. Pour $W \in \mathcal{M}$ (resp. $V \in \mathcal{M}$) $I(\hat{W})$ (resp. $I(\hat{V})$) est dans la classe de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(N, n)$ déterminée par $\pi_1(W)$ (resp. $\pi_1(V)$).

Lemme (suite) : 2) Pour $W \in \mathcal{M}$ (resp. $V \in \mathcal{M}$) $H_3(p^{-1}\bar{W}, p^{-1}(\bar{W}-W))$ (resp. $H_2(p^{-1}V)$) est un $\pi_1(N,n)$ -module cyclique engendré par $\{\hat{W}, \partial\hat{W}\}$ (resp. $\{\hat{V}\}$). Une base en tant que groupe abélien libre est donnée par $\{g\hat{W}, \partial g\hat{W}\}$; $g \in \pi_1(N,n)/I(\hat{W})$ (resp. $\{g\hat{V}\}$; $g \in \pi_1(N,n)/I(\hat{V})$). $\pi_1(N,n)$ agit par la formule $g' \{g\hat{W}, \partial g\hat{W}\} = w_N(g') \{g'g\hat{W}, \partial g'g\hat{W}\}$ (resp. $g' \{g\hat{V}\} = w_N(g') \{g'g\hat{V}\}$).

3) pour $W \in \mathcal{M}$,

$$H_3(p^{-1}\bar{W}, p^{-1}(\bar{W}-W)) = (Z[\pi_1(N,n)] \otimes_{I(\hat{W})} Z[\{\hat{W}, \partial\hat{W}\}]) \otimes \mathbb{Z} \text{ et pour } V \in \mathcal{M},$$

$$H_2(p^{-1}V) = (Z[\pi_1(N,n)] \otimes_{I(\hat{V})} Z[\{\hat{V}\}]) \otimes \mathbb{Z}, \text{ en tant que } \pi_1(N,n)\text{-modules.}$$

Pour $V \in \mathcal{M}$, V_{+1} (resp. V_{-1}) est la composante du bord d'un voisinage régulier de V qui se trouve du côté positif (resp. négatif) de V , de la même façon on a $\hat{V}_{+1}$ et $\hat{V}_{-1}$. Soient $V \in \mathcal{M}$, $W \in \mathcal{M}$ et $\epsilon \in \{+1, -1\}$

(tels que $V_\epsilon \subset W$), alors on définit l'homomorphisme de $\pi_1(N,n)$ -modules

$$d(W, V, \epsilon): H_3(p^{-1}\bar{W}, p^{-1}(\bar{W}-W)) \rightarrow H_2(p^{-1}V)$$

en posant

$$d(W, V, \epsilon) (\{g\hat{W}, \partial g\hat{W}\}) = \frac{1}{|I(\hat{V})|} \sum_{g\hat{V} \subset \hat{W}} w_N(g) g\{\hat{V}\}$$

Lemme (suite) : 4)

$$d(\{\hat{W}, \partial\hat{W}\}) = \sum_{V, \epsilon} \epsilon d(W, V, \epsilon) (\{\hat{W}, \partial\hat{W}\}).$$

Démonstration: Quant à 1) pour une composante X de $\tilde{N}-S^*$, $H_3(\bar{X}, \bar{X} \cap S^*) \neq 0$ seulement si $\partial\bar{X} \subset S^*$ et que X est compacte, donc si $p(X) \in \mathcal{M}$. D'autre part $H_3(\tilde{N}, S^*) = \bigoplus_X H_3(\bar{X}, \bar{X} \cap S^*)$. 2) et 3) sont immédiats. Quant à 4) il suffit de remarquer que

$$d(\{\hat{W}, \partial\hat{W}\}) = \sum_{V \in \mathcal{M}} \sum_{\epsilon = +1, -1} \frac{1}{|I(\hat{V})|} \sum_{g\hat{V} \subset \hat{W}} \epsilon \{g\hat{V}\}.$$

q.e.d.

Dans [S5;§3] on peut trouver pour des variétés N , fermées et orientables, une présentation pareille à celle donnée ici en termes de factorisations en produit libre du groupe fondamental $\pi_1(N)$.

§ 3 -

Plans projectifs à fibré normal trivial.

Rappels:

Les énoncés des théorèmes suivants, relatifs aux plans projectifs dans une variété de dimension 3 et dus à Epstein ([E]) et Swarup ([S6]), sont adaptés à leur usage dans ce travail.

Théorème 1 ([E; (8.2)(i)]): Soient N une 3-variété et $\lambda \in \pi_1(N, n)$

($n \in N$). Si $\lambda^2 = e$ et $w_N(\lambda) = -1$, alors il y a un plongement

$t: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ tel que $t|(\mathbb{P}^1, \bar{y}_0)$ représente λ .

Evidemment le fibré normal de $t(\mathbb{P}^2)$ dans N est trivial.

Théorème 2 ([E; (5.1)]): Soit N une 3-variété compacte, non-orientable à groupe fondamental fini. Soient r le nombre de composantes de ∂N homéomorphes à S^2 et Z la variété obtenue en enlevant l'intérieur de r boules disjointes de $\mathbb{P}^2 \times I$. Alors il y a une équivalence d'homotopie $(N, \partial N) \sim (Z, \partial Z)$.

Théorème 3 ([S6; 3.3]): Soit N une 3-variété. Si ∂N contient deux composantes différentes P_1 et P_2 homéomorphes à $\mathbb{P}^2$, telles que les lacets, non-triviaux sur P_1 et P_2 sont librement homotopes dans N , alors il y a une sous-variété N_1 de N telle que $P_1 \cup P_2 \subset \partial N_1$, que $\partial N_1 - (P_1 \cup P_2)$ soit une 2-sphère dans $\text{Int } N$ et que N_1 soit homotopiquement équivalent (rel le bord) au complémentaire d'une boule ouverte dans $\mathbb{P}^2 \times I$. En d'autres mots, P_1 et P_2 constituent le bord d'un fac-

teur pour la somme connexe, homotopiquement équivalent à $\mathbb{P}^2 \times I$.

Soient $N, n, \mathcal{M}, S$ et S^* comme dans §2. Le but de ce paragraphe est d'étudier la fonction qui associe à une composante $\hat{V}$ de S^* son groupe d'isotopie $I(\hat{V})$. Avant de commencer on donne un complément à la proposition de §1. ($p_2: S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ désigne le revêtement standard et $\bar{y}_0 = p_2(y_0)$.)

Lemme 1: a) Soit $t: \mathbb{P}^2 \rightarrow N$ un plongement à fibré normal trivial et soit γ un chemin de n à $t(\bar{y}_0)$, alors il y a un plongement $t': \mathbb{P}^2 \rightarrow N$ (à fibré normal trivial), un chemin γ' de n à $t'(\bar{y}_0)$ et $x \in \bigoplus_{V \in \mathcal{M}, V=S^2} H_2(\mathbb{P}^{-1}V)$ tels que $t'(\mathbb{P}^2) \cap S = \emptyset$,

que $[\gamma(t| \mathbb{P}^1) \gamma^{-1}] = \gamma'(t'| \mathbb{P}^1)(\gamma')^{-1} \in \pi_1(N, n)$

et que $\gamma[t p_2] = \gamma'[t' p_2] + x \in \pi_2(N, n)$.

b) Soit $\phi: S^2 \rightarrow N$ un plongement et soit γ un chemin de n à $\phi(y_0)$, alors $\gamma \cdot [\phi] \in \bigoplus_{V \in \mathcal{M}, V=S^2} H_2(\mathbb{P}^{-1}V)$.

c) Dans la situation a) il existe même un plongement $t': \mathbb{P}^2 \rightarrow N$ tel que, au lieu de $t'(\mathbb{P}^2) \cap S = \emptyset$, que $t'(\mathbb{P}^2)$ soit une composante de S .

Démonstration: (Elle sera utilisée pour le théorème 2 de Ch V, 3.2)

Soit $t: \mathbb{P}^2 \rightarrow N$ un plongement à fibré normal trivial, transversal sur S .

$t(\mathbb{P}^2) \cap S$ consiste en une réunion de cercles qui sont tous à fibré normal trivial dans S et qui donc, tous, bordent des disques dans S .

Soit D un disque dans S tel que $\partial D \subset t(\mathbb{P}^2) \cap S$ et que $\text{Int } D \cap t(\mathbb{P}^2) = \emptyset$,

alors le bord d'un voisinage régulier de $t(\mathbb{P}^2) \cup D$ consiste en une

2-sphère R et un plan projectif P à fibré normal trivial. Soit ϕ (resp. $\bar{t}$)

une paramétrisation de R (resp. de P), alors $\bar{t}(\mathbb{P}^2) \cap S$ a moins de compo-

santes que $t(\mathbb{P}^2) \cap S$, $\bar{t}| \mathbb{P}^1$ est librement homotope à $t| \mathbb{P}^1$ et $[tp_2] = [\bar{t}p_2] + (e - [t| \mathbb{P}^1]) \cdot [\phi]$ dans $\pi_2(N, n)$ (après avoir ramené d'une façon convenable les classes d'homotopie en question au point base n). Par récurrence a) est donc une conséquence de b). Puisque le même procédé de coupure marche pour un plongement de la sphère on n'a qu'à montrer b) au cas où $\phi(S^2) \cap S = \emptyset$. Selon la proposition de §1 il existe en ce cas une composante simplement connexe W de $N - (S \cup \phi(S^2))$, telle que $\phi(S^2) \subset \partial \bar{W} \subset \bar{W} - W \subset S \cup \phi(S^2)$. Puisque W a le type d'homotopie d'une boule trouée, la conclusion dans b) est immédiate. Pour montrer c), soient t et t' comme dans a). Selon la proposition de §1 et le théorème 2 il y a une composante W de $N - (S \cup t'(\mathbb{P}^2))$, telle que $t'(\mathbb{P}^2) \subset \partial \bar{W} \subset \bar{W} - W \subset S \cup t'(\mathbb{P}^2)$ et que W a le type d'homotopie de $\mathbb{P}^2 \times \text{Int } I$ où on a enlevé quelques boules disjointes. La conclusion dans c) en suit immédiatement. q.e.d.

Définition: $\Lambda = \Lambda_{N,n} = \{\lambda \in \pi_1(N, n); \lambda^2 = e \text{ et } w_N(\lambda) = -1\}$.

Λ est pourvu d'une action de $\pi_1(N, n)$ par la conjugaison, en formule

$$g \cdot \lambda = g \lambda g^{-1} \quad (g \in \pi_1(N, n), \lambda \in \Lambda)$$

Il faut noter que d'après le théorème 1, $\lambda \in \Lambda$ si et seulement si il y a un plongement à fibré normal trivial $t: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ tel que $[t| \mathbb{P}^1] = \lambda$. A l'aide du lemme 1 c) on trouve alors:

Proposition 1. Soit $\lambda \in \Lambda$, alors il y a une composante $\hat{V}$ de S^* , tel que $I(\hat{V}) = \{e, \lambda\}$.

En fait, cette proposition, ainsi que les suivantes, peuvent être démontrées sans peine avec les méthodes de [E; Ch.III].

On utilise le théorème 3 de Swarup pour étudier la situation où la composante $\hat{V}$ de la proposition 1 n'est pas unique.

Proposition 2. Soient $\hat{V}_0$ et $\hat{V}_1$ deux composantes de S^* , telles que $I(\hat{V}_0) = I(\hat{V}_1) = \{e, \lambda\}$ et que $p(\hat{V}_0) = V_0 \neq V_1 = p(\hat{V}_1)$, alors $\mathcal{W} - \{V_1\}$ est un système d'Epstein. En particulier il y a $W \in \mathcal{W}$ tel que $V_1 \subset \partial W$. L'hypothèse est équivalente à l'hypothèse que les lacets non triviaux sur V_0 et V_1 sont librement homotopes.

Démonstration: Soit $k: S^1 \times [0, 1] \rightarrow N$ une homotopie de lacets non triviaux, telle que $k(S^1 \times i) \subset V_i$ ($i=0, 1$) et que k soit transversale sur S . On peut supposer qu'il n'y a aucune composante de $k^{-1}(S)$ qui borde un disque quitte à changer la définition de k dans un voisinage de la réunion des disques dans $S^1 \times [0, 1]$ dont le bord est contenu dans $k^{-1}(S)$. En ce cas $S^1 \times [0, 1] - k^{-1}(S)$ est une réunion d'anneaux.

Par conséquent il y a une composante V de S , différente de V_1 , et une homotopie $\bar{k}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow N$ telle que $\bar{k}(S^1 \times 0) \subset V$, que $\bar{k}(S^1 \times 1) \subset V_1$, que $\bar{k}^{-1}(S) \cap \text{Int}(S^1 \times [0, 1]) = \emptyset$ et que $\bar{k}|_{S^1 \times 1}$ ne soit pas nul-homotope. Par le théorème 3 il y a une sous-variété W_0 contenue dans la composante W de $N - S$ qui contient $k(\text{Int}(S^1 \times [0, 1]))$, telle que V et V_1 soient adhérentes à W_0 , que $\partial W_0 \cap (N - S) \cong S^2$ et que $\pi_1(W_0) \cong \mathbb{Z}_2$. Par la proposition de §1 $W - W_0$ est simplement connexe, donc $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}_2$ et $W \in \mathcal{W}$ et par conséquent selon la remarque 1 de §1, $\mathcal{W} - \{V_1\}$ est encore un système d'Epstein.

q.e.d.

Définition: Le système d'Epstein $\mathcal{W}$ de N est projectivement minimal si pour tout $V \in \mathcal{W}$ tel que $V \cong \mathbb{P}^2$, $\mathcal{W} - \{V\}$ n'est plus un système d'Epstein.

Remarque: Soit $\mathcal{M}$ un système d'Epstein projectivement minimal de N . Alors il y a une correspondance biunivoque entre les classes de conjugaison d'éléments de Λ et les membres de $\mathcal{M}$ homéomorphes à $\mathbb{P}^2$. Elle associe à la classe de conjugaison $\bar{\lambda}$ de $\lambda \in \Lambda$ l'élément $V \in \mathcal{M}$, tel que $V \cong \mathbb{P}^2$ et que $\pi_1(V)$ et $\{e, \lambda\}$ sont dans la même classe de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(N, n)$.

Lemme 2: Supposé que $\mathcal{M}$ est un système d'Epstein projectivement minimal, soit $\lambda \in \Lambda$ et soit $\hat{V}_0$ une composante de S^* telle que $I(\hat{V}_0) = \{e, \lambda\}$. On pose $p(\hat{V}_0) = V_0$. Les énoncés suivants sont équivalents:

- (i) $I(\lambda) \neq \{\lambda\} = \{e, \lambda\}$, i.e. il y a $g \in \pi_1(N, n)$ $g \notin I(\hat{V}_0)$ tel que $I(g\hat{V}_0) = I(\hat{V}_0)$.
- (ii) Il y a $W \in \mathcal{M}$ tel que $V_0 \subset \text{Int } \bar{W}$; par conséquent l'adhérence $\hat{W}$ de la composante de $N-S^*$ telle que $(\hat{V}_0)_{-1} \subset \hat{W}$ est compacte, $\partial \hat{W} \subset S^*$ et $\lambda \in I(\hat{W})$.
- (iii) V_0 est contenue dans un facteur N_1 , homotopiquement équivalent à $\mathbb{P}^2 \times S^1$, d'une décomposition en somme connexe de N .
- (iv) $I(\lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ et $I(\lambda)$ est un facteur d'une décomposition en produit libre de $\pi_1(N, n)$.

Si (ii) est vrai, il y a $\beta \in \pi_1(N, n)$, conservant l'orientation, et $y \in \bigoplus_{V \in \mathcal{M}, V=S^2} H_2(p^{-1}V)$ tels que $d\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} = (\beta - e) \{\hat{V}_0\} + (\lambda - e)y$. En ce cas

$I(\lambda) = \langle (\lambda, \beta) \rangle \subset \pi_1(N, n)$. En plus, si $I(g\hat{V}_0) = I(\hat{V}_0)$, il y a

$z \in \bigoplus_{V \in \mathcal{M}, V=S^2} H_2(p^{-1}V)$ tel que

$$\{g\hat{V}_0\} \equiv \{\hat{V}_0\} + (\lambda - e).z \text{ mod im } d.$$

Démonstration: Par intermédiaire du théorème 2 on a l'implication

(ii) $\rightarrow$ (iii). (iv) suit de (iii) par des propriétés élémentaires du produit libre et le fait que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Une adaption de la démonstration de la proposition 2, en posant $V_0 = V_{10}$ et en exigeant que $[k|y_0 \times [0,1]] \neq e \in \pi_1(N, V_0)$, possible d'après (i), donne l'implication (i) $\rightarrow$ (ii). (iv) $\rightarrow$ (i) est évident. q.e.d.

Digression: On dérive un lemme qui est, au sens strict, inutile pour ce travail mais qui va servir quelques fois pour mettre pied à terre.

D'abord une remarque:

Proposition 3: Soit π un sousgroupe de $\pi_1(N, n)$, alors

$$H_{2k}(\pi; H_2(S^*) \otimes \hat{\mathbb{Z}}) = 0 \text{ et } H_{2k}(\pi; H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \hat{\mathbb{Z}}) = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

Démonstration: En posant pour $g \in \pi \setminus \pi_1(N, n)$ et $V \in \mathcal{W}$,

$$A_{V,g} = H_2\left(\bigcup_{h \in \pi} h g \hat{V}\right) \otimes \hat{\mathbb{Z}},$$

on a comme dans le lemme 3) de §2 : $A_{V,g} \cong \mathbb{Z}[\pi] \otimes_{I(g\hat{V}) \cap \pi} \mathbb{Z}$

et $H_2(S^*) \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong \bigoplus_{V,g} A_{V,g}$. La proposition suit alors du fait

que $H_{2k}(\pi; A_{V,g}) \cong H_{2k}(I(g\hat{V}) \cap \pi; \mathbb{Z}) = 0$ pour $k \geq 1$, par la proposition

de Ch I, 3.2 et parce que $I(g\hat{V}) \cap \pi$ est un groupe cyclique (d'ordre inférieur à 2). La deuxième conclusion suit par des arguments analogues.

q.e.d.

Lemme 3: Soit $\lambda \in \wedge_{N,n}(\lambda)$ le sous-groupe de $\pi_1(N, n)$ engendré par λ et $t_\lambda: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ un plongement tel que $t_\lambda|(\mathbb{P}^1, \bar{y}_0)$ représente λ , alors:

1. Si $x \in \pi_2(N, n)$ et $\lambda x = x$ alors x est divisible par $(\lambda + e)$ (i.e.

$$H_2((\lambda); \pi_2(N, n) \otimes \mathbb{Z}) = 0).$$

2. Si $x \in \pi_2(N, n)$ et $\lambda x = -x$ alors $x = a \cdot [t_{\lambda, p_2}] + (\lambda - e) y$ pour $a = 0$ ou $a = 1$ et certain $y \in \pi_2(N, n)$ (i.e.

$$H_1((\lambda); \pi_2(N, n) \otimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ est engendré par}$$

$$\{ ([t_{\lambda, p_2}] \otimes 1) \cdot \lambda \}.$$

Démonstration: On a la partie suivante de la suite exacte longue associée à $SE(N)$ dont les extrémités s'annulent par la proposition 3 (pour $k \geq 2$).

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{2k}((\lambda); \pi_2(N, n) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2k-1}((\lambda); H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}) \xrightarrow{(d \otimes 1)_{2k-1}} \\ \rightarrow H_{2k-1}((\lambda); H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2k-1}((\lambda); \pi_2(N, n) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}$ et $H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}$ ont les bases suivantes en tant que groupes abéliens libres (lemme 2) de §2).

$$B = \{w(g) g \cdot \{\hat{V}\} \otimes 1; V \in \mathcal{W} \text{ et } g \in \pi_1(N, n) / I(\hat{V})\} \text{ et}$$

$$C = \{w(g) g \cdot \{\hat{W}, \partial \hat{W}\} \otimes 1; W \in \mathcal{W} \text{ et } g \in \pi_1(N, n) / I(\hat{W})\} \text{ qui admettent}$$

la multiplication par λ comme involution. Il en suit que les (λ) -modules

$$H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z} \text{ et } H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z} \text{ sont la somme directe d'un } (\lambda)\text{-module}$$

libre et d'un (λ) -module trivial ayant comme base B^λ respectivement

C^λ , qui est l'ensemble de points fixes de λ dans B resp. C .

On peut supposer que $t_\lambda(\mathbb{P}^2)$ fait partie du système d'Epstein de N et que le système est projectivement minimal. Si (ii) du lemme 2

est vrai, il y a $\beta \in \pi_1(N, n)$ conservant l'orientation et tel que

$$I(\lambda) = (\lambda, \beta) \text{ et alors } B^\lambda \text{ et } C^\lambda \text{ peuvent être identifiés au quotient}$$

$$(\lambda, \beta) / (\lambda) \cong (\beta), \text{ de telle façon que par l'isomorphisme}$$

$$H_1((\lambda); \mathbb{Z}[(\beta)]) \cong \mathbb{Z}_2[(\beta)], (d \otimes 1)_{2k-1} \text{ est identifié à la}$$

multiplication $(\beta - e) : \mathbb{Z}_2 [(\beta)] \rightarrow \mathbb{Z}_2 [(\beta)]$.

Du fait que (β) est un groupe infini cyclique, il suit que $(\beta - e)$ est injectif et que le conoyau est engendré par 1. β^0 , c'est à dire que $(d \otimes 1)_{2k-1}$ est injectif et que le conoyau est engendré par

$$\{ ([t_{\lambda} p_2] \otimes 1) \cdot \lambda \} \quad (\text{si } k = 1).$$

Si (i) et (ii) du lemme 2 ne sont pas vrais, $C^\lambda = \emptyset$ et B^λ consiste en un élément. Donc de nouveau, $(d \otimes 1)_{2k-1}$ est injectif et le conoyau est engendré par $\{ ([t_{\lambda} p_2] \otimes 1) \cdot \lambda \}$ (si $k = 1$).

Le lemme en suit par la périodicité de l'homologie de (λ) en dimension supérieure à 1 avec période 2.

q.e.d.

§ 4 -

Self-intersection homotopique.

Soit N une 3-variété compacte connexe, $n \in \mathbb{N}$.

Définition: $\pi_2^{\text{sph}}(N, n)$ est le $\pi_1(N, n)$ -sous-module de $\pi_2(N, n)$ engendré par les classes des plongements de S^2 dans N .

Théorème: Soit $\{ \langle \gamma_i, \sigma_i \rangle; i \}$ un système d'Epstein paramétrisé et projectivement minimal de N . On définit une suite exacte d'homomorphismes de $\pi_1(N, n)$ -modules

$$0 \rightarrow \pi_2^{\text{sph}}(N, n) \hookrightarrow \pi_2(N, n) \xrightarrow{1} \mathbb{Z}[\Lambda_{N, n}] \otimes \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

en posant, si $\sigma_i(S^2) \cong S^2$ que $l([\gamma_i \sigma_i]) = 0$ et si $\sigma_i(S^2) \cong \mathbb{R}P^2$ et que α_i est le lacet non-trivial sur $\sigma_i(S^2)$ que $l([\gamma_i \sigma_i]) = [\gamma_i \alpha_i \gamma_i^{-1}] \otimes 1$.

Démonstration: Les notations sont comme dans §2. On oriente le fibré

normal de $S^* = p^{-1}(\bigcup_i \sigma_i(S^2)) \subset \tilde{N}$ de telle façon que les relèvements $\tilde{\sigma}_i$ (voir §1) ont la propriété que

$\tilde{\sigma}_{i*}\{S^2\} = \{\tilde{\sigma}_i(S^2)\}$. Soit $H_2^{\text{sph}} = \bigoplus_{V \in \mathcal{W}, V \cong S^2} H_2(p^{-1}V)$, alors selon le

lemme 1 b) de §3, $H_2^{\text{sph}} = \pi_2^{\text{sph}}(N, n)$.

On définit l'homomorphisme de $\pi_1(N, n)$ -modules

$$l' : H_2(S^*) / H_2^{\text{sph}} \rightarrow \mathbb{Z}[\Lambda] \otimes \mathbb{Z}$$

en posant pour toute composante $\hat{V}$ de S^* , $\hat{V} \cong \mathbb{P}^2 : l'(\{\hat{V}\}) = \lambda \otimes 1$ si $I(\hat{V}) = \{\lambda, 1\}$. La surjectivité de l' suit de la proposition 1 de §3.

D'après la suite exacte $SE(N)$, il suffit de montrer que $\ker l' =$

$(H_2^{\text{sph}} + d H_3(\tilde{N}, S^*)) / H_2^{\text{sph}}$, parce qu'il en suit que l'homomorphisme

l dont la définition est compatible avec celle de l' est bien défini

et qu'il rend la suite exacte. Puisque l' envoie les générateurs

$\{\hat{V}\}$; $\hat{V}$ composante de S^* et $p\hat{V} \cong \mathbb{P}^2$ de $H_2(S^*) / H_2^{\text{sph}}$ sur la base

$\{\lambda \otimes 1 ; \lambda \in \Lambda\}$ de $\mathbb{Z}[\Lambda] \otimes \mathbb{Z}$ il suffit de montrer si

$l'(\hat{V}_0) = l'(\hat{V}_1)$, que $\{\hat{V}_0\} - \{\hat{V}_1\} \in H_2^{\text{sph}} + d H_3(\tilde{N}, S^*)$.

Ceci est montré dans le lemme 2 de §3.

q.e.d.

L'homomorphisme l est presque indépendant du système d'Epstein paramétrisé. A mon avis son arbitraire est comparable avec le choix d'une orientation du revêtement universel d'une variété pour la définition de l'intersection homologique à valeurs dans l'anneau du groupe fondamental. En effet, du lemme 1 c) de §3, il suit:

Proposition: Soit $t : (\mathbb{P}^2, \tilde{V}_0) \rightarrow (N, n)$ un plongement à fibré normal trivial et soit $\lambda = [t | \mathbb{P}^1]$, alors $l([tp_2]) = \pm \lambda \otimes 1$.

J'appelle λ la self-intersection homotopique, parce que si

$$\sigma : (S^2, y_0) \rightarrow (N, n)$$

est une immersion dont l'image est un plan projectif à fibré normal trivial et que λ est l'élément non trivial de $\pi_1(\sigma(S^2), n)$, on peut faire une (petite) homotopie régulière de σ à une immersion en position générale avec une seule ligne double qui représente λ .

DEMARRAGE, L'HYPOTHESE FONDAMENTALE

Introduction:

Dans §1 on énonce le problème auquel on est intéressé : Sous quelles conditions est-ce que deux applications

$$f, g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$$

sont homotopes rel ∂M . On suppose que f et g coïncident déjà sur le 1-squelette relatif de $(M, \partial M)$ et que $F(f)$, c'est que f (et donc g) induit un isomorphisme de groupes fondamentaux munis de l'homomorphisme d'orientation.

On s'y ramène aux homotopies rel ∂M et rel un point base de M .

Dans §2 on donne des implications de l'hypothèse $F(f)$ pour le degré de f et pour l'homomorphisme $f_{\#} : \pi_2(M, m) \rightarrow \pi_2(N, f(m))$.

§ 1 -

Position du problème et l'hypothèse fondamentale.

On se pose la question suivante:

Soient M et N des variétés compactes de dimension 3, soient données deux applications $f, g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ telles que $f|_{\partial M} = g|_{\partial M}$.

Etant donnée une décomposition cellulaire de M et supposant que f et g coïncident sur le 1-squelette relatif $(M, \partial M)^1$,

Est-ce que f est homotope à g rel ∂M ?

A l'avance on fera l'hypothèse suivante fondamentale:

HYPOTHESE $F(f)$: f induit un isomorphisme $f_{\#}$ de groupes fondamentaux munis de l'homomorphisme d'orientation : $w_N f_{\#} = w_M : \pi_1(M) \rightarrow \{+1, -1\}$
(donc $f^* \mathcal{Z} \stackrel{\sim}{=} \mathcal{Z}$).

Avec la théorie d'obstruction de Ch I,4 on peut décider seulement l'existence d'homotopies rel le 0-squelette $(M, \partial M)^0$. Dans la suite on se débarrasse des complications dues au 0-squelette.

Remarque: Soit $m \in \partial M$ si $\partial M \neq \emptyset$ et $m \in M^0$ sinon. $f \sim g$ rel $\partial M \cup \{m\}$ si et seulement si $f \sim g$ rel $(M, \partial M)^0$.

On voit ceci de la façon suivante: on peut plonger un arbre A dans M poussant en m et dont les branches passent par toutes les 0-cellules $(M, \partial M)^0 \rightarrow M$. $(A - \{m\}) \subset \text{Int } M$. Par une homotopie rel $(M, \partial M)^0$ on peut supposer que $f|_A = g|_A$. L'espace des applications de (A, m) dans $(N, f(m))$ étant contractile, toute homotopie $F : f \sim g$ rel $\partial M \cup \{m\}$ peut être déformée en une homotopie rel $\partial M \cup A \supset (M, \partial M)^0$.

Essentiellement à deux exceptions près le 0-squelette n'a pas d'influence du tout:

Proposition: $f \sim g$ rel ∂M si et seulement si $f \sim g$ rel $(M, \partial M)^0$ sauf si M est homotopiquement équivalente, soit au S^2 -fibré non-orientable sur S^1 , $S^2 \times S^1$, soit à $\mathbb{P}^2 \times S^1$. En ces cas il existe une application $h : M \rightarrow M$ coïncidant avec l'identité sur $(M, \partial M)^1$, de degré -1 (voir Ch I, 2.2) et homotope à l'identité et $f \sim g$ si et seulement si $f \sim g$ rel M^0 ou que $f \sim g \circ h$ rel M^0 . (Remarquez que $g \not\sim g \circ h$ rel M^0 , si $\deg g \neq 0$. Si $\deg g = 0$, $g \not\sim g \circ h$ rel M^0 est possible seulement si $M \sim S^2 \times S^1$ et que $N \sim S^2 \times S^1$ -trouée.)

Démonstration: Soit $m \in (M, \partial M)^0$. On suppose que le centre de $\pi_1(N, f(m))$ est nul. Si il y a une homotopie $F : f \sim g$ rel ∂M , on a un lacet ϕ en $f(m)$, $\phi(t) = F(t, m)$, qui a la propriété que

$$[\phi] \circ g_{\#}(\gamma) [\phi]^{-1} = f_{\#}(\gamma) \text{ pour tout } \gamma \in \pi_1(M, m).$$

Puisque $f_{\#} = g_{\#}$ et que $g_{\#}$ est surjectif (même bijectif), $[\phi]$ appartient au centre de $\pi_1(N, f(m))$. Donc $[\phi] = e$, l'élément neutre, et on peut déformer F parmi les homotopies $f \sim g \text{ rel } \partial M$ en une homotopie $\text{rel } \partial M \cup \{m\}$. Par la remarque, il en suit que $f \sim g \text{ rel } (M, \partial M)^0$. En fait, par la même remarque, $f \sim g \text{ rel } (M, \partial M)^0$ dès que $\partial M \neq \emptyset$. Dans la suite on suppose que $\partial M = \emptyset$ et que le centre de $\pi_1(N, f(m))$ n'est pas trivial. Alors N et M ne sont pas la somme connexe de deux variétés non-simplement connexes.

Deux cas se présentent:

a) $\pi_2(M, m) = 0$: Si $\pi_1(M, m)$ est infini M est un espace d'Eilenberg-MacLane et $H_3(\pi_1(M, m); \mathbb{Z}) = H_3(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, donc $\partial N = \emptyset$ et N est un espace d'Eilenberg-MacLane, donc $f \sim g \text{ rel } m$ dès que $f|_{M^1} = g|_{M^1}$. Si $\pi_1(M, m)$ est fini, $H_3(\pi_1(M, m); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/|\pi_1(M, m)|$ est engendré par la classe fondamentale de M ($[T]$, voir aussi la démonstration du lemme de §2.1) et donc $\partial N = \emptyset$ et par conséquent $\pi_2(N, f(m)) = 0$. La première obstruction à l'existence d'une homotopie $f \sim g \text{ rel } M^1$ se trouve dans $H^3(M; f^* \pi_3(N)) \cong \mathbb{Z}$ et est proportionnelle à la différence de degrés $\deg(f) - \deg(g)$. Puisque M et N sont nécessairement orientables, on ne peut pas changer le degré de f par une homotopie quelconque, donc $f \sim g$ implique déjà $f \sim g \text{ rel } M^1$.

b) $\pi_2(M, m) \neq 0$: Si il y a une 2-sphère (resp. un plan projectif à fibré normal trivial) plongée dans M (cf. le théorème de Ch II, 1) M a $S^2 \times S^1$ ou $S^2 \tilde{\times} S^1$ (resp. $\mathbb{P}^2 \times S^1$ selon le lemme 2(i-iii) de Ch II, 3) comme facteur de somme connexe. Donc $M \sim S^2 \times S^1$ ou $M \sim S^2 \tilde{\times} S^1$ (resp. $M \sim \mathbb{P}^2 \times S^1$). Pour $X = S^2 \times S^1$, resp. $S^2 \tilde{\times} S^1$ et $\mathbb{P}^2 \times S^1$ on désigne par $\mathcal{H}_X$ le groupe des équivalences d'homotopie de X . L'évaluation en un point $*$ induit un homomorphisme $\pi_1(\mathcal{H}_X, \text{Id}) \rightarrow \pi_1(X, *)$ qui est sur-

jectif sur $\ker w_X$. Supposé que $F : f \sim g$, soit ϕ le lacet construit à l'aide de F comme ci-dessus, alors $f \sim g \text{ rel } M^0$ si $w_N([\phi]) = +1$. L'homéomorphisme $h : X \rightarrow X$, où $X = S^2 \times S^1$ (resp. $\mathbb{P}^2 \times S^1$), qui en chaque fibre de la fibration $X \rightarrow S^1$ induit la symétrie équatoriale de S^2 (resp. le quotient de cette symétrie par l'application antipodale) est l'identité sur X^1 , pour une décomposition cellulaire bien choisie. h est de degré -1 et il est homotope, voire isotope, à l'identité de telle façon que le lacet ϕ associé à cette homotopie renverse l'orientation. La proposition suit facilement. Remarquons que si $M \sim \mathbb{P}^2 \times S^1$, $H_3(\pi_1(M, m); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ est engendré par la classe fondamentale de M , et donc $\partial N = \emptyset$ et selon le lemme de §2.1 le degré de g est impair. Ceci établit la remarque de la proposition.

c.q.f.d.

§ 2 -

Implications de l'hypothèse fondamentale.

2.1 Le degré.

La conjecture de Kneser, démontrée par Stallings ([S4]), affirme qu'une décomposition en produit libre du groupe fondamental d'une variété compacte donne lieu à une décomposition correspondante en somme connexe. Conjecture de Kneser: Soient (K_0, k_0) et (K_1, k_1) des espaces d'Eilenberg-MacLane non-triviaux et soient M une 3-variété compacte, $m \in M$ et

$$c : (M, m) \rightarrow (K_0 \bigcup_{k_0=0} [0, 1] \bigcup_{1=k_1} K_1, \frac{1}{2})$$

une application induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux telle que $c^{-1}(\frac{1}{2}) \cap \partial M = \emptyset$. Alors il y a une homotopie

$C : c \sim c' \text{ rel } \partial MU\{m\}$ où c' est une application transversale sur $\frac{1}{2}$

telle que $(c')^{-1}(\frac{1}{2}) \cong S^2$.

Lemme: Soit $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application de 3-variétés compactes, induisant un isomorphisme $f_{\#}$ de groupes fondamentaux. Si N est la réunion de deux sous-variétés compactes non simplement connexes N_1 et N_2 telle que $\partial N_2 = N_1 \cap N_2$ et que $\partial N_2 \cong S^2$ on peut affirmer que

1°. Si $\pi_1(N_2)$ est fini, le degré de f et l'ordre de $\pi_1(N_2)$ sont relativement premiers,

2°. Si $N_2 \bigcup_{\partial N_2=S^2} D^3$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{P}^2 \times S^1$, le degré de f est impair.

Complément: Si $N_2 \bigcup_{\partial N_2=S^2} D^3$ est irréductible et le nombre de bouts de $\pi_1(N_2)$ n'est pas 0 ou 2, le degré de f est ± 1 et le signe est déterminé par l'isomorphisme $f_{\#}$.

Démonstration: (Cf [T] et [S7]). Par la conjecture de Kneser il y a une décomposition de $M, M = M_1 \cup M_2$ telle que $M_1 \cap M_2 = \partial M_2 \cong S^2$ contienne le point base $m \in M$, que $f(m) = n \in N_1 \cap N_2$ et que

$$f_{\#} \pi_1(M_i, m) = \pi_1(N_i, n) \text{ pour } i = 1, 2.$$

En notant $K_i = K(\pi_1(M_i, m), 1)$, $L_i = K(\pi_1(N_i, n), 1)$ et $\phi_i: (K_i, k_i) \rightarrow (L_i, l_i)$

l'application correspondante à $f_{\#} | \pi_1(M_i, m)$, pour $i = 1, 2$, on obtient le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc} (M, \partial M) & \xrightarrow{\alpha} & (K_1 \vee K_2, K_1) & \xrightarrow{\alpha'} & (K_2, k_2) \\ \downarrow f & & \downarrow \phi_1 \vee \phi_2 & & \downarrow \phi_2 \\ (N, \partial N) & \xrightarrow{\beta} & (L_1 \vee L_2, L_1) & \xrightarrow{\beta'} & (L_2, l_2) \end{array}$$

où α et β correspondent à la factorisation en produit libre

$$\pi_1(M, m) = \pi_1(M_1, m) * \pi_1(M_2, m) \quad \text{resp.} \quad \pi_1(N, n) = \pi_1(N_1, n) * \pi_1(N_2, n)$$

et où α' et β' correspondent au collapse de K_1 et $\mathbb{E}_1$ sur un point.

Alors on a la relation suivante pour les classes fondamentales de M et

$$\text{de } N: (\phi_2)_* (\alpha' \alpha)_* \{M, \partial M\} = \deg(f) \cdot (\beta' \beta)_* \{N, \partial N\} \in H_3(L_2; \tilde{\mathbb{Z}}).$$

Au cas 1^0 , N_2 est orientable (théorème 2 de Ch II,3) et le revêtement universel de $N_2 \underset{\partial N_2 = S^2}{\bigcup} D^3$ est homotopiquement équivalent à S^3 ,

donc $H_3(L_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z} / |\pi_1(N_2, n)| \mathbb{Z}$ ayant comme générateur

$$(\beta' \beta)_* \{N, \partial N\} \quad ([T]).$$

De même $(\alpha' \alpha)_* \{M, \partial M\}$ engendre $H_3(K_2; \tilde{\mathbb{Z}})$ et

puisque ϕ_2 est une équivalence d'homotopie il est nécessaire que

$\deg f$ et $|\pi_1(N, n)|$ soient relativement premiers.

Au cas 2^0 , $L_2 \sim \mathbb{P}^2 \times S^1$, et alors $H_3(L_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \cong H_3(\pi_1(\mathbb{P}^2 \times S^1); \tilde{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}_2$,

engendré par $(\beta' \beta)_* \{N, \partial N\}$ et comme avant $\deg f$ et 2 sont relative-

ment premiers.

q.e.d.

Pour le complément il faut un raisonnement assez subtil en présence de plans projectifs à fibré normal trivial.

Selon le théorème suivant, les conclusions du lemme 1^0 et 2^0 ne dépendent que du groupe fondamental de N :

Théorème ($[E; (9.5) \text{ resp. } (8.2)(ii)]$): Soit N une 3-variété et G

un sousgroupe de $\pi_1(N)$ isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ (resp. fini et contenu dans $\ker w_N$) alors $N = Q \# R$ où Q est une variété fermée telle que

$\pi_1 Q \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, (resp. $\pi_1(Q)$ est fini) et que G est conjugué à un sous-groupe de $\pi_1(Q)$.

Si $\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, Q est homotopiquement équivalent à $\mathbb{P}^2 \times S^1$. (Cf.

le théorème 3 de Ch.II,3.)

2.2 -

Le deuxième groupe d'homotopie.

Le point de vue développé ici est emprunté à [L, App. III].

Soit M une 3-variété sans bord, $m \in M$, et soit donnée une classe fondamentale $\{\tilde{M}\} \in H_3^{lf}(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ du revêtement universel $\tilde{M}$ de M .

Définition: $\theta_{M,m}$ est la composition des isomorphismes de $\pi_1(M,m)$ -modules:

$$\theta_{M,m}: H^1(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]^0) \rightarrow H_c^1(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap \{\tilde{M}\}} \mathbb{Z} \otimes H_2(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{1 \otimes h_{M,m}} \mathbb{Z} \otimes \pi_2(M,m)$$

où le premier vient de Ch I, §3.2 et le troisième de Ch II, 1 et où

l'action de $\pi_1(M,m)$ est explicité dans les flèches verticales du diagramme suivant (voir Ch I, §3.1).

$$\begin{array}{ccccc} H^1(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]^0) & \longrightarrow & H_c^1(\tilde{M}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cap \{\tilde{M}\}} & \mathbb{Z} \otimes H_2(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow \lambda_g & & \downarrow (g^{-1})^* & & \downarrow w(g) \otimes g_* \\ H^1(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]^0) & \longrightarrow & H_c^1(\tilde{M}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cap \{\tilde{M}\}} & \mathbb{Z} \otimes H_2(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Par les diverses propriétés de naturalité, on a la propriété suivante:

Si $f: (M,m) \rightarrow (N,n)$ satisfait à $F(f)$, alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H^1(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)]^0) & \xrightarrow{\theta_{M,m}} & \mathbb{Z} \otimes \pi_2(M,m) \\ \downarrow f^* \cdot f_1^{-1} & & \downarrow 1 \otimes f_2 \\ H^1(N; \mathbb{Z}[\pi_1(N)]^0) & \xrightarrow{\deg(f) \cdot \theta_{N,n}} & \mathbb{Z} \otimes \pi_2(N,n) \end{array}$$

et $f^* \cdot f_1^{-1}$ est un isomorphisme (par une version cohomologique de Ch I, 2.3) d'où

Il y a un isomorphisme $\phi_f : \pi_2(M, m) \rightarrow \pi_2(N, n)$ tel que

$$f_2 = \deg(f) \cdot \phi_f : \pi_2(M, m) \rightarrow \pi_2(N, n).$$

DU 1-SQUELETTE AU 2-SQUELETTE

Introduction.

Soient M et N des variétés compactes et connexes de dimension 3, et soit M munie d'une décomposition cellulaire. Soient

$f, g: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ des applications telles que $f|_{(M, \partial M)^1} = g|_{(M, \partial M)^1}$.

L'obstruction pour l'existence d'une homotopie rel $(M, \partial M)^0$ de f à g jusqu'au 2-squelette de M est l'élément

$$d^2(f, g; \partial M) \in H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)).$$

Dans §1 on calcule ce groupe de "premières obstructions". On ne tardera pas de faire l'hypothèse $F(f)$ que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux munis de l'homomorphisme d'orientation.

Pour calculer $H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$ on se sert de la présentation $SE(N)$ de $\pi_2(N, n)$ comme $\pi_1(N, n)$ -module (voir Ch II, 2). En appliquant la dualité de Poincaré et l'isomorphisme $f_{*,1}$ on se ramène au calcul de $H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z})$. Enfin on trouve une suite exacte (le cas où $\partial N = \emptyset$ et $\pi_1(N)$ fini, étant exclus par $SE(N)$):

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{1_f} H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \xrightarrow{\delta} D \rightarrow 0.$$

Ici R est le $\mathbb{Z}_2$ -module fini $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \mathbb{Z}[\wedge]$ ayant une base en cor-

respondance biunivoque avec les plans projectifs d'un système d'Epstein projectivement minimal. $D = \mathbb{Z}$ si N admet un revêtement fermé (donc fini) à groupe fondamental libre et $D = 0$ sinon. Dans §1.2 on dérive une expression maniable pour ι_f et un inverse à gauche de ι_f indépendant du système d'Epstein. Dans §2 on exprimera ces premières obstructions en termes familiers: l'image de ι_f contient les obstructions

$d^2(f, f \circ \rho)$ où ρ est la rotation parallèle à un plan projectif à fibré normal trivial dans M et il y a un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$, tel que $\delta(d^2(f, h)) = \frac{1}{k_0} (\deg(h) - \deg(f))$ pour toute application h coïncidant avec f sur le 1-squelette de $(M, \partial M)$.

En l'absence de plans projectifs à fibré normal trivial ces résultats ont été obtenus dans [H2].

§ 1 -

Le calcul du groupe de premières obstructions.

1.1 -

La mise en une suite exacte courte.

Soit $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application de 3-variétés compactes connexes comme dans l'introduction et soit $f(m) = n$. On se donne un système d'Epstein $\mathcal{W}$ de N et on utilise la notation du Ch II, 2, en notant par exemple $S = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$.

Sous l'hypothèse $SE(N)$ on a la suite exacte de systèmes locaux induite par f de $SE(N)$:

$$0 \rightarrow f^* H_3(\tilde{N}, S^*) \xrightarrow{d} f^* H_2(S^*) \xrightarrow{i} f^* \pi_2(N) \rightarrow 0.$$

On désigne l'homomorphisme de coefficients associé à d par

$$d^i: H^i(M, \partial M; f^* H_3(\tilde{N}, S^*)) \rightarrow H^i(M, \partial M; f^* H_2(S^*)).$$

La suite exacte de coefficients en cohomologie de $(M, \partial M)$ associée à la suite exacte courte ci-dessus donne alors lieu à la suite exacte suivante

$$(*) \quad 0 \rightarrow \text{coker } d^2 \xrightarrow{i^2} H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \rightarrow \ker d^3 \rightarrow 0.$$

Dans ce paragraphe on montrera (sous les hypothèses SE(N) et F(f)):

Théorème : La suite (*) est isomorphe à une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \mathbb{Z}[\wedge_{N,n}] \xrightarrow{f} H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \xrightarrow{\delta} D \rightarrow 0$$

où $D = \mathbb{Z}$ si N est fermée et $\pi_1(N,n)$ a un sous-groupe libre d'indice fini et où $D = 0$ sinon. $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \mathbb{Z}[\wedge_{N,n}]$ est un $\mathbb{Z}_2$ -module de rang fini inférieur au nombre de plans projectifs dans $\mathcal{M}$.

Sous l'hypothèse F(f) on a les propriétés

1) si $i = 0, 1$, $f_{*,i} : H_i(M; f^*G) \rightarrow H_i(N; G)$ est un isomorphisme pour tout système local G sur N (lemme 1 de Ch I, 2.3) et

2) $f^* \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Après le choix d'une classe fondamentale $\{M, \partial M\} \in H_3(M, \partial M; \mathbb{Z})$ on a la

Proposition: Le diagramme suivant, dont les flèches verticales sont des isomorphismes pour $i = 0, 1$, est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{3-i}(M, \partial M; f^* H_3(\hat{N}, S^*)) & \xrightarrow{d^{3-i}} & H^{3-i}(M, \partial M; f^* H_2(S^*)) \\ \downarrow \cap \{M, \partial M\} & & \downarrow \cap \{M, \partial M\} \\ H_i(M; f^* H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_i(M; f^* H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_i(N; H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(d\partial 1)_i} & H_i(N; H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) \end{array}$$

Corollaire: $\text{coker } d^2 \cong \text{coker } (d \otimes 1)_1$ et $\text{ker } d^3 \cong \text{ker } (d \otimes 1)_0$.

Pour le théorème il suffit de démontrer les propositions suivantes

Lemme 1: $\text{ker } (d \otimes 1)_0 = \mathbb{Z}$ si $N = \bigcup_{W \in \mathcal{M}} \bar{W}$; $\text{ker } (d \otimes 1)_0 = 0$ sinon.

Remarque: $N = \bigcup_{W \in \mathcal{M}} \bar{W}$ si et seulement si N est fermée et $\pi_1(N, n)$

contient un sous-groupe libre d'indice fini.

Lemme 2: Il y a un isomorphisme $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \mathbb{Z}[\Lambda_{N, n}] \rightarrow \text{coker } (d \otimes 1)_1$

tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_{N, n}$ et toute composante $\hat{V}$ de S^* , ensemble fixe de λ (i.e. $\lambda \in I(\hat{V})$), $1 \otimes \lambda$ correspond à la classe dans $\text{coker } (d \otimes 1)_1$ de

$$\{(\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda\} \in H_1(N; H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}).$$

Complément: Si $\mathcal{M}$ est un système d'Epstein projectivement minimal, alors $\text{coker } (d \otimes 1)_1 \cong H_1(S)$ par un isomorphisme qui envoie la classe de $\{(\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda\}$ sur l'élément non trivial de $H_1(V)$. (Cf. la remarque de Ch II, 3.)

Rappelons que par le lemme de Ch II, 2 il y a une identification d'homomorphismes

$$\begin{aligned} d \otimes 1 = \sum_{W \in \mathcal{M}} \sum_{V, \epsilon} \epsilon d(W, V, \epsilon) \otimes 1: \bigoplus_{W \in \mathcal{M}} H_3(p^{-1}(\bar{W}), p^{-1}(\bar{W}-W)) \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_{V \in \mathcal{M}} H_2(p^{-1}(V)) \otimes \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{et que } d(W, V, \epsilon) (\{\hat{W}, \partial \hat{W}\}) = \frac{1}{|I(\hat{V})|} \sum_{g \hat{V} \subset \hat{W}} w_N(g) g \{\hat{V}\}.$$

Démonstration du lemme 1 (cf. [H2]): On a le diagramme suivant, commutatif par le lemme 2 de Ch I, 2.3:

$$\begin{array}{ccc}
 H_0(N; H_3(p^{-1}(\bar{W}), p^{-1}(\bar{W}-W)) \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(d(W,V,\epsilon) \otimes 1)_0} & H_0(N; H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} [H_3(p^{-1}(\bar{W}), p^{-1}(\bar{W}-W)) \otimes \mathbb{Z}] & \xrightarrow{1 \otimes (d(W,V,\epsilon) \otimes 1)} & \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} [H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}].
 \end{array}$$

Et il suit immédiatement du lemme 3) de Ch II,2 que le groupe

$$\mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} [H_3(p^{-1}(\bar{W}), p^{-1}(\bar{W}-W)) \otimes \mathbb{Z}] \quad (\text{resp. } \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} [H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}])$$

est le groupe infini cyclique engendré par $\underline{W} = 1 \otimes [(\hat{W}, \partial \hat{W}) \otimes 1]$

(resp. par $\underline{V} = 1 \otimes [(\hat{V}) \otimes 1]$). Si $V_\epsilon \subset W$, on a la formule

$$1 \otimes (d(W,V,\epsilon) \otimes 1) (\underline{W}) = \frac{|I(\hat{W})|}{|I(\hat{V})|} \cdot \underline{V}.$$

Clairement par les isomorphismes ci-dessus, l'homomorphisme $(d \otimes 1)_0$

s'identifie à l'homomorphisme

$$\Delta : \bigoplus_{W \in \mathcal{M}} \mathbb{Z} \cdot \underline{W} \rightarrow \bigoplus_{V \in \mathcal{M}} \mathbb{Z} \cdot \underline{V}$$

défini par $\Delta(\underline{W}) = \sum_{V, \epsilon \text{ tels que } V_\epsilon \subset W} \epsilon \frac{|I(\hat{W})|}{|I(\hat{V})|} \underline{V}$.

Soit $\sum_{W \in \mathcal{M}} n_W \underline{W}$ un élément non nul. Si le bord de la réunion

$\bigcup_{n_W \neq 0} \underline{W}$ n'est pas vide, il contient une composante $V \in \mathcal{M}$. En ce cas le coefficient de $\Delta(\sum n_W \underline{W})$ sur $\underline{V}$ n'est pas nul. Par conséquent, si

$$N \neq \bigcup_{W \in \mathcal{M}} W, \ker \Delta = 0 = \ker (1 \otimes d)_0.$$

Si $N = \bigcup_{W \in \mathcal{M}} W$ et $\sum n_W \underline{W} \in \ker \Delta$, notant $W(V, \epsilon)$ le membre de $\mathcal{M}$

tel que $V_\epsilon \subset W(V, \epsilon)$, alors pour tout $V \in \mathcal{M}$

$$n_{W(V, +1)} |I(\hat{W}(V, +1))| = n_{W(V, -1)} |I(\hat{W}(V, -1))|$$

et donc $\sum_{W \in \mathcal{M}} n_W \underline{W}$ est un multiple de $\sum_{W \in \mathcal{M}} \frac{k_0}{|I(\hat{W})|} \underline{W} \in \ker \Delta$, où

$k_0 = \text{p.p.c.m.} (|I(\hat{W})| ; W \in \mathcal{M})$. (N est supposée connexe.) q.e.d.

Démonstration de la remarque (Cf. [H2]): Il est facile de construire

un revêtement fini à k_0 feuillets de N , $q : \hat{N} \rightarrow N$, tel que $q^{-1}(W)$

est la réunion disjointe de $\frac{k_0}{|I(\hat{W})|}$ exemplaires du revêtement universel

$\hat{W}$ de W et que $q^{-1}(V)$ est la réunion disjointe de $\frac{k_0}{|I(\hat{V})|}$ exemplaires du

revêtement universel $\hat{V}$ de V . Par le théorème de van Kampen le groupe fondamental de $\hat{N}$ est libre.

Démonstration du lemme 2 : Soit $V \in \mathcal{M}$, par le lemme 3) de Ch II,2 on

$$a \quad H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} [\pi_1(N, n)] \otimes_{I(\hat{V})} \mathbb{Z} [\{\hat{V}\}]$$

et du lemme 1 de Ch I,2.3 et de la proposition de Ch I, 3.2 on déduit les isomorphismes suivants

$$H_1(N; H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}) \cong H_1(\pi_1(N, n); H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}) \cong H_1(I(\hat{V}); \mathbb{Z}) \cong H_1(V; \mathbb{Z}).$$

Si V est une sphère ce groupe est trivial. Sinon V est un plan projectif

et si λ est l'élément non trivial de $I(\hat{V})$, $H_1(N; H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z})$ est engendré par $\{(\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda\} = 1_V$, qui est d'ordre 2.

Soient $W \in \mathcal{M}$, $V \in \mathcal{M}$, $\epsilon \in \{+1, -1\}$, tels que $V_\epsilon \subset W$. Si

V est une sphère $(d(W, V, \epsilon) \otimes 1_{\mathbb{Z}})_1 = 0$. Si V est un plan projectif,

alors le groupe fondamental de W , étant fini, est d'ordre 2 (théorème 2 de Ch II, 3) et il y a une seule paire (V', ϵ') différente de (V, ϵ) telle que $V' \in \mathcal{M}$, $\epsilon' \in \{+1, -1\}$, $V \cong \mathbb{P}^2$ et que $V'_\epsilon \subset W$. Il est clair qu'en ce cas $d(W, V, \epsilon) \otimes 1_{\mathbb{Z}}$ et $d(W, V', \epsilon') \otimes 1_{\mathbb{Z}}$ sont des isomorphismes et par conséquent

$$(d \otimes 1_{\mathbb{Z}})_1 (1_W) = 1_V + 1_{V'}$$

où 1_W désigne l'élément non trivial de $H_1(N; H_3(p^{-1}\bar{W}, p^{-1}(\bar{W}-W)) \otimes \mathbb{Z})$.

On en déduit que $1_{V_0} = 1_{V_1} \in \text{coker}((d \otimes 1_{\mathbb{Z}})_1)$ implique que $I(\hat{V}_0)$ est conjugué avec $I(\hat{V}_1)$. Réciproquement il y a une "chaîne" de membres $W \in \mathcal{M}$ de V_0 à V_1 , selon la proposition 2 de Ch II, 3, d'où on a $1_{V_0} = 1_{V_1}$. Le lemme suit alors de l'égalité $1_V = \{(\hat{V}) \otimes 1\} \cdot \lambda$ pour toute composante $\hat{V}$ de $p^{-1}V$ et λ tel que $I(\hat{V}) = \{1, \lambda\}$.

q.e.d.

1.2 -

Fonctorialité et scindement.

On définit $\iota_f: \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \mathbb{Z}[\wedge_{N, n}] \rightarrow H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$ comme la composition des isomorphismes du lemme 2 et le corollaire et de l'homomorphisme ι^2 de la suite exacte $(*)$ de § 1.1.

Soit ϕ_f l'isomorphisme composé

$$\phi_f: H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \xrightarrow{\cap \{M, \partial M\}} H_1(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z})$$

alors on a la propriété suivante de ι_f :

Proposition 1: Soit $\lambda: (S^1, x_0) \rightarrow (N, n)$ un représentant de $\lambda = [\underline{\lambda}] \in \Lambda$

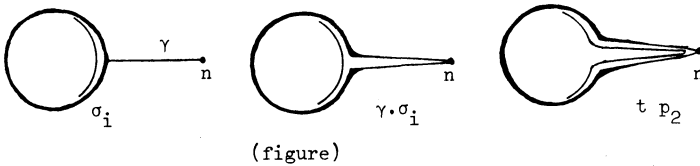
et soit $s: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ une application telle que la restriction $\sigma|_{\mathbb{P}^1}$ égale λ (par intermédiaire d'un homéomorphisme $\mathbb{P}^1 \cong S^1$).

Alors

$$\phi_f^{-1} (1 \otimes \lambda) = \{ ([s p_2] \otimes 1) \cdot \lambda \}$$

Démonstration: Soit $\{ \langle \gamma_i, \sigma_i \rangle; i \}$ un système d'Epstein paramétrisé associé à $\mathcal{M}$. De la remarque de Ch II,3 on sait qu'il existe un indice i et un chemin γ de n à σ_i (y_0) tel que, en notant α le lacet non trivial sur $\sigma_i(S^2)$, λ soit homotope rel n à $\gamma\alpha\gamma^{-1}$. Alors il est facile de construire une application (voire un plongement) $t: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ telle que $t|_{\mathbb{P}^1} = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ et que $t p_2$ soit homotope à $\gamma \cdot \sigma_i$ (voir la figure). On sait du lemme 2 de §1.1 que

$$\phi_f^{-1} (1 \otimes \lambda) = \{ ([\gamma \sigma_i] \otimes 1) \cdot \lambda \} = \{ ([t p_2] \otimes 1) \cdot \lambda \}.$$



Il y a une homotopie de s jusqu'à une application

$s': (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ rel $\bar{y}_0$ telle que $s'|_{\mathbb{P}^1} = t|_{\mathbb{P}^1}$. Soit

$d^2(s', t) \in \pi_2(N, n)$ la classe de la différence entre s' et t sur la 2-cellule $\mathbb{P}^2 - \mathbb{P}^1$, alors $[s' p_2] - [t p_2] = (1 - \lambda) d^2(s', t)$

et donc [en utilisant la formule du bord

$$\partial(x \otimes 1 \cdot (g_1, g_2)) = x \otimes 1 \cdot g_1 + g_1^{-1} x \otimes w_N(g_1^{-1}) \cdot g_2 - x \otimes 1 \cdot g_1 g_2]$$

on a $([s' p_2] \otimes 1) \cdot \lambda - ([t p_2] \otimes 1) \cdot \lambda = \partial(d^2(s', t) \otimes 1 \cdot (\lambda, \lambda) + d^2(s', t) \otimes 1 \cdot (e, e))$.

c.q.f.d.

Il est intéressant de comparer le résultat suivant démontré ci-dessus avec le lemme 3 de Ch II,3.

Remarque: Soient $s, t : (P^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ deux applications telles que $s|P^1 \sim t|P^1 \text{ rel } \bar{y}_0$ et posons $\lambda = [s|P^1] \in \pi_1(N, n)$. Alors il y a un élément $y \in \pi_2(N, n)$ tel que $[s p_2] = [t p_2] + (e - \lambda) \cdot y$.

Un corollaire de la proposition 1 est la suivante, exprimant la functorialité de ι_f :

Proposition 2: L'homomorphisme de coefficients

$$(f_{\#})^2 : H^2(M, \partial M; \pi_2(M)) \rightarrow H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$$

définit l'isomorphisme suivant sur les sousgroupes de torsion

$$1 \otimes f_1 : Z_2 \otimes_{\pi_1(M, m)} Z[\wedge_{M, m}] \rightarrow Z_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} Z[\wedge_{N, n}]$$

où f_1 est induit de la restriction à $\wedge_{M, m}$ (et $\wedge_{N, n}$) de l'isomorphisme $f_{\#, 1} : \pi_1(M, m) \rightarrow \pi_1(N, n)$.

Démonstration: On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 Z_2 \otimes_{\pi_1(M, m)} Z[\wedge_{M, m}] & \xrightarrow{?} & Z_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} Z[\wedge_{N, n}] \\
 \downarrow \iota_{\text{Id}} & & \downarrow \iota_f \\
 H^2(M, \partial M; \pi_2(M)) & \xrightarrow{(f_{\#})^2} & H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \\
 \downarrow \cap \{M, \partial M\} = \phi_{\text{Id}} & & \downarrow \cap \{M, \partial M\} \\
 H_1(M; \pi_2(M) \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(f_{\#} \otimes 1)_1} & H_1(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{f^*} H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z})
 \end{array}$$

$\nearrow \phi_f$

Soient $\underline{\lambda} : (S^1, x_0) \rightarrow (M, m)$ un représentant de $\lambda = [\underline{\lambda}] \in \wedge_{M, m}$ et

$s: (\mathbb{P}^2, \overline{y}_0) \rightarrow (M, m)$ une application telle que $s|_{\mathbb{P}^1}$ soit égale à $\underline{\lambda}$,

alors on a les égalités suivantes à l'aide de la proposition 1:

$$\begin{aligned} f_* ((f_{\#})^2 \iota_{\text{Id}} (1 \otimes \lambda) \cap \{M, \partial M\}) &= f_* (f_{\#} \otimes 1)_1 [\iota_{\text{Id}} (1 \otimes \lambda) \cap \{M, \partial M\}] = \\ &= f_* (f_{\#} \otimes 1)_1 (\{([s p_2] \otimes 1) \cdot \lambda\}) = f_* (\{[f s p_2] \otimes 1\} \cdot \lambda) = \\ &= \{[f s p_2] \otimes 1\} \cdot f_1(\lambda) = f_* (\iota_f (1 \otimes f_1(\lambda)) \cap \{M, \partial M\}) \text{ puisque} \\ f s|_{\mathbb{P}^1} &\text{ est égale à } f \underline{\lambda}. \end{aligned}$$

La proposition en suit par la bijectivité de f_* et de $\cap \{M, \partial M\}$.

q.e.d.

La suite exacte du théorème de §1.1 possède un scindeur indépendant du choix du système d'Epstein:

Théorème: La composition des homomorphismes suivants

$$\begin{aligned} H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) &\xrightarrow{1^2} H^2(M, \partial M; f^* \mathbb{Z}[\Lambda_N] \otimes \mathbb{Z}) \xrightarrow{w_M^U} H^3(M, \partial M; \mathbb{Z}_2 \otimes f^* \mathbb{Z}[\Lambda_N]) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \mathbb{Z}[\Lambda_{N, n}] \end{aligned}$$

est un inverse à gauche de ι_f . (1^2 est l'homomorphisme de coefficients associé à la self-intersection homotopique et w_M est la première classe de Stiefel-Whitney).

Démonstration: Soit $\lambda \in \Lambda_{N, n}$ et soit $t: (\mathbb{P}^2, \overline{y}_0) \rightarrow (N, n)$ un plongement tel que, $[t|_{\mathbb{P}^1}] = \lambda$ (t existe selon le théorème 1 de Ch II, 3). Alors

$$\begin{aligned} (w_M \cup 1^2 \iota_f(1 \otimes \lambda)) \cap \{M, \partial M\} &= w_M \cap ((1 \otimes 1)_1 \{([t p_2] \otimes 1) \cdot \lambda\}) = \\ &= w_M \cap \{(\lambda \otimes 1) \cdot \lambda\} = w_M(\lambda) \otimes \lambda = 1 \otimes \lambda. \end{aligned}$$

La première égalité est une conséquence de la relation cup-cap qui

reste vraie à coefficients dans des systèmes locaux et de la factorialité

de la dualité de Poincaré par rapport au système local. La deuxième égalité suit de la proposition de Ch II, 4.

q.e.d.

§ 2 -

Sur la réalisation de premières obstructions.

2.1 -

Le degré. Soit $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ l'application comme dans l'introduction. On choisit des classes fondamentales de M et de N . Dans la suite on va étudier la surjection de la suite exacte du théorème de §1.1.

$$\delta: H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \rightarrow D$$

Théorème: Supposé que N (et M) sont fermées et que $\pi_1(N, n)$ contient un sous-groupe libre d'indice fini, il y a un générateur $a \in D = \mathbb{Z}$ et un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour toute application $g: M \rightarrow N$ coïncidant avec f sur le 1-squelette M^1 on ait l'égalité

$$\delta d^2(f, g) = \frac{\deg(g) - \deg(f)}{k_0} \cdot a.$$

L'entier k_0 est le minimum des indices des sous-groupes libres de $\pi_1(N, n)$.

Démonstration: (cf. [H2]) Soit $x \in H^2(M; f^* \pi_2(N))$, soient $g, g': M \rightarrow N$ des applications coïncidant avec f sur M^1 , telles que

$$d^2(f, g) = d^2(f, g') = x.$$

(Il y en a par Ch I, 4.1 (c)). Alors g' est homotope rel M^0 à une application g'' coïncidant avec g sur M^2 . Sous l'hypothèse $SE(N)$, impliquant que le revêtement universel de N n'est pas une variété fermée,

toute application $S^3 \rightarrow N$ est de degré zéro d'où

$$\deg(g) = \deg(g'') = \deg(g').$$

Je peux donc définir une fonction

$$\mu_f: H^2(M; f^* \pi_2(N)) \rightarrow \mathbb{Z}$$

de telle façon que $\mu_f(x) = \deg(g) - \deg(f)$.

Le revêtement associé à un sous-groupe libre d'indice fini de $\pi_1(N, n)$ est désigné par $q: (\hat{N}, \hat{n}) \rightarrow (N, n)$, le revêtement induit de q par f par $p: (\hat{M}, \hat{m}) \rightarrow (M, m)$ et le relèvement de f par $\hat{f}: (\hat{M}, \hat{m}) \rightarrow (\hat{N}, \hat{n})$. Les classes fondamentales de $\hat{M}$ et de $\hat{N}$ sont choisies de telle façon que les degrés de p et q sont positifs.

Si $g: M \rightarrow N$ est une application coïncidant avec f sur M^1 et $\hat{g}$ est le relèvement tel que $\hat{g}(\hat{m}) = \hat{n}$, alors $\deg(\hat{g}) = \deg(g)$, $\deg(\hat{f}) = \deg(f)$ et $(q_{\#})^* d^2(\hat{g}, \hat{f}) = p^* d^2(g, f)$. Par conséquent on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(\hat{M}; \hat{f}^* \pi_2(\hat{N})) & \xrightarrow{\mu_{\hat{f}}} & \mathbb{Z} \\ \uparrow \{(q_{\#})^*\}^{-1} & & \uparrow \mu_f \\ H^2(\hat{M}; (q\hat{f})^* \pi_2(N)) & \xleftarrow{p^*} & H^2(M; f^* \pi_2(N)) \end{array}$$

$(q_{\#}: \hat{f}^* \pi_2(\hat{N}) \rightarrow (q\hat{f})^* \pi_2(N))$ est l'isomorphisme induit par

$$q_{\#}: \pi_2(\hat{N}, \hat{n}) \rightarrow \pi_2(N, n).$$

Par le lemme de [H2, §2.4] $\mu_{\hat{f}}$ est un isomorphisme de groupes. Par ailleurs, l'image de $p^* \{(q_{\#})^*\}^{-1}$ consiste en les multiples de k_0 . En effet, dans la situation de la démonstration du lemme 1 de §1.1,

posant n_W le nombre de composantes de $q^{-1}W$ pour $W \in \mathcal{M}$, on a

$$\sum n_W W = k \sum \frac{k_0}{|I(W)|} W \text{ pour un certain } k \text{ et en plus l'image de la com-}$$

position

$$H_1(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_1(q_\#)_1} H_1(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(M; f^* H_3(N, S^*) \otimes \mathbb{Z})$$

est engendré par $\sum n_W W$. Donc modulo la torsion, l'image de $p_1(q_\#)_1$ consiste en les multiples de k . Par la naturalité de la dualité de Poincaré il en suit que l'image de $p^*((q_\#)^*)^{-1}$ consiste en les multiples de k_0 , q étant de degré $k k_0$.

Ceci démontre le théorème.

q.e.d.

2.2 -

Les rotations parallèles aux plans projectifs à fibré normal trivial.

Définition: Soit $\alpha: (I, \{0,1\}) \rightarrow (O(2), \text{Id})$ un générateur de $\pi_1(O(2), \text{Id})$.

$O(2)$ est un sous-groupe de $O(3)$, de la façon correspondante à l'injection $\mathbb{R}^2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Soit $\rho_0: \mathbb{P}^2 \times I$ l'homéomorphisme défini par $\rho_0(p_2(x), t) = (p_2(\alpha(t)(x)), t)$ pour $(x, t) \in S^2 \times I$.

Pour un plongement $i: \mathbb{P}^2 \times I \rightarrow M$, la rotation parallèle au plan projectif $i(\mathbb{P}^2 \times 0)$ (associée à i et α) est l'homéomorphisme $\rho: M \rightarrow M$ tel que

$$\rho(x) = x \text{ si } x \notin i(\mathbb{P}^2 \times I) \text{ et que } \rho \circ i(x) = i \circ \rho_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{P}^2 \times I.$$

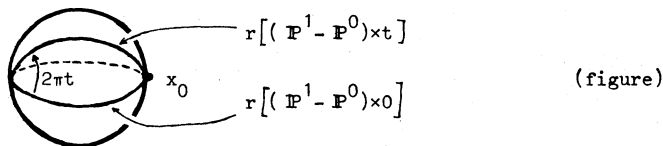
Avec ces conventions ρ_0 laisse fixe $\mathbb{P}^0 \times I$.

Il est facile de vérifier que la différence entre ρ_0 et l'identité de $\mathbb{P}^2 \times I$ sur la 2-cellule $(\mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^0) \times I$ est égale à

$+[(p_2, 0)] \in \pi_2(\mathbb{P}^2 \times I, \bar{y}_0 \times 0)$, en considérant un relèvement

$r: (\mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^0) \times I \rightarrow S^2$ (voir la figure) de

$(\mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^0) \times I \xrightarrow{\rho_0} \mathbb{P}^2 \times I \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{P}^2$ dans le revêtement $p_2: S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$.



(figure)

Remarque: $d^2(\rho_0, \text{Id}_{\mathbb{P}^2 \times I})$ est l'élément non trivial de

$$H^2(\mathbb{P}^2 \times I, \mathbb{P}^2 \times \partial I; \pi_2(\mathbb{P}^2 \times I)).$$

Soient i et ρ comme dans la définition, alors on a le diagramme

commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} H^2(\mathbb{P}^2 \times I, \mathbb{P}^2 \times \partial I; \pi_2(\mathbb{P}^2 \times I)) & \xrightarrow{(i_{\#})^2} & H^2(\mathbb{P}^2 \times I, \mathbb{P}^2 \times \partial I; i^* \pi_2(M)) & \xrightarrow{e} & H^2(M, \partial M; \pi_2(M)) \\ \downarrow \cap \{\mathbb{P}^2 \times (I, \partial I)\} & & \downarrow & & \downarrow \cap \{M, \partial M\} \\ H_1(\mathbb{P}^2 \times I; \pi_2(\mathbb{P}^2 \times I) \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(i_{\#} \otimes 1)_1} & H_1(\mathbb{P}^2 \times I; i^* \pi_2(M) \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(M; \pi_2(M) \otimes \mathbb{Z}) \end{array}$$

où e est l'extension.

Clairement $d^2(\rho, \text{Id}_M) \cap \{M, \partial M\} = i_*(i_{\#} \otimes 1)_1(d^2(\rho_0, \text{Id}_{\mathbb{P}^2 \times I}) \cap \{\mathbb{P}^2 \times (I, \partial I)\})$,

puisque $d^2(\rho, \text{Id}_M) = e(i_{\#})^2 d^2(\rho_0, \text{Id}_{\mathbb{P}^2 \times I})$.

Théorème: Soit $\lambda \in \Lambda_{N,n}$, soit $s: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M, m)$ un plongement tel que $\lambda = [f(s| \mathbb{P}^1)] \in \pi_1(N, n)$ et soit $\rho: M \rightarrow M$ la rotation parallèle à $s(\mathbb{P}^2)$, alors

$$i_{\#}(1 \otimes \lambda) = d^2(f\rho, f; \partial M) \in H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N)).$$

Démonstration: Par la naturalité on a $d^2(f\rho, f; \partial M) = (f_*)^* d^2(\rho, Id; \partial M)$.

En plus on a les égalités:

$$\begin{aligned} \phi_f d^2(f\rho, f; \partial M) &= f_* (d^2(f\rho, f; \partial M) \cap \{M, \partial M\}) = f_* (f_{\#} \otimes 1)_* (d^2(\rho, Id; \partial M) \cap \{M, \partial M\}) = \\ &= f_* (f_{\#} \otimes 1)_* (([sp_2] \otimes 1) \cdot f_{\#}^{-1}(\lambda)) = ([f \cdot sp_2] \otimes 1) \cdot \lambda = \phi_f \iota_f (1 \otimes \lambda). \end{aligned}$$

En remarquant que le degré d'une rotation parallèle à un plan projectif (à fibré normal trivial) est 1, on obtient comme corollaire des théorèmes de §2:

Corollaire: Soit $f, g: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ deux applications de 3-variétés compactes connexes coïncidant sur le 1-squelette. Sous les hypothèses $F(f)$ et $SE(N)$ on a:

Si $\deg(f) = \deg(g)$ alors $d^2(f, g) \in \text{im } \iota_f \subset H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$

et il y a un homéomorphisme R , composition de rotations parallèles à un système de plans projectifs (que l'on peut choisir disjoints), tel que fR soit homotope rel $(M, \partial M)^0$ à une application qui coïncide avec g sur le 2-squelette $(M, \partial M)^2$.

DU 2-SQUELETTE AU 3-SQUELETTE

Introduction

Soit, comme dans le chapitre IV, $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application de 3-variétés compactes et connexes. Selon Ch I, 4.2, les classes d'homotopie rel $(M, \partial M)^0$ d'applications coïncidant avec f sur le 2-squelette sont en correspondance bi-univoque avec les éléments de

$$\text{coker } \Delta^1(f; \partial M): H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \rightarrow H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N)).$$

De même que dans le chapitre IV on fera l'hypothèse $F(f)$ que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux munis de l'homomorphisme d'orientation. En plus on supposera que le revêtement universel de N n'est pas fermé (i.e. $SE(N)$).

Dans §1 on donne une expression pour $H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N)} \pi_3(N)$ par la dualité de Poincaré. Le point essentiel est une suite exacte qui exprime $\pi_3(N)$ en termes de $\pi_2(N)$:

$$0 \rightarrow S^2 \pi_2(N) \xrightarrow{Wh} \pi_3(N) \xrightarrow{v} \mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2(N) \rightarrow 0.$$

Ici $S^2 \pi_2(N)$ est le produit tensoriel symétrique de $\pi_2(N)$ et Wh correspond au produit de Whitehead. L'homomorphisme v a la propriété que $v \text{ Hopf}(x) = 1 \otimes x$ pour $x \in \pi_2(N)$.

A la suite exacte $SE(N)$ de Ch II, 2:

$$0 \rightarrow H_3(\hat{N}, S^*) \xrightarrow{d} H_2(S^*) \xrightarrow{i} \pi_2(N) \rightarrow 0$$

est associée une suite exacte longue de cohomologie dont on retient la partie

$$H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*)) \xrightarrow{i^1} H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \rightarrow H^2(M, \partial M; f^* H_3(\hat{N}, S^*)) \xrightarrow{i^2}$$

Dans §2 on déterminera l'image de $\Delta^1(f; \partial M)_1^1$. Pour cela on montre d'abord que pour un voisinage régulier U d'un système d'Epstein de M , l'extension

$$H^1(U, \partial U; f^* H_2(S^*)|U) \rightarrow H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*))$$

est surjectif. Il s'agit donc en fait de déterminer l'effet de (certaines) homotopies rel $(M, \partial M)^0$ qui ont leur support dans U . On y montre aussi que la dualité de Poincaré définit un isomorphisme

$$\text{coker } i^1 \cong H_2(\pi_1(M); f^* \pi_2(N)).$$

Dans §2.2 on calcule effectivement l'image de $\Delta^1(f; \partial M)_1^1$. Comme résultat on obtient dans §2.3, sous l'hypothèse supplémentaire que f est une équivalence d'homotopie, une suite exacte de $\mathbb{Z}_2$ -modules

$$0 \rightarrow W(\Lambda_M) \xrightarrow{c} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M)_1^1 \xrightarrow{\overline{10v}} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N)} \pi_2(N) \rightarrow 0,$$

où $W(\Lambda_M)$ est engendré par les paires $\{<\lambda, \mu>; \lambda, \mu \in \Lambda_M\}$ avec certaines relations et où $c(<\lambda, \mu>) = \overline{1 \otimes f_{\#} [t_{\lambda} p_2, t_{\mu} p_2]}$ si $t_{\lambda}, t_{\mu}: (\mathbb{P}^2, \overline{y_0}) \rightarrow (M, m)$ sont des plongements tels que $[t_{\lambda}| \mathbb{P}^1] = \lambda$ et $[t_{\mu}| \mathbb{P}^1] = \mu$. La surjection $\overline{10v}$ admet une section au dessus de $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N)} \pi_2^{\text{sph}}(N)$ dont l'image correspond aux rotations parallèles à des sphères dans N (composées avec f).

Dans §3 on va déterminer l'image de l'homomorphisme induit de $\Delta^1(f; \partial M)$

$$\overline{\Delta^1(f; \partial M)} : \text{coker } i^1 \rightarrow \text{coker } \Delta^1(f; \partial M)_1^1.$$

Soit $\mathcal{W}$ un système d'Epstein projectivement minimal de N alors on

montre dans §3.1 que coker i^1 est engendré par les classes des éléments de $f^*H^1(\bar{W}, \partial\bar{W}; \pi_2 \bar{W})$ où W parcourt l'ensemble $\mathcal{M}$ des composantes W de $N = \bigcup_{V \in \mathcal{M}} V$ telles que $\bar{W} - W \subset \bigcup_{V \in \mathcal{M}} V$ et que $\pi_1 W$ soit fini. Ainsi on a réduit le calcul de $\Delta^1(f; \partial M)$ à celui de $\Delta^1(\text{Id}_{\bar{W}}; \partial\bar{W})$. On l'attaque dans §3.2 et §3.3. Ceci achève le calcul de l'image de $\Delta^1(f; \partial M)$.

Les résultats finaux sont ramassés dans §4.

§ 1 -

Le groupe $H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))$.

Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n)$ par la compo-

sition des isomorphismes de la dualité de Poincaré, de f_* et de celui du lemme 2 de Ch I, 2.3:

$$\phi_f: H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N)) \rightarrow H_0(M; f^* \pi_3(N) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(N; \pi_3(N) \otimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n).$$

Le calcul de $\pi_3(N,n)$ passe par une expression de $\pi_2(N,n)$ comme groupe abélien.

1.1 -

Le groupe abélien $\pi_2(N,n)$.

On se place dans la situation de Ch II, 2. On note $\mathcal{T}$ la base du groupe abélien $H_2(S^*)$ donnée dans le lemme 2) par

$$\mathcal{T} = \{w(g) g \{\tilde{V}\} ; g \in \pi_1(N,n) / I(\tilde{V}), V \in \mathcal{M}\}$$

Proposition 1: $\pi_2(N,n)$ est un groupe abélien libre admettant une base représentée par un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ via la surjection

$$i: H_2(S^*) \rightarrow \pi_2(N,n).$$

La liberté de $\pi_2(N)$ est due à Specker [S3].

Démonstration: Un système de générateurs de $d(H_3(\hat{N}, S^*))$ en tant que groupe abélien est donné par l'ensemble indexé

$$\mathcal{K} = \{d(w(g) \mid g \in \{\hat{W}, \partial \hat{W}\}); g \in \pi_1(N, n)/I(\hat{W}), w \in \mathcal{M}\}.$$

La suite exacte $SE(N)$ de Ch II, 2 donne la propriété

a. π_1 induit un isomorphisme entre le quotient $\mathbb{Z}[\mathcal{T}]/(\mathcal{K})$ et $\pi_2(N, n)$.

En plus on a les propriétés, facilement déduites de la situation géométrique dans $(\hat{N}, S^*)$,

b. Soit $r = \sum_{x \in \mathcal{T}} n_x \cdot x \in \mathcal{K}$, alors $n_x \neq 0$ implique que $n_x = \pm 1$.

Soit $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ le graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{K}$ et dont les arêtes entre r et r' ($r, r' \in \mathcal{K}$) correspondent aux éléments $x \in \mathcal{T}$ tels que $x^*(r) \neq 0$ et $x^*(r') \neq 0$, alors

c. $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ est une réunion d'arbres.

Soient données des injections $\sigma: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ et $\rho: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$, alors on a le procédé suivant: soit $r \in \mathcal{K}$ la première relation non triviale de $\mathcal{K}$ pour l'ordre induit par ρ et posons $x_r \in \mathcal{T}$ l'élément le plus grand de $\mathcal{T}$ (pour l'ordre induit par σ) dont le coefficient dans r n'est pas nul. Alors on définit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} - \{x_r\}$ et la projection $p_1: \mathbb{Z}[\mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{T}_1]$ par $p_1(x) = x$ si $x \in \mathcal{T}_1$ et $p_1(x_r) = x_r - x_r^*(r)x_r$. Aussi on définit $\mathcal{K}_1 = \{p_1(r'); r' \in \mathcal{K}\}$, $\sigma_1 = \sigma|_{\mathcal{T}_1}: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathbb{N}$ et $\rho_1: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\rho_1(p_1(r')) = \rho(r')$ pour $r' \in \mathcal{K}$.

Facilement on constate que $(\mathcal{T}_1, \mathcal{K}_1)$ satisfait aux propriétés a, b et c. Le graphe $\Gamma(\mathcal{K}_1, \mathcal{T}_1)$ est obtenu de $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ en coalescent l'arête éventuelle associée à x_r ou en enlevant l'étoile ouverte du sommet r .

Si on note $(\mathcal{T}_n, \mathcal{K}_n)$ et $p_n: \mathbb{Z}[\mathcal{T}_{n-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{T}_n]$

le résultat après avoir répété n fois ce procédé, alors il est clair

que p_n exprime l'élément x_{r_n} de $\gamma_{n-1} - \gamma_n$ en une combinaison linéaire d'éléments plus petits dans γ_n . Par conséquent la limite

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \dots p_1: Z[\gamma] \rightarrow Z[\bigcap_n \gamma_n]$$

existe. Posons $j: Z[\bigcap_n \gamma_n] \subset Z[\gamma]$ alors $pj = \text{Id}$, $p(\mathbb{R}) = 0$

et $j p = \text{Id mod } (\mathcal{K})$, et par conséquent la composition

$i j: Z[\bigcap_n \gamma_n] \rightarrow \pi_2(N, n)$ est un isomorphisme.

q.e.d.

Soit $\alpha = \{g_\alpha \{\tilde{\gamma}_{i_\alpha}\}; \alpha \in A\} \subset \gamma$ un sous-ensemble tel que

$i(\alpha)$ forme une base de $\pi_2(N, n)$.

Proposition 2 [H1]: $\tilde{N}$ est homotopiquement équivalent au bouquet de 2-sphères $\bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha \tilde{\gamma}_{i_\alpha}$ par une application qui étend l'application canonique $\pi: \bigcup_\alpha g_\alpha \tilde{\gamma}_{i_\alpha} \rightarrow \bigvee_\alpha g_\alpha \tilde{\gamma}_{i_\alpha}$.

Démonstration: On peut supposer que $C = \bigcup_\alpha g_\alpha \tilde{\gamma}_{i_\alpha}$ est un sous-

complexe d'une décomposition cellulaire de $\tilde{N}$; la première obstruction pour étendre π se trouve dans le groupe $H^3(\tilde{N}, C; \pi_2(\bigvee_\alpha g_\alpha \tilde{\gamma}_{i_\alpha}))$ qui

est trivial puisque $H_2(C) \cong H_2(\tilde{N}) \cong \pi_2(N, n)$ (et en utilisant des théorèmes de coefficients universels).

q.e.d.

1.2 - $\pi_3(N, n)$ comme conséquence de $\pi_2(N, n)$.

Soit α comme dans la proposition 2 de §1.1. Soit $\tilde{\sigma}_i$ un homéomorphisme de S^2 sur $\tilde{\gamma}_i$. Rappelons que la fonction

Hopf: $\pi_2(X, x) \rightarrow \pi_3(X, x)$ est l'opération homotopique associée à la fibration de Hopf, $\text{Hopf} \in \pi_3(S^2)$. En mettant un ordre sur l'ensemble d'indices A de α , il suit du théorème de Hilton ([H5], [S1])

Proposition 1: Il y a un isomorphisme

$$\pi_3(V_{\alpha} \tilde{V}_{i_{\alpha}}) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_3(S_{\alpha}^2) \oplus \bigoplus_{\alpha < \beta} \pi_3(S_{\alpha, \beta}^3)$$

de telle façon que le générateur du groupe infini cyclique $\pi_3(S_{\alpha}^2)$ (resp. $\pi_3(S_{\alpha, \beta}^3)$) correspond à Hopf $(g_{\alpha} \tilde{\sigma}_{i_{\alpha}})$ (resp. au produit de Whitehead $[g_{\alpha} \tilde{\sigma}_{i_{\alpha}}, g_{\beta} \tilde{\sigma}_{i_{\beta}}]$).

Conséquence 1: $\pi_3(N, n)$ est le groupe abélien libre ayant comme base

$$\{\text{Hopf}(g_{\alpha} \tilde{\sigma}_{i_{\alpha}}); \alpha \in A\} \cup \{[g_{\alpha} \tilde{\sigma}_{i_{\alpha}}, g_{\beta} \tilde{\sigma}_{i_{\beta}}]; \alpha < \beta, \alpha, \beta \in A\}.$$

Considérons les propriétés suivantes bien connues du Hopf et du produit de Whitehead.

1. $[\ , \]: \pi_2(N, n) \times \pi_2(N, n) \rightarrow \pi_3(N, n)$ est $\mathbb{Z}$ -bilinéaire et symétrique.
2. $\text{Hopf}(x+y) = \text{Hopf}(x) + \text{Hopf}(y) + [x, y]$.
3. $[x, x] = 2 \text{Hopf}(x)$.
4. $g[x, y] = [gx, gy]$ et $g \text{Hopf}(x) = \text{Hopf}(gx)$ pour $g \in \pi_1(N, n)$.

En désignant pour un module B , $S^2 B$ le produit tensoriel symétrique $B \otimes B / (x \otimes y - y \otimes x; x, y \in B)$ on a le théorème suivant:

Théorème: Il y a une suite exacte d'homomorphismes de $\pi_1(N, n)$ -modules

$$0 \rightarrow S^2 \pi_2(N, n) \xrightarrow{\text{Wh}} \pi_3(N, n) \xrightarrow{v} \pi_2(N, n) / 2\pi_2(N, n) \rightarrow 0$$

telle que $\text{Wh}(x \otimes y) = [x, y]$ et que $v(\text{Hopf}(x)) = x + 2\pi_2(N, n)$.

Démonstration: Par les propriétés 1 et 4, Wh est un homomorphisme de $\pi_1(N, n)$ -modules et par la conséquence 1 et les propriétés 2, 3 et 4, la fonction Hopf définit un isomorphisme de $\pi_1(N, n)$ -modules

$\pi_2(N, n)/2\pi_2(N, n) \cong \text{coker } Wh$. L'homomorphisme Wh est injectif par la conséquence 1 et la propriété 3.

q.e.d.

On déduit de ce théorème la suite exacte de coefficients

$$\begin{aligned} H_1(N; \pi_2(N)/2\pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N, n)} S^2 \pi_2(N, n) \xrightarrow{1 \otimes Wh} \\ (S) \quad \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N, n)} \pi_3(N, n) &\xrightarrow{1 \otimes \gamma} \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N, n)} \pi_2(N, n)/2\pi_2(N, n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En supposant que le système d'Epstein $\mathcal{M}$ est projectivement minimal on a, par le lemme 2 de Ch II, 3, pour tout $W \in \mathcal{M}$ qui n'est pas orientable des éléments $\lambda_W, \beta_W \in \pi_1(N, n)$, $y_W \in \bigoplus_{V \in \mathcal{M}, V \cong S^2} H_2(p^{-1}V)$

et une composante $\hat{V}_0$ de $S^* = \bigsqcup_{V \in \mathcal{M}} p^{-1}V$, tels que β_W conserve l'orientation, que

$$I(\hat{V}_0) = I(\hat{W}) = \{e, \lambda_W\} \text{ et que } d\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} = (\beta_W - e) \{\hat{V}_0\} + (\lambda_W - e) \cdot y_W.$$

Proposition 2: A condition que $N \neq \bigcup \{W; W \in \mathcal{M}, |I(\hat{W})| \text{ est impair}\}$, l'image de β est engendrée par les éléments suivants:

- a) par $1 \otimes (i\{\hat{V}\} \otimes i\{\hat{V}\})$ pour tout $V \in \mathcal{M}$ homéomorphe à $\mathbb{P}^2$ et
- b) par $1 \otimes (\lambda_W \cdot i y_W \otimes i y_W)$ pour tout $W \in \mathcal{M}$ non orientable.

Rabiot; 1. Les éléments sous 2a) ont en fait leur origine dans la partie torsion de $H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \cong H^2(N, \partial N; \pi_2(N))$ (calculé dans Ch IV) par la réduction modulo 2.

2. Si $N = \bigcup \{W; W \in \mathcal{M}, |I(\hat{W})| \text{ est impair}\}$, alors N est $\mathbb{P}^2$ -insécable (i.e. $\mathcal{M}$ contient seulement des 2-sphères) et

$H_1(N; \pi_2(N)/2\pi_2(N) \otimes \mathbb{Z})$ est engendré par la réduction modulo 2

du générateur du groupe infini cyclique

$H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \cong H^2(N, \partial N; \pi_2(N))$ (théorème de Ch IV, 1.1), en particulier l'image de β est engendrée par un élément.

Démonstration: On a la partie suivante de la suite longue de coefficients associée à la réduction modulo 2 de $SE(N)$:

$$\begin{aligned} H_1(N; H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}_2) &\xrightarrow{(\iota \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}} H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H_0(N; H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}_2) \rightarrow \\ &\xrightarrow{(d \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}} H_0(N; H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du lemme 2 de Ch IV, 1.1 on a pour toute composante V de S un isomorphisme

$$H_1(N; H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}_2) \cong H_1(I(\hat{V}); \mathbb{Z}_2)$$

et si V est un plan projectif et $I(\hat{V}) = \{1, \lambda\}$, le générateur du groupe d'ordre 2, $H_1(N; H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z}_2)$, est donné par le cycle

$(\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda$ qui est la réduction modulo 2 du générateur de $H_1(N; H_2(p^{-1}V) \otimes \mathbb{Z})$. Pour calculer l'image par β de

$(\iota \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2} ((\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda)$ on observe que

$$\begin{aligned} 3(\text{Hopf } \iota\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda &= (\lambda^{-1} \cdot \text{Hopf } \iota\{\hat{V}\}) \otimes w(\lambda^{-1}) - \text{Hopf } \iota\{V\} \otimes 1 = \\ &= -2 \text{Hopf } \iota\{\hat{V}\} \otimes 1 = -[\iota\{\hat{V}\}, \iota\{\hat{V}\}] \otimes 1 \in C_0(N; \pi_3(N, n) \otimes \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Donc $\beta(\iota \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2} ((\{\hat{V}\} \otimes 1) \cdot \lambda) = -10(\iota\{\hat{V}\} \otimes \iota\{\hat{V}\})$, et en passant

on a montré le rabiote 1.

Le suivant concerne le noyau de $(d \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}$. Soit $W \in \mathcal{M}$

non orientable, alors $\{\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} \otimes 1\} \in \ker (d \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}^0$ et

$$\delta(\{(1\{\hat{V}_0\} \otimes 1) \cdot \beta_W^{-1} + (1\{y_W\} \otimes 1)\lambda_W^{-1}\}) = \{\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} \otimes 1\}.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Hopf}(\text{id}\{\hat{W}, \partial \hat{W}\}) = \text{Hopf}(\beta_W 1\{\hat{V}_0\}) + \text{Hopf}(1\{\hat{V}_0\}) + \text{Hopf}(\lambda_W 1\{y_W\}) + \\ &+ \text{Hopf}(1\{y_W\}) + [\beta_W 1\{\hat{V}_0\}, -1\{\hat{V}_0\} + (\lambda_W - e)1\{y_W\}] + [-1\{\hat{V}_0\}, (\lambda_W - e)1\{y_W\}] + \\ &+ [\lambda_W 1\{y_W\}, -1\{y_W\}] \in \pi_3(N, n), \text{ on obtient.} \end{aligned}$$

$$\beta(\{(1\{\hat{V}_0\} \otimes 1) \cdot \beta_W^{-1} + (1\{y_W\} \otimes 1)\lambda_W^{-1}\}) = -1 \otimes (\lambda_W 1\{y_W\} \otimes 1\{y_W\}).$$

Si $W \in \mathcal{M}$ est orientable, tel que $I(\hat{W})$ soit d'ordre pair, alors pour un élément donné $x \in I(\hat{W})$, $x \neq 1$, il existe $y \in H_2(S^*)$ tel que $d\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} = (1+x) \cdot y$. Il en suit que $\{\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} \otimes 1\} \in \ker (d \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}^0$, que $\{\{\hat{W}, \partial \hat{W}\} \otimes 1\} = \delta(\{(1\{y\} \otimes 1) \cdot x^{-1}\})$ et que

$$\begin{aligned} \beta(\text{Hopf}(1\{y\} \otimes 1) \cdot x^{-1}) &= (x-1) \text{Hopf}(1\{y\} \otimes 1) = ((x+1)\text{Hopf}(1\{y\}) - [1\{y\}, 1\{y\}]) \otimes 1 \\ &= ((1+x)\text{Hopf}(1\{y\}) + [1\{y\}, x1\{y\}]) \otimes 1 = \text{Hopf}(\text{id}\{\hat{W}, \partial \hat{W}\}) \otimes 1 = 0 \end{aligned}$$

donc que $\{(1\{y\} \otimes 1) \cdot x^{-1}\} \in (\nu \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}^1 (H_1(N; \pi_3(N) \otimes \mathbb{Z}))$ et par conséquent

$$\beta(\{(1\{y\} \otimes 1) \cdot x^{-1}\}) = 0.$$

Supposons maintenant que $\{\sum_{W \in \mathcal{M}} n_W \{\hat{W}, \partial \hat{W}\} \otimes 1\} \in \ker (d \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}^0$.

Pour calculer sa contribution à l'image de β (modulo les éléments sous a) et b)) on peut supposer que $n_W = 0$ dès que $I(W)$ est d'ordre pair.

Comme dans la démonstration du lemme 1 de Ch IV, 1.1 il faut que le

bord de la réunion $\bigcup_{n_W \neq 0} W$ soit vide. En particulier, sous l'hypothèse

de la proposition ceci implique que $n_W = 0$ pour tout W et sous celle du

rabiote 2, $\ker (d \otimes 1)_{\mathbb{Z}_2}^0$ est le groupe d'ordre 2 engendré par

$\{ \sum_{w \in \mathcal{M}} \{ \tilde{w}, \partial \tilde{w} \} \otimes 1 \}$ qui est la réduction modulo 2, du générateur de $H_1(N; \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z})$.

q.e.d.

§ 2 -

Le calcul de $\Delta^1(f; \partial M)$.

2.1 -

Une façon d'engendrer $H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*))$.

On montre que $H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*))$ est engendré par les cocycles à support dans un voisinage régulier de la réunion d'un système d'Epstein de M .

Soit R une sous-variété dans l'intérieur de M dont les composantes forment un système d'Epstein de M . Soit U un voisinage régulier de R dans M et soit D une réunion d'espaces d'Eilenberg-MacLane dont le 2-squelette coïncide avec celui de U . En ce cas le 3-squelette de $M \cup D$ est celui d'un $K(\pi_1(M, m), 1)$ (i.e. $\pi_2(M \cup D) = 0$). Posons $e: (U, \partial U) \subset (M, \overline{M-U})$ et $r: (M, \partial M) \subset (M, \overline{M-U})$ les injections, alors

Proposition 1: L'homomorphisme d'extension suivant est surjectif:

$$H^1(U, \partial U; e^* f^* H_2(S^*)) \xrightarrow{(e^*)^{-1}} H^1(M, \overline{M-U}; f^* H_2(S^*)) \xrightarrow{r^*} H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*)).$$

Démonstration: Considérons le diagramme commutatif suivant, dont les suites horizontales sont exactes. Les groupes d'homologie sont à coefficients dans $f^* H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccc} H_2(U) & \xrightarrow{e^*} & H_2(M) & \rightarrow & H_2(M, U) \rightarrow H_1(U) \\ & & \downarrow r_3 & & \downarrow r_2 & & \downarrow r_1 \\ & & H_2(M \cup D) & \rightarrow & H_2(M \cup D, D) \rightarrow H_1(D) \end{array}$$

Par la dualité de Poincaré et sa naturalité il suffit de montrer que e_* est surjectif. Les homomorphismes r_i -induits de l'inclusion pour $i=1,2,3$ - sont des isomorphismes pour $i=1,2$. Donc la nullité de $H_2(M \cup D)$ implique l'injectivité de $H_2(M,U) \rightarrow H_1(U)$ et donc la proposition. Mais $H_2(M \cup D) \cong H_2(\pi_1(M,m); f^*H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) = 0$ par la proposition 3 de Ch II,3.

q.e.d.

Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(U, \partial U; e^* f^* H_2(S^*)) & \xrightarrow{\iota^1|_U} & H^1(U, \partial U; e^* f^* \pi_2(N)) & \xrightarrow{\Delta^1(f|_U; \partial U)} & H^3(U, \partial U; e^* f^* \pi_3(N)) \\
 \downarrow e^{(1)} & & \downarrow e^{(2)} & & \downarrow e^{(3)} \\
 H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*)) & \xrightarrow{\iota^1} & H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) & \xrightarrow{\Delta^1(f; \partial M)} & H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))
 \end{array}$$

où $e^{(i)}$ désigne l'homomorphisme d'extension ($i=1,2,3$) et où $\iota^1|_U$ et ι^1 sont des homomorphismes de coefficients. Par les propriétés de naturalité on a l'égalité

$$\Delta^1(f; \partial M) \iota^1 e^{(1)} = e^{(3)} \Delta^1(f|_U; \partial U) \iota^1|_U.$$

Puisque $e^{(1)}$ est surjectif, pour calculer $\Delta^1(f; \partial M) \iota^1$ il suffit de calculer $e^{(3)} \Delta^1(f|_U; \partial U) \iota^1|_U$.

Proposition 2: $\text{im } \Delta^1(f; \partial M) \iota^1 = e^{(3)} \text{im } \Delta^1(f|_U; \partial U) \iota^1|_U$.

En fait l'image de ι^1 coïncide avec l'ensemble des classes associées aux homotopies quelconques de f à support dans U , comme

le dit le

Théorème: Les homomorphismes

$$\iota^1: H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*)) \rightarrow H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$$

$$\text{et } e^{(2)}: H^1(U, \partial U; e^* f^* \pi_2(N)) \rightarrow H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$$

ont la même image. Par la dualité de Poincaré elle correspond au noyau de la surjection, induite de l'application canonique $k: M \rightarrow K(\pi_1(M, m), 1)$

$$k_2: H_2(M, f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\pi_1(M, m); f^* \pi_2(N, n) \otimes \mathbb{Z}).$$

Ce phénomène bizarre de la "dualité" entre le choix d'un système d'Epstein au but et à la source pourrait déjà être constaté dans Ch IV, 1.1 quant à la torsion du deuxième groupe de cohomologie $H^2(M, \partial M; f^* \pi_2(N))$.

Démonstration: On doit montrer que le noyau de k_2 coïncide avec les images de

$$\iota_2: H_2(M; f^* H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z})$$

$$\text{et de } e_2: H_2(U; e^* f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}).$$

Pour ι_2 ceci suit immédiatement de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_2(M; f^* H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_2} & H_2(M; f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M; f^* H_3(\tilde{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}) \\ \downarrow k_2 & & \downarrow \cong \quad k_1 \end{array}$$

$$H_2(\pi_1(M, m); f^* H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\pi_1(M, m); f^* \pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\pi_1(M, m); f^* H_3(\tilde{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z})$$

dont les suites horizontales sont exactes, dont k_1 est un isomorphisme et dont le groupe $H_2(\pi_1(M, m); f^* H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z})$ est trivial par la proposition 3 de Ch II, 3.

Pour e_2 ceci suit du diagramme commutatif dont les groupes sont des groupes d'homologie à coefficients dans $f^*\pi_2(N) \otimes \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_2(U) & \xrightarrow{e_2} & H_2(M) & \longrightarrow & H_2(M, U) \\
 & & \downarrow k_2 & & \downarrow \cong \\
 H_2(D) & \longrightarrow & H_2(M \cup D) & \longrightarrow & H_2(M \cup D, D)
 \end{array}$$

Les suites horizontales sont exactes, $H_2(M, U) \rightarrow H_2(M \cup D, D)$ est l'isomorphisme d'excision, $H_2(M \cup D) = H_2(\pi_1(M, m))$ et $H_2(D) = 0$ par le lemme 3 de Ch II, 3.

q.e.d.

2.2 -

Calcul de $\Delta^1(f|U; \partial U, \cdot^1|U$.

2.2.1 -

Soit V_0 une composante de R , U_0 la composante de U qui contient V_0 .

Dans A on considère le cas où V_0 est une 2-sphère et dans B le cas où V_0 est un plan projectif. On pose

$$P = S^2 \text{ dans A} \quad \text{et} \quad P = \mathbb{P}^2 \text{ dans B}$$

et on choisit un difféomorphisme $u: P \times [-1, +1] \rightarrow M$ sur U_0 , tel que $u(P \times 0) = V_0$.

A. Une décomposition cellulaire de $S^2 \times ([-1, +1], \{-1, +1\})$ est donnée par $e_0 \times (-1, +1)$ et $e_2 \times (-1, +1)$ où $e_0 = \{y_0\}$ et $e_2 = S^2 - e_0$. On désigne par $e_2: (D^2, S^1) \rightarrow (D^2 | S^1, S^1 | S^1) = (S^2, y_0)$ l'application caractéristique de e_2 . Les 1-cocycles γ de $C^*(S^2 \times ([-1, +1], \{-1, +1\}); u^*f^*H_2(S^*))$ sont les fonctions γ_ϕ données par un élément quelconque $\phi \in H_2(S^*)_{n_0}$.

$(n_0 = fu(y_0, 0))$ en posant

$$\gamma_\phi(e_0 \times (-1, +1)) = \phi.$$

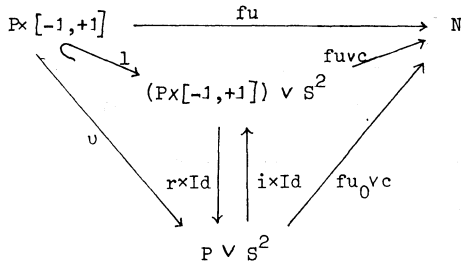
B. Une décomposition cellulaire de $\mathbb{P}^2 \times ([-1, +1], \{-1, +1\})$ est donnée par $e_0 \times (-1, +1)$, $e_1 \times (-1, +1)$ et $e_2 \times (-1, +1)$ où $e_0 = \mathbb{P}^0 = \{\bar{y}_0\}$, $e_1 = \mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^0$ et $e_2 = \mathbb{P}^2 - \mathbb{P}^1$. On désigne par $\epsilon_i: (D^i, S^{i-1}) \rightarrow (\mathbb{P}^i, \mathbb{P}^{i-1})$ l'application caractéristique de la cellule e_i ($i=1, 2$) et par $\alpha = [(\epsilon_1, 0)]$ l'élément non trivial de $\pi_1(\mathbb{P}^2 \times [-1, +1])$.

Un 1-cocycle γ de $C^*(\mathbb{P}^2 \times ([-1, +1], \{-1, +1\}); u^* f^* H_2(S^*))$ est une fonction γ ayant comme valeur $\gamma(e_0 \times (-1, +1)) = \psi$ satisfaisant à $\psi = \alpha \cdot \psi$. Puisque $H_{\text{pair}}((f_\# u_\# \alpha); H_2(S^*) \otimes \mathbb{Z}) = 0$ (proposition 3 de Ch II, 3) et que l'élément $f_\# u_\# \alpha$, appartenant à Λ_N , est d'ordre 2 il existe $\phi \in H_2(S^*)_{n_0}$ ($n_0 = fu(\bar{y}_0, 0)$) tel que $\psi = (e + f_\# u_\#(\alpha))\phi$ et on pose $\gamma_\phi(e_0 \times (-1, +1)) = \gamma(e_0 \times (-1, +1)) = (e + f_\# u_\#(\alpha))\phi$.

Dans les trois sections suivantes on va réduire le calcul de $\Delta^{1,1}$ à deux cas universels correspondants à A et à B et on rappellera le genre de calcul qu'on est ramené à faire.

2.2.2 -

Le cocycle "universel". Dans les situations A et B on prendra un représentant $c: (S^2, y_0) \rightarrow (N, n_0)$ de $\iota(\phi) \in \pi_2(N, n_0)$. L'application $r: P \times [-1, +1] \rightarrow P$ est la projection sur le premier facteur et on notera par i l'injection $i: P = P \times \{0\} \subset P \times [-1, +1]$. Alors on a le diagramme homotopiquement commutatif suivant dont les triangles "propres" sont commutatifs



On notera $\kappa: (D^2, S^1) \xrightarrow{\text{proj}} (D^2|S^1, S^1|S^1) = (S^2, y_0) \subset (P \vee S^2, b)$

et on définira le cocycle universel

$$\gamma \in C^1(Px([-1, +1]), \{-1, +1\}); u^* \pi_2(P \vee S^2))$$

$$\text{dans le cas A par } \gamma(e_0 \times (-1, +1)) = \kappa$$

$$\text{dans le cas B par } \gamma(e_0 \times (-1, +1)) = (1 + u\alpha) \cdot \kappa.$$

Remarque: Dans les cas A et B on a les égalités suivantes:

$$1. (fu_0 \vee c)_\# (\gamma) = i^1(\gamma_\phi) \in C^1(Px([-1, +1]), \{-1, +1\}); (fu)^* \pi_2(N))$$

$$\text{et } 2. (fu_0 \vee c)_\# \Delta^1(u; Px\{-1, +1\})(\{\gamma\}) = \Delta^1(fu; Px\{-1, +1\}) i^1(\{\gamma_\phi\}) \text{ et donc}$$

$$\Delta^1(f|U_0; \partial U_0) i^1(u^{-1})^*(\{\gamma_\phi\}) = (u^{-1})^*(fu_0 \vee c)_\# \Delta^1(u; Px\{-1, +1\})(\{\gamma\})$$

dans $H^3(U_0, \partial U_0; f^* \pi_3(N)|U_0)$ d'où l'adjectif "universel" de γ .

Pour prouver l'égalité 2 on remarque en utilisant les propriétés

de naturalité de Δ^1 , que le premier membre égale

$$\begin{aligned} & (f u_0 \vee c)_\# \Delta^1((r \times Id)1) (r \times Id)_\# (i \times Id)_\# (\{\gamma\}) = \\ & = (f u_0 \vee c)_\# (r \times Id)_\# \Delta^1(1)(i \times Id)_\# (\{\gamma\}) = \\ & = (f u \vee c)_\# \Delta^1(1) (i \times Id)_\# (\{\gamma\}) = \\ & = \Delta^1(f u) (f u \vee c)_\# (i \times Id)_\# (\{\gamma\}) = \Delta^1(f u) i^1(\{\gamma_\phi\}). \end{aligned}$$

2.2.3 -

La façon de calculer $\Delta^1(u; Px\{-1, +1\})(\{\gamma\})$. Soit G une homotopie

de $u: Px[-1, +1] \rightarrow P \vee S^2$ telle que G diffère de l'homotopie constante

sur la 2-cellule $e_0 \times (-1, +1) \times (0, 1)$ de $P \times [-1, +1] \times [0, 1]$ par

$\gamma(e_0 \times (-1, +1))$, c'est à dire par

$\kappa: (S^2, \gamma_0) \rightarrow (P \vee S^2, b)$ dans le cas A et par

$(e + u\alpha) \cdot \kappa$ dans le cas B (α est le générateur de $\pi_1(P \times [-1, +1]) \cong \pi_1(P^2)$)

et telle que G_1 et u coïncident sur le 2-squelette de $P \times [-1, +1]$.

On calcule alors

$$\Delta^1(u; P \times [-1, +1]) (\{\gamma\}) = d^3(u, G_1; P \times [-1, +1]) \in H^3(P \times ([-1, +1], \{-1, +1\}));$$

$$u^* \pi_3(P \vee S^2)$$

de la façon suivante: $G_1|_{e_2 \times [-1, +1]}$ peut être obtenue par intermédiaire d'une déformation de $e_2 \times [-1, +1] \times 1$ rel le bord sur la réunion $\partial(e_2 \times [-1, +1] \times [0, 1] \cup e_2 \times [-1, +1] \times 0)$. Donc sur la "3-boule" décomposée comme suit

$$D^3 \cong D^2 \times [-1, +1] = D^2 \times [-1, +1] \times 0 \cup D^2 \times \{-1, +1\} \times [0, 1] \cup S^1 \times [-1, +1] \times [0, 1]$$

l'application $G_1(\epsilon_2 \times \text{Id}_{[-1, +1]})$ s'écrit à homotopie près comme

$$(x, s, t) \mapsto u_0 \epsilon_2(x) \quad \text{si } x \in D^2 \text{ et } (s, t) \in [-1, +1] \times 0 \cup \{-1, +1\} \times [0, 1],$$

$$(x, s, t) \mapsto G(\epsilon_2(x), s, t) \quad \text{si } (x, s, t) \in S^1 \times [-1, +1] \times [0, 1].$$

En total, pour la décomposition suivante de S^3 , représentée dans les figures 1 et 2,

$$S^3 = D^2 \times [-1, +1] \times 1 \cup (D^2 \times [-1, +1] \times 0 \cup D^2 \times \{-1, +1\} \times [0, 1] \cup S^1 \times [-1, +1] \times [0, 1]).$$

avec les recollements évidents ($z_0 = x_0 \times 0 \times 0$), $d^3(u, G_1)$ est représenté par le 3-cocycle qui, sur la 3-cellule $e_2 \times (-1, +1)$, prend la valeur de la classe d'homotopie de l'application $w: S^3 \rightarrow P \vee S^2$ définie par

$$w(x, s, t) = u_0 \epsilon_2(x) \quad \text{sur } D^2 \times \partial([-1, +1] \times [0, 1]) \text{ et}$$

$$w(x, s, t) = G(\epsilon_2(x), s, t) \quad \text{sur } S^1 \times [-1, +1] \times [0, 1].$$

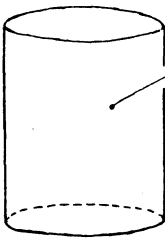


figure 1

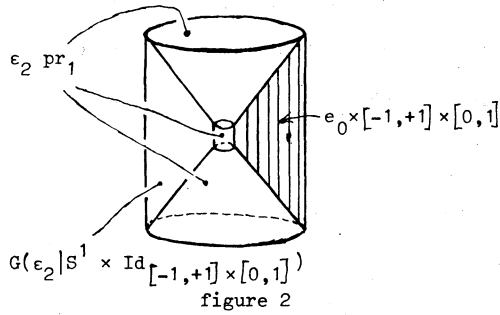


figure 2

Par conséquent, pour le calcul il suffit de connaître une extension de l'application G , bien déterminée sur le 2-squelette

$$(P)^0 \times [-1, +1] \times [0, 1] = e_0 \times [-1, +1] \times [0, 1], \text{ jusqu'au 3-squelette}$$

$$(P)^1 \times [-1, +1] \times [0, 1] \text{ de } P \times [-1, +1] \times [0, 1].$$

2.2.4 -

L'identification des éléments de $\pi_3 (\bigvee_{e \in E} S^2, x_0)$ ($[H1]$). Après le relèvement de w dans le revêtement universel de $P \vee S^2$ qui est un bouquet d'au plus trois 2-sphères, on est ramené à identifier la classe d'homotopie d'une application

$$\omega : S^3 \rightarrow \bigvee_{e \in E} S_e^2.$$

Hopf ($[H6]$) donne une façon "géométrique" pour déterminer la classe d'homotopie d'une application de S^3 dans la 2-sphère. Nous allons l'expliciter dans le cas qui nous intéresse. Soit

$$i_e : S^2 \rightarrow \bigvee_{e \in E} S_e^2$$

un homéomorphisme de S^2 sur le facteur S_e^2 du bouquet et soient p_e et q_e deux points différents de S_e^2 dans la partie lisse du bouquet. On munit les espaces tangents à p_e et q_e de l'orientation induite par i_e

de l'orientation standard de S^2 . Supposé que ω est transversale sur l'ensemble $\{p_e, q_e; e \in E\}$, on définit le nombre d'enlacement

$$\gamma_{e,e'}(\omega) = \text{lk}(\omega^{-1}(p_e), \omega^{-1}(q_{e'})) \quad \text{pour } e, e' \in E.$$

En ordonnant l'ensemble E on a le lemme suivant

Lemme: Sur la base de Hilton de $\pi_3(\bigvee_{e \in E} S^2, x_0)$ (voir Cons.1 de §1.2) on a l'égalité

$$[\omega] = \sum_{e \in E} \gamma_{e,e}(\omega) \text{Hopf}(i_e) + \sum_{e < e'} \gamma_{e,e'}(\omega) [i_e, i_{e'}].$$

(C'est à dire que les $\gamma_{e,e'}$ ($e \leq e'$) forment la base duale de la base de Hilton.)

2.2.5 -

Le cas A. Dans ce cas $P = S^2$, $\kappa: S^2 \subset P \vee S^2$.

Proposition: $\Delta^1(v; P \times \{-1, +1\})$ ($\{\gamma\}$) est représenté par le cocycle qui sur la cellule $e_2 \times \{-1, +1\}$ prend la valeur du produit de Whitehead

$$[v_0, \kappa] \in \pi_3(P \vee S^2, b)$$

Corollaire: $\Delta^1(fu; S^2 \times \{-1, +1\})$ ($\{\gamma_\phi\}$) est représenté par le cocycle qui sur la cellule $e_2 \times \{-1, +1\}$ prend la valeur $[fu_0, i(\phi)] \in \pi_3(N, n_0)$

Démonstration: Il suffit de connaître l'homotopie G de v associée à γ (voir §2.2.3) sur $(P)^1 \times [-1, +1] \times [0, 1] = \{y_0\} \times [-1, +1] \times [0, 1]$ et on peut la choisir de telle façon que

$$G(y_0, s, t) = v_0(y_0) = b \in P \vee S^2 \quad \text{si } \|(s, t - \frac{1}{2})\| > \frac{1}{4}$$

$$G(y_0, \frac{1}{4}s, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t) = \kappa(s, t) \quad \text{si } (s, t) \in D^2 \text{ (voir figure 3)}.$$

Maintenant $d^3(v, G_1)$ est donné par l'application $w: (S^3, z_0) \rightarrow (P \vee S^2, b)$ définie dans §2.2.3 par (voir figure 4)

$w(x,s,t) = v_0 \epsilon_2(x) = v(\epsilon_2(x), 0)$ si $(x,s,t) \in D^2 \times \partial([-1,+1] \times [0,1])$ ou

si $x \in S^1$ et $|| (s, t - \frac{1}{2}) || > \frac{1}{4}$

$w(x, \frac{1}{4}s, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t) = \kappa(s,t)$

si $x \in S^1$ et $|| (s,t) || \leq 1$.

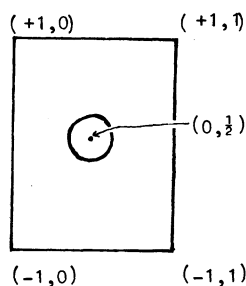


figure 3

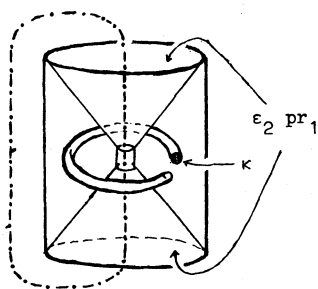


figure 4

En fait w est (à peu de choses près) dans la forme standard du produit de Whitehead $[v_0, \kappa]$. D'autre part l'image réciproque de deux points réguliers de P (resp. de S^2) consiste en deux courbes simples non enlacées qui se trouvent dans $D^2 \times \partial([-1,+1] \times [0,1])$ (resp. dans $S^1 \times [-1,+1] \times [0,1]$ et l'image réciproque d'un point régulier de P (la courbe dessinée en traits-points) et d'un point régulier de S^2 (par exemple l'âme du tore plein dessiné dans $S^1 \times [-1,+1] \times [0,1]$) forment deux courbes enlacées une fois.

q.e.d.

2.2.6 -

Le cas B. Dans ce cas $P = \mathbb{P}^2$ et α désigne le lacet non trivial sur $\mathbb{P}^2 \times [-1,+1]$ à point base $(\bar{y}_0, 0) = (p_2(y_0), 0)$ où $p_2: S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ désigne le revêtement standard.

Proposition: $\Delta^1(v; \mathbb{P}^2 \times \{-1,+1\}) (\{\gamma\})$ est représenté par le cocycle qui sur la cellule $e_2 \times (-1,+1)$ prend la valeur (à signe près)

$$[\kappa + u_0 p_2, (v \alpha) \kappa] \in \pi_3(P \vee S^2, b).$$

Corollaire: $\Delta^1(f u; P^2 \times \{-1, +1\}) \cap^1 (\{\gamma_\phi\})$ est représenté par le cocycle qui sur la cellule $e_2 \times (-1, +1)$ prend la valeur

$$[i(\phi) + f u_0 p_2, (f u)_\#(\alpha) \cdot i(\phi)] \in \pi_3(N, n_0).$$

Démonstration: On va construire l'homotopie G de u , associée à γ , sur $(\mathbb{P}^1 \times [-1, +1]) \times [0, 1]$. Soit $v: S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times [-1, +1] \times [0, 1]$ un plongement tel que $pr_1 v = p_1 - p_1$ est le revêtement standard à 2 feuillets — disons, pour fixer les idées, $v(x) = (p_1(x), (0, \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}x)$ pour $x \in S^1$ (voir la figure 5). On désigne par $\Psi: S^1 \times 2D^2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times [-1, +1] \times [0, 1]$ une paramétrisation d'un voisinage tubulaire de $v(S^1)$ telle que $\Psi|_{S^1 \times 0} = v$ et que $\Psi(x, y) = (p_1(x), \Psi_x(y))$ où $\Psi_x: 2D^2 \rightarrow [-1, +1] \times [0, 1]$ est la composition d'une translation et d'une homothétie (par exemple $\Psi_x(y) = \frac{1}{16}y + pr_2 v(x)$).

Dans la figure 6 on a dessiné les images de Ψ_x et Ψ_{-x} pour $x = (\cos \phi, \sin \phi) \in S^1$ contenues dans $p_1(x) \times [-1, +1] \times [0, 1]$.

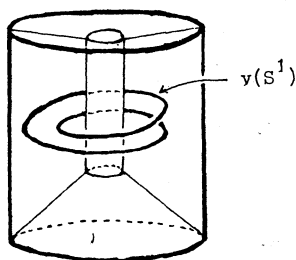


figure 5

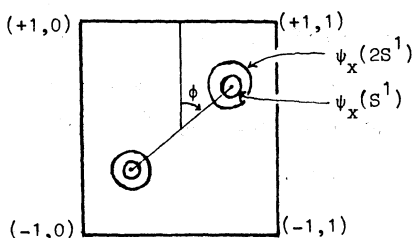


figure 6

Soit pour $x \in S^1$, $\mu_x: [0, 1] \rightarrow D^2$ le chemin de x_0 à x défini par $\mu_x(t) = (1-t)x_0 + tx$. On pose $G|_{\mathbb{P}^1 \times [-1, +1] \times [0, 1]}$ égale à

$$\begin{aligned}
 G \Psi(x,y) &= \kappa(y) & \text{si } (x,y) \in S^1 \times D^2 \\
 G \Psi(x,y) &= v_0 \varepsilon_2 \mu_x(|y| - 1) & \text{si } (x,y) \in S^1 \times (2D^2 - D^2) \\
 \text{et } G(x,s,t) &= v_0(x) & \text{si } (x,s,t) \in \mathbb{P}^1 \times [-1,+1] \times [0,1] - \text{im } \Psi.
 \end{aligned}$$

(Dans le tore épaissi $\Psi(S^1 \times (2D^2 - D^2))$ on a mis un raccordement de points base.) Il est facile de voir que la différence sur la cellule

$\mathbb{P}^0 \times [-1,+1] \times [0,1]$ entre G et l'homotopie constante de v a la valeur $(e + [v_0 \varepsilon_2 \mu_{-x_0}]) \cdot \kappa = (e + v \alpha) \cdot \kappa \in \pi_2(P \vee S^2, b)$. En étendant G en une

homotopie de v , $d^3(v, G_1)$ prend comme valeur sur $e_2 \times (-1,+1)$ la classe d'homotopie de $w: (S^3, z_0) \rightarrow (P \vee S^2, b)$, définie dans §2.2.3 par

$$\begin{aligned}
 w(x,s,t) &= v_0 \varepsilon_2(x) & \text{si } (x,s,t) \in D^2 \times \partial([-1,+1] \times [0,1]) \\
 w(x,s,t) &= G(p_1(x), s, t) & \text{si } (x,s,t) \in S^1 \times [-1,+1] \times [0,1].
 \end{aligned}$$

Pour déterminer w on va la relever dans le revêtement universel

$$p: S^2 \vee S^2 \vee S^2 = S^2 \times y_0 \times y_0 \cup y_0 \times S^2 \times y_0 \cup y_0 \times (-y_0) \times S^2 \rightarrow P^2 \vee S^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{défini par } p(x_1, x_2, x_3) &= \kappa(x_1) & \text{si } x_1 \neq y_0 \\
 &= \kappa(x_3) & \text{si } x_3 \neq y_0 \\
 &= v_0 p_2(x_2) & \text{sinon.}
 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon: D^2 \rightarrow S^2$ l'application telle que $p_2 \varepsilon = \varepsilon_2$ et que $\varepsilon(D^2)$ contient l'hémisphère nord de S^2 . Posons

$$\Psi^+, \Psi^-: S^1 \times 2D^2 \rightarrow S^1 \times ([-1,+1] \times [0,1])$$

les applications définies par $\Psi^\pm(x,y) = (x, \Psi_{\pm x}(y))$. Alors un relèvement $\tilde{w}$ de w , $\tilde{w}: (S^3, z_0) \rightarrow (S^2 \vee S^2 \vee S^2, y_0 \times y_0 \times y_0)$ sera défini de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}(x,s,t) &= (y_0, \varepsilon(x), y_0) & \text{si } (x,s,t) \in D^2 \times \partial([-1,+1] \times [0,1]) \\
 &\text{et si } (x,s,t) \in S^1 \times [-1,+1] \times [0,1] - (\text{im } \Psi^+ \cup \text{im } \Psi^-),
 \end{aligned}$$

$$\tilde{w} \Psi^+(x, y) = (y_0, \varepsilon \mu_x(|y| - 1), y_0) \text{ si } (x, y) \in S^1 \times (2D^2 - D^2),$$

$$\tilde{w} \Psi^+(x, y) = (\kappa(y), y_0, y_0) \text{ si } (x, y) \in S^1 \times D^2,$$

$$\tilde{w} \Psi^-(x, y) = (y_0, -\varepsilon \mu_{-x}(|y| - 1), y_0) \text{ si } (x, y) \in S^1 \times (2D^2 - D^2),$$

$$\tilde{w} \Psi^-(x, y) = (y_0, -y_0, \kappa(y_0)) \text{ si } (x, y) \in S^1 \times D^2.$$

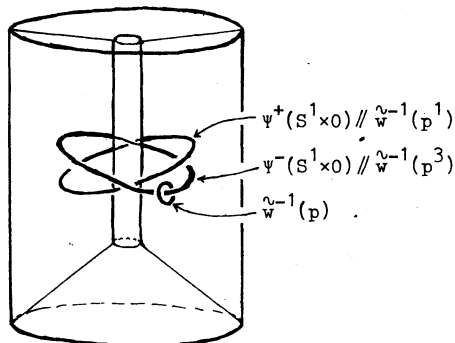


figure 7

On choisira des points $p^1, q^1 \neq y_0 \times y_0 \times y_0$ dans

$S^2 \times y_0 \times y_0, p^3, q^3 \neq y_0 \times (-y_0) \times y_0$ dans $y_0 \times (-y_0) \times S^2$ et

$p, q \in y_0 \times S^2 \times y_0$. On suppose que p et q se trouvent sur l'hémisphère sud. Alors $\tilde{w}^{-1}(p^1)$ et $\tilde{w}^{-1}(q^1)$ (resp. $\tilde{w}^{-1}(p^3)$ et $\tilde{w}^{-1}(q^3)$) forment deux courbes simples non enlacées parallèles à $\Psi^+(S^1 \times 0)$ (resp. $\Psi^-(S^1 \times 0)$).

Les courbes $\tilde{w}^{-1}(p^1)$ et $\tilde{w}^{-1}(q^3)$ sont enlacées une fois. $\tilde{w}$ atteint l'hémisphère sud de $y_0 \times S^2 \times y_0$ seulement dans $\Psi^-(S^1 \times (2D^2 - D^2))$ et $\tilde{w}^{-1}(p)$ et $\tilde{w}^{-1}(q)$ forment deux courbes simples non enlacées parallèles au méridien du tore plein $\Psi^-(S^1 \times D^2)$ (voir la figure 7), i.e. bordant un disque plongé qui coupe $\Psi^-(S^1 \times 0)$ transversalement en 1 point. Par conséquent $[w] = p_{\#}[\tilde{w}] = [\kappa, (v \alpha) \kappa] + [v_0 p_2, (v \alpha) \kappa]$. Pour la détermination de l'image le problème du signe n'a pas d'intérêt puisque le 3-cocycle ξ défini par $\xi(e_2 \times (-1, +1)) = [\kappa, (v \alpha) \kappa]$ représente une classe d'ordre 2 dans $H^3(\mathbb{P}^2 \times ([-1, +1], [-1, +1]); v^* \pi_2(\mathbb{P}^2 \vee S^2))$ (voir la démonstration de la proposition 3) de §2.3).

2.3 -

Remarques sur coker $\Delta^1(f; \partial M) \iota^1$.

En identifiant $H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))$ et $\sum_{\pi_1(N, n)} \pi_3(N, n)$ par ϕ_f (voir §1) et étant donné un système d'Epstein paramétrisé $\{ \langle \gamma_j, \tau_j \rangle; j \}$ de M , la proposition 2 de §2.1 et les corollaires de §2.2.5 et §2.2.6 impliquent

Proposition : L'image de $\Delta^1(f; \partial M) \iota^1 : H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*)) \rightarrow H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))$ est engendrée par les éléments suivants:

- 1) $1 \otimes [f(\gamma_j, \tau_j), x]$ pour tout τ_j , dont l'image est une sphère et $x \in \pi_2(N, n)$,
- 2) $1 \otimes [x + f(\gamma_j, \tau_j), f(\gamma_j, \alpha_j \gamma_j^{-1})x]$ pour tout τ_j , dont l'image est un plan projectif et $x \in \pi_2(N, n)$. α_j désigne le lacet non trivial de $\tau_j(S^2)$.

Rappelons que toute immersion τ dont l'image est une sphère ou un plan projectif à fibré normal trivial fait partie d'un système d'Epstein (remarque 2 de Ch II, 1).

Conséquences: Soient $\tau_j, x, \alpha_j, \gamma_j$ comme dans 2), alors

$$3) \quad 2 \otimes [f(\gamma_j, \tau_j), x] \in \text{im } \Delta^1(f; \partial M) \iota^1 \text{ et}$$

$$4) \quad 1 \otimes [f(\gamma_j, \tau_j), x] \in \text{im } \Delta^1(f; \partial M) \iota^1 \text{ si en plus } f(\gamma_j, \alpha_j \gamma_j^{-1})x = -x \text{ (par exemple si } x = f(\gamma_j, \tau_j)).$$

Démonstration: 3) suit de 2) par les égalités suivantes ($\lambda_j = f(\gamma_j, \alpha_j \gamma_j^{-1})$):

$$2 \otimes [x, \lambda_j x] = 1 \otimes [x, \lambda_j x] + 1 \otimes \lambda_j [\lambda_j x, x] = 1 \otimes [x, \lambda_j x] - 1 \otimes [\lambda_j x, x] = 0.$$

Si en plus $\lambda_j x = -x$,

$$1 \otimes \text{Hopf}(x) = 1 \otimes \text{Hopf}(-x) = 1 \otimes \text{Hopf}(\lambda_j x) = 1 \otimes \lambda_j \text{Hopf}(x) = -1 \otimes \text{Hopf}(x),$$

donc $1 \otimes [x, \lambda_j x] = 1 \otimes (-[x, x]) = -2 \otimes \text{Hopf}(x) = 0.$ Q.e.d.

Il en suit que l'image de $\Delta^1(f; \partial M) \iota^1$ contient les éléments suivants:

pour $x \in \pi_2(N, n)$ et $y \in \pi_2(M, m)$: $2(1 \otimes [f_{\#}(y), x])$ par 1) et 3),

$1 \otimes [f_{\#}(y), x]$ si en plus $y \in \pi_2^{\text{sph}}(M, m)$ par 1) et $2(1 \otimes f_{\#} \text{Hopf}(y))$ par 1) et 4).

Remarque : Si f est une équivalence d'homotopie, en tant qu'application

$f: M \rightarrow N$, $\text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1$ est un $\mathbb{Z}_2$ -module. Sans cette hypothèse $\text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1$ est un $\mathbb{Z}_{2 \cdot \deg(f)}$ -module.

En effet si f est une équivalence d'homotopie ceci suit de §1.2 et de la discussion ci-dessus. Généralement $\text{im } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1 \supset f^* \text{im } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \cap^1$ ce qui est identifié par ϕ_f à $\deg(f) \cdot \text{im } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \cap^1$ (naturalité de la dualité de Poincaré) et donc $\text{im } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1$ contient les multiples de $2 \cdot \deg(f)$.

Dans la suite on va détailler ce qui se passe si f est une équivalence d'homotopie.

Définitions: $W(\Lambda_{M,m})$ est le $\mathbb{Z}_2$ -module engendré par les paires $\langle \lambda, \mu \rangle$,

$\lambda, \mu \in \Lambda_{M,m}$, avec les relations

- a) $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle \mu, \lambda \rangle$,
- b) $\langle g\lambda g^{-1}, g\mu g^{-1} \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle$ pour $g \in \pi_1(M, m)$,
- c) $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu \lambda \mu \rangle$,
- d) $\langle \lambda, \lambda \rangle = 0$.

L'homomorphisme $c: W(\Lambda) \rightarrow \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n) / \text{im } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1$ fait correspondre

$\langle \lambda, \mu \rangle$ à $1 \otimes [ft_{\lambda} p_2, ft_{\mu} p_2]$, si $t_{\lambda}, t_{\mu}: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M, m)$ sont des plongements tels que $t_{\lambda}|(\mathbb{P}^1, \bar{y}_0)$ et $t_{\mu}|(\mathbb{P}^1, \bar{y}_0)$ représentent λ respectivement μ .

Par la proposition de Ch II, 4, $[t_{\lambda} p_2]$ est bien défini à signe près modulo $\pi_2^{\text{sph}}(M, m)$, donc $c(\langle \lambda, \mu \rangle)$ ne dépend pas du choix de t_{λ} et de t_{μ} . c respecte

les relations: a), b) et d) correspondent aux relations du produit de

Whitehead dans $\bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n)$ modulo 2, données dans §1.2 et c) corres-

pond à la proposition 2) ci-dessus.

La suite exacte (S) de §1.2

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\pi_1(N,n)} S^2 \pi_2(N,n) / \text{im } \beta \xrightarrow{10Wh} \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n) \xrightarrow{10v} \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n) \rightarrow 0$$

donnera lieu à la suite exacte suivante:

Théorème: Si $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ est une équivalence d'homotopie (en tant qu'application $f: M \rightarrow N$) on a la suite exacte de $\mathbb{Z}_2$ -modules

$$0 \rightarrow W(\Lambda_{M,m}) \xrightarrow{c} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \xrightarrow{1 \otimes v} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n) \rightarrow 0$$

($1 \otimes v$ est induit de $1 \otimes v$). $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)$ est un $\mathbb{Z}_2$ -module de rang fini, inférieur ou égal à la cardinalité d'un système d'Epstein de N .

Démonstration: En identifiant $\pi_1(M,m)$ et $\pi_1(N,n)$ par $f_{\#1}$, l'homomorphisme $f_{\#}: \pi_3(M,m) \rightarrow \pi_3(N,n)$ est un isomorphisme de $\pi_1(M,m)$ -modules et selon la proposition l'image de l'homomorphisme

$$(1 \otimes f_{\#}^{-1}) \phi_f \Delta^1(f; \partial M) \xrightarrow{1}: H^1(M, \partial M; f^* H_2(S^*)) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(M,m)} \pi_3(M,m)$$

est engendré en tant que groupe abélien par $\{1 \otimes Wh(d); d \in D\}$ où

$D = \{[\tau] \otimes x; \tau: (P^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M,m) \text{ est un plongement et } x \in \pi_2(M,m)\} \cup \{(x + [t p_2]) \otimes \lambda x; t: (P^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M,m) \text{ est un plongement à fibré normal trivial, } \lambda = t| (P^1, \bar{y}_0) \text{ et } x \in \pi_2(M,m)\}$ comme sous-ensemble $\pi_1(M,m)$ -invariant de $S^2 \pi_2(M,m)$. L'image de l'homomorphisme de Bockstein (voir §1.2)

$$\beta: H_1(M; \mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2(M)) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(M,m)} S^2 \pi_2(M,m)$$

est engendrée en tant que groupe abélien par $\{1 \otimes b'; b' \in B'\}$ où B' est un ensemble $\pi_1(M,m)$ -invariant, réunion d'un sous-ensemble de $S^2 \pi_2^{\text{sph}}(M,m)$ et de

$B = \{[tp_2] \otimes [tp_2]; t: (P^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M,m) \text{ est un plongement à fibré normal trivial}\} \subset S^2 \pi_2(M,m)$.

De la suite exacte rappelée ci-dessus, (S), on obtient donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(M,m)} (S^2 \pi_2(M,m) / (B' + (D))) \xrightarrow{1 \otimes f_{\#} Wh} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \xrightarrow{1 \otimes v} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n) \rightarrow 0.$$

Par construction $(D) \supset \pi_2^{\text{sph}}(M,m) \otimes \pi_2(M,m)$ et donc on a l'isomorphisme

$$\bigoplus_{\pi_1(M,m)} (S^2 \pi_2(M,m)/(B')+(D)) = \bigoplus_{\pi_1(M,m)} (S^2(\pi_2(M,m)/\pi_2^{\text{sph}}(M,m))/(B)+(D)).$$

Soient $\tilde{B} = \{\lambda \otimes \lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset S^2(\mathbb{Z}[\Lambda])$ et

$\tilde{D} = \{\mu \otimes \lambda \mu + \lambda \otimes \mu; \lambda, \mu \in \Lambda\} \subset S^2(\mathbb{Z}[\Lambda])$ alors par le "théorème de Ch II, 4

le dernier groupe est isomorphe à

$$W = \bigoplus_{\pi_1(M,m)} (S^2(\mathbb{Z}[\Lambda])/(\tilde{B}) + (\tilde{D})).$$

Remarquons que $S^2(\mathbb{Z}[\Lambda] \otimes \mathbb{Z}) = S^2(\mathbb{Z}[\Lambda])$ comme $\pi_1(M,m)$ -module. Puisque

dans $\bigoplus_{\pi_1(M,m)} S^2 \mathbb{Z}[\Lambda]$, $1 \otimes (\mu \otimes \lambda \mu) = 1 \otimes \lambda (\lambda \mu \otimes \mu) = -1 \otimes (\lambda \mu \otimes \mu) =$

$= -1 \otimes (\mu \otimes \lambda \mu)$, tout élément est d'ordre 2 modulo $\bigoplus_{\pi_1(M,m)} (\tilde{D})$ et on

vérifie facilement que W est isomorphe à $W(\Lambda)$ et que $\overline{1 \otimes f_{\#} W h}$ est ainsi

identifié à c . La remarque sur le rang de $\bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)$ est une

conséquence de $SE(N)$ (voir Ch II, 2).

q.e.d.

2.4 -

Les rotations parallèles aux sphères - 1.

Ce paragraphe concerne le quotient $\text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \cap^1$ de $\bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)$ au cas où $f = \text{Id}_N: N \rightarrow N$.

Lemme 1: La suite suivante, induite de celle du théorème de Ch II, 4, est exacte

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2^{\text{sph}}(N,n) \rightarrow \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n) \xrightarrow{1 \otimes 1} \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \mathbb{Z}[\Lambda_{N,n}] \rightarrow 0.$$

2: L'homomorphisme $H: \bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2^{\text{sph}}(N,n) \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \cap^1$ qui

associe à $1 \otimes \sigma$, pour un plongement $\sigma: (S^2, y_0) \rightarrow (N, n)$, la classe de

$1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)$ est bien défini et satisfait à $\overline{1 \otimes v} H = \text{Id}$ $\bigoplus_{\pi_1(N,n)} \pi_2^{\text{sph}}(N,n) \dots$

Démonstration: Pour 1. il suffit de montrer que l'homomorphisme de coef-

ficients: $H_1(N; \bigoplus_{\pi_2(N,n)} \pi_2(N,n)) \rightarrow H_1(N; \bigoplus_{\pi_2(N,n)} \mathbb{Z}[\Lambda])$ est surjectif, puisque

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2^{\text{sph}}(N,n) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2(N,n) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda] \rightarrow 0$$

est exacte. Soit $\{\lambda_i; i = 1, \dots, p\}$ un système de représentants des orbites de Λ pour la $\pi_1(N,n)$ -action. En désignant

$I(\lambda_i) = \{g \in \pi_1(N,n); g\lambda_i g^{-1} = \lambda_i\}$ on a un isomorphisme de $\pi_1(N,n)$ -modules

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda] \cong \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}[\pi_1(N,n)] \otimes_{I(\lambda_i)} \mathbb{Z}_2$$

Soit $\{t_i; i = 1, \dots, p\}$ un système de plongements $t_i: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N,n)$

tels que $t_i|(\mathbb{P}^1, \bar{y}_0)$ représente λ_i . Alors l'élément $\{(e\theta_1) \cdot \lambda_i\}$ du groupe $H_1(N; \mathbb{Z}[\pi_1(N,n)] \otimes_{I(\lambda_i)} \mathbb{Z}_2)$ correspond à $\{(1\theta\lambda_i) \cdot \lambda_i\}$ dans $H_1(N; \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda])$

qui est l'image de $\{(1\theta[t_i p_2]) \cdot \lambda_i\}$.

Par la proposition de Ch I, 3.2 on a un isomorphisme

$$H_1(N; \mathbb{Z}[\pi_1(N,n)] \otimes_{I(\lambda_i)} \mathbb{Z}_2) \cong H_1(I(\lambda_i); \mathbb{Z}_2). \text{ Si } I(\lambda_i) = \{e, \lambda_i\}, \text{ ce groupe}$$

est engendré par $\{(e\theta_1) \cdot \lambda_i\}$, sinon par le lemme 2 de Ch II, 3, $I(\lambda_i)$ est

un groupe abélien engendré par λ_i et un certain β d'ordre infini, et il

faut un deuxième générateur $\{1 \cdot \beta^{-1}\} \in H_1(I(\lambda_i); \mathbb{Z}_2)$ qui correspond à

$\{(1\theta\lambda_i) \cdot \beta^{-1}\} \in H_1(N; \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda])$. Selon le même lemme il existe

$\xi \in \pi_2^{\text{sph}}(N,n)$ tel que $(\beta - e) \cdot [t_i p_2] + (\lambda_i - e) \cdot \xi = 0$, et donc

$\{(1\theta\lambda_i) \cdot \beta^{-1}\} = (1\theta)_1 \{ (1\theta[t_i p_2]) \cdot \beta^{-1} + (1\theta\xi) \cdot \lambda_i^{-1} \}$. Ceci montre 1. La deuxième

partie suit de ceci, du fait que la fonction $x \mapsto 1 \otimes \text{Hopf}(x)$ sur

$\pi_2^{\text{sph}}(N,n)$ est linéaire modulo $\text{im } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \cap 1$ et que pour un élément

$x \in \pi_2^{\text{sph}}(N,n)$ trivial modulo 2 et l'action de $\pi_1(N,n)$, $1 \otimes \text{Hopf}(x)$

appartient à $\text{im } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \cap 1$.

q.e.d.

Pour la réalisation géométrique des éléments de l'image de H on fait la définition suivante:

Définition: (cf. Ch IV, 2.2) Soit $\alpha: (I, \{0,1\}) \rightarrow (O(2), \text{Id})$ un générateur

de $\pi_1(O(2), \text{Id})$. Soit $\rho_0: S^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$ l'homéomorphisme défini par

$\rho_0(x, t) = (\alpha(t)(x), t)$ pour $(x, t) \in S^2 \times I$. Pour un plongement

$i: S^2 \times I \rightarrow M$, la rotation parallèle à la sphère $i(S^2 \times 0)$ (associée à i et α) est l'homéomorphisme $\rho: M \rightarrow M$ tel que $\rho(x) = x$ si $x \notin i(S^2 \times I)$ et que $\rho(i(x)) = i\rho_0(x)$ pour $x \in S^2 \times I$.

Alors pour la décomposition cellulaire de $S^2 \times I$ analogue à celle de $S^2 \times [-1, +1]$ de §2.2.1, ρ_0 coïncide avec l'identité sur le 2-squelette.

Remarque: $d^3(\rho_0, \text{Id}; S^2 \times \{0, 1\})$ est un générateur du groupe infini cyclique $H^3(S^2 \times I, S^2 \times \partial I; \pi_3(S^2 \times I))$ isomorphe à $\pi_3(S^2)$.

Démonstration: $d^3(\rho_0, \text{Id})$ est déterminé par la classe d'homotopie de

$$w: S^3 = D^2 \times I \times 0 \cup \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ S^1 \times I \times 0 = S^1 \times I \times 1 \end{array} \right] D^2 \times I \times 1 \longrightarrow S^2$$

donnée par $w(x, t, 0) = \varepsilon_2(x)$ et $w(x, t, 1) = \alpha(t) \varepsilon_2(x)$ pour $(x, t) \in D^2 \times I$. (ε_2 désigne l'application caractéristique de la 2-cellule de S^2). On peut vérifier qu'elle représente $\text{Hopf}(\text{Id}_{S^2})$ (à signe près) par exemple par le critère de l'enlacement des images réciproques de deux points de $\varepsilon_2(\text{Int } D^2)$ (voir §2.2.4). q.e.d.

Théorème: Soit $x \in \pi_2^{\text{sph}}(N, n)$ alors 1^0 . il y a un plongement

$\sigma: (S^2, y_0) \rightarrow (N, n)$ tel que $1 \otimes x = 1 \otimes [\sigma]$ dans $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \pi_2(N, n)$ et

2^0 . pour la rotation ρ parallèle à la sphère $\sigma(S^2)$ l'obstruction

$d^3(\rho, \text{Id}; \partial N)$ représente la classe $H(x)$ de $1 \otimes \text{Hopf}(x)$ dans $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \xrightarrow{1}$.

Démonstration: Si σ existe comme dans 1^0 , par naturalité de l'obstruction

on a $d^3(\rho, \text{Id}; \partial N) = 1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)$ et par le lemme 2, $H(x) = H(\sigma)$ donc on

a 2^0 . Soit $\{\langle \gamma_i, \sigma_i \rangle; i\}$ un système d'Epstein paramétrisé de N , alors x ,

étant une combinaison $\pi_1(N, n)$ -linéaire de plongements, est une combinaison

$\pi_1(N, n)$ -linéaire $\sum g_i \gamma_i \sigma_i$ du système $\{\gamma_i \sigma_i; \sigma_i(S^2) \cong S^2\}$ selon le

lemme 1 b) de Ch II, 3. Modulo $2\pi_2(N, n)$ et l'action de $\pi_1(N, n)$ la con-

struction de σ revient au problème évident de faire une somme connexe plongée des sous-variétés non orientées (!) $\sigma_1(S^2)$ pour lesquelles

$\Sigma n(g, i)$ est impair.

q.e.d.

g

§ 3 -

La contribution de coker ι^1 à l'image de $\Delta^1(f; \partial M)$.

3.1 -

Réduction à des variétés "simples".

Avant d'aborder la réduction on fixe une notation concernant l'homomorphisme ι . Soient Z une 3-variété compacte, $z \in Z$, $q: (\tilde{Z}, \tilde{z}) \rightarrow (Z, z)$ le

revêtement universel, T la réunion des membres d'un système d'Epstein

de Z et $T^* = q^{-1}(T)$, alors on a la surjection (voir Ch II, 2)

$$\iota: H_2(T^*) \rightarrow H_2(\tilde{Z}) \xrightarrow{h_{Z, Z}} \pi_2(Z, z).$$

Soient X une 3-variété compacte et $g: X \rightarrow Z$ une application, alors

Notation: $\iota_g^1: H^1(X, \partial X; g^* H_2(T^*)) \rightarrow H^1(X, \partial X; g^* \pi_2(Z))$ est l'homomorphisme

de coefficients associé à ι . Si g est l'identité on pose $\iota_{Id_Z}^1 = \iota^1_Z$.

Au cas où l'homomorphisme $g_{\#}: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Z)$ est injectif et respecte les

homomorphismes d'orientation et que $\tilde{Z}$ n'est pas fermée (i.e. $SE(Z)$), on

a parallèlement au théorème de §2.1:

Proposition: L'image de ι_g^1 correspond par la dualité de Poincaré au

noyau de l'homomorphisme

$$H_2(X; g^* \pi_2(Z) \otimes \tilde{Z}) \rightarrow H_2(\pi_1(X, x); g^* \pi_2(Z, g(x)) \otimes \tilde{Z}).$$

En particulier elle est indépendante du système d'Epstein choisi.

Soient $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application satisfaisant à $F(f)$ et comme dans

Ch II, 2, $\mathcal{W}$ un système d'Epstein projectivement minimal de N , $S = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$

et $\mathcal{W}$ l'ensemble des composantes W du complémentaire de $N-S$ telles que

$\bar{W} - W \subset S$ et que $\pi_1(W)$ soit fini. Quitte à rajouter des 2-sphères à $\mathcal{W}$ on

peut supposer que pour tout $W \in \mathcal{W}$, $\bar{W}$ est une variété simple, c'est à dire une variété compacte d'un des trois types suivants:

- 1° une variété simplement connexe, donc du type d'homotopie d'une boule trouée,
- 2° une variété à groupe fondamental fini dont le bord est une 2-sphère et
- 3° une variété homotopiquement équivalente (rel le bord) au complémentaire d'une boule dans $\mathbb{P}^2 \times S^1$.

En particulier le bord d'une variété simple est une réunion de 2-sphères.

Dans cette situation on a les lemmes suivants:

Lemme:1: L'homomorphisme de Bockstein associé à $SE(N)$ induit un isomorphisme

$$\text{coker } i_N^1 \cong H^2(N, \partial N; H_3(\tilde{N}, S^*)).$$

$$2: \bigoplus_{W \in \mathcal{W}} \text{coker } i_{\bar{W}}^1 \xrightarrow{\Sigma e_W} \text{coker } i_N^1 \text{ est un isomorphisme. } e_W$$

désigne l'homomorphisme induit de l'homomorphisme d'extension (aussi sur les coefficients) $H^1(\bar{W}, \partial \bar{W}; \pi_2(\bar{W})) \rightarrow H^1(N, \partial N; \pi_2(N))$.

$$3: f^1: H^1(N, \partial N; \pi_2(N)) \rightarrow H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \text{ induit un isomorphisme}$$

$$f^1: \text{coker } i_N^1 \rightarrow \text{coker } i_f^1.$$

$$\text{Rabiot: } \text{coker } i_{\bar{W}}^1 \cong H_1(W; \mathbb{Z}).$$

Le point 3 est trivial si $\partial N = \emptyset$ parce que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux.

Démonstration: D'après la proposition et la démonstration du lemme 2 de Ch IV, 1.1 l'homomorphisme de coefficients

$$H^2(N, \partial N; H_3(\tilde{N}, S^*)) \rightarrow H^2(N, \partial N; H_2(S^*))$$

est trivial sous l'hypothèse ci-dessus de minimalité. Ceci prouve 1. En prenant une composante $\bar{W}^\sim$ de $p^{-1}(\bar{W})$, où $p: \tilde{N} \rightarrow N$ désigne le revêtement universel de N , on a l'homomorphisme d'extension

$$e_W^1: H^2(\bar{W}, \partial \bar{W}; H_3(\bar{W}^\sim, \bar{W}^\sim \cap S^*)) \rightarrow H^2(N, \partial N; H_3(p^{-1}\bar{W}, p^{-1}(\bar{W}-W))).$$

En appliquant la dualité de Poincaré et le lemme 3 de Ch II, 2 il suit de la proposition de Ch I, 3.2, appliquée deux fois (W comme ci-dessus,

$G = \mathbb{Z}$, $X = \bar{W}$ et $X = N$, $\pi_1(\hat{X}, \hat{x}) = I(\hat{N})$ que e'_W s'identifie à l'identité de $H_1(W; \mathbb{Z})$, et il est donc un isomorphisme. Par la naturalité de l'homomorphisme de Bockstein par rapport aux suites exactes $(SE(\bar{W}) \rightarrow SE(N))$ et aux espaces $(\bar{W} \subset N)$, on peut conclure 2. Pour montrer 3 il suffit de montrer que

$$f^2: H^2(N, \partial N; H_3(\hat{N}, S^*)) \rightarrow H^2(M, \partial M; f^* H_3(\hat{N}, S^*))$$

est un isomorphisme. Ceci suit des faits que

$$f_1: H_1(M; f^* H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(N; H_3(\hat{N}, S^*) \otimes \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme et que la multiplication par $\deg(f)$ est un isomorphisme de $H^2(N, \partial N; H_3(\hat{N}, S^*))$. Le dernier fait est une conséquence de l'isomorphisme trouvé ci-dessus: $\text{coker } i_{\bar{W}}^1 \cong H_1(W; \mathbb{Z})$, du lemme 2 et du lemme de Ch III, 2.1 disant que $\deg(f)$ et $|\pi_1(W)|$ (et à fortiori $|H_1(W; \mathbb{Z})|$) sont relativement premiers pour tout $W \in \mathcal{M}$. q.e.d.

En dénotant $\bar{\Delta}_f: \text{coker } i_f^1 \rightarrow \text{coker } \Delta^1(f; \partial M) i_f^1$ l'homomorphisme induit de $\Delta^1(f; \partial M)$ et en utilisant la naturalité de Δ^1 , le lemme ci-dessus implique que l'image de $\bar{\Delta}_f$ est engendrée par les images des homomorphismes

$$\begin{aligned} \text{coker } i_{\bar{W}}^1 \xrightarrow{\bar{\Delta}_{\bar{W}}} \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{\bar{W}}; \partial \bar{W}) i_{\bar{W}}^1 &\xrightarrow{\bar{e}_W} \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) i_N^1 \longrightarrow \\ &\xrightarrow{f^3} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M) i_f^1, \end{aligned}$$

où W parcourt $\mathcal{M}$ et où $\bar{e}_W$ est induit de l'extension

$$H^3(\bar{W}, \partial \bar{W}; \pi_3(\bar{W})) \rightarrow H^3(N, \partial N; \pi_3(N)).$$

Si W est simplement connexe, $\text{coker } i_{\bar{W}}^1 = 0$ donc pour calculer l'image de $\bar{\Delta}_f$ il suffit de considérer les W tels que $\bar{W}$ est une variété simple de type 2 (§3.3) et de type 3 (§3.2). Rappelons que par l'isomorphisme ϕ_f de §1, essentiellement revenant à la dualité de Poincaré, f^3 induit la multiplication par $\deg(f)$ dans $\mathbb{Z} \otimes \pi_3(N, n)$.

3.2 -

Le cas des variétés simples: exemples.

On va déterminer l'image de $\Delta^1(\text{Id}_X; \partial X)$ pour des variétés X obtenues à partir d'un espace lenticulaire "classique" ou de $\mathbb{P}^2 \times S^1$ en enlevant une boule ouverte. On donne une autre description de ces variétés dans la proposition ci-dessous.

Soit $B \subset \text{Int } D^2 \times S^1$ une boule, $\sigma: S^2 \rightarrow \partial B$ un homéomorphisme (pour fixer les idées tel que $\sigma^{-1}(\{0\} \times S^1) = \{+y_0, -y_0\}$). Soit $D \subset \mathbb{P}^2$ un disque centré en $\bar{y}_0$. A un lacet $\alpha: (I, \partial I) \rightarrow (O(2), \text{Id})$ sont associées des isotopies de $D^2 \times S^1$ et de $\mathbb{P}^2$:

$$\phi_t(x, s) = (\alpha(t)(x), s) \text{ pour } (x, s) \in D^2 \times S^1, t \in I \text{ et}$$

$$\psi_t(p_2(x)) = p_2 \alpha(t)(x) \text{ pour } x \in S^2, t \in I \text{ (cf. la définition de Ch IV, 2.2).}$$

On peut s'arranger que ϕ_t et ψ_t laissent invariant B respectivement D .

Il est clair, si α représente le générateur de $\pi_1(O(2), \text{Id})$, que l'homéomorphisme $\partial B \times I \rightarrow \partial B \times I$ défini par $(z, t) \rightarrow (\phi_t(z), t)$ est la rotation parallèle à la sphère $\partial B \times 0$ (voir §2.4).

Proposition: Soit X une variété, recollement de $D^2 \times S^1 - \text{Int } B$ et de $D^2 \times S^1$ (resp. de $(\mathbb{P}^2 - \text{Int } D) \times S^1$) par un homéomorphisme $h: \partial D^2 \times S^1 \cong \partial D^2 \times S^1$ (resp. $h: \partial D^2 \times S^1 \cong \partial D \times S^1$) alors

$$1 \otimes \text{Hopf}(\sigma) \in \text{im } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) \subset \bigoplus_{\pi_1(X)} \pi_3(X).$$

C'est à dire que la rotation parallèle à $\sigma(S^2) = \partial X$ est homotope à l'identité rel ∂X (elle l'est même isotopiquement).

Démonstration: Quitte à faire une isotopie de h , h est la composition de deux "translations" chacune préservant un paramètre de $\partial D^2 \times S^1$. En ce cas h commute avec les translations $\phi_t|_{\partial D^2 \times S^1}$, qui peuvent être étendues à l'aide de ϕ_t (resp. de $\psi_t \times \text{Id}$) et de la "translation" dans la direction

de S^1 en une isotopie de l'identité à l'identité sur $D^2 \times S^1$ (resp. sur $(\mathbb{P}^2 - D^2) \times S^1$). En modifiant l'isotopie ainsi obtenue dans un collier de ∂B on peut obtenir une isotopie de Id_X rel ∂B aboutissant à la rotation parallèle à ∂B , ρ . Par §2.4, $d^3(\rho, \text{Id}_X; \partial B) = 1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)$. q.e.d.

Théorème 1: Soit X le complémentaire d'une boule ouverte dans une variété à groupe fondamental cyclique fini, admettant une décomposition de Heegard de genre 1 (resp. dans $\mathbb{P}^2 \times S^1$), alors (i) pour un homéomorphisme $\sigma: S^2 \rightarrow \partial X$

$$\text{im } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) = \text{im } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) \cdot i_X^1 + (1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)) \subset \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(X)} \pi_3(X),$$

et (ii) $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) = 0$ (resp. $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) = \mathbb{Z}_2$ engendré par $1 \otimes \text{Hopf}(t p_2)$ où $t: \mathbb{P}^2 \rightarrow X$ est un plongement à fibré normal trivial). Il en suit le même pour toute variété homotopiquement équivalente (rel le bord) à X .

Démonstration: Selon le théorème de §2.3,

$$\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) \cdot i_X^1 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(X)} \pi_2(X), \text{ parce que } W(\Lambda_X) = 0. \quad \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(X)} \pi_2(X)$$

est engendré par $1 \otimes \sigma$ (resp. par $1 \otimes \sigma$ et $1 \otimes t p_2$). Le résultat suit immédiatement de la proposition ci-dessus (resp. il faut s'en convaincre que l'on a recolté vraiment tout dans cette proposition. Dans §3.1 on a vu que $\text{coker } i_X^1$ est isomorphe à $H_1(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$ et donc cyclique. La

présentation $SE(X)$ de $\pi_2(X)$ de Ch II,2 donne un isomorphisme de $\pi_1(X)$ -modules, $\pi_2(X) = \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \cdot t p_2 \oplus \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \cdot \sigma$ modulo les relations

$(e + \lambda) \cdot t p_2$ et $(\beta - e) \cdot t p_2 + (\lambda - e) \cdot \sigma$ où $\pi_1(X) = \mathbb{Z}[\beta] \otimes \mathbb{Z}_2[\lambda]$. Par conséquent $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(X)} \pi_2(X)$ est de rang 2 et $1 \otimes \sigma$ n'est pas trivial, donc

$1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)$ engendre l'image $\bar{\Delta}_X(\text{coker } i_X^1)$ contenue dans $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) \cdot i_X^1$.

q.e.d.

Rabiot de ce paragraphe: Soit $B \subset \text{Int } \mathbb{P}^2 \times I$ une boule. ρ, ρ_0, ρ_1 désignent les rotations parallèles à ∂B , à $\mathbb{P}^2 \times 0$ et à $\mathbb{P}^2 \times 1$ dans $\mathbb{P}^2 \times I - \text{Int } B$. Alors la composition $\rho \rho_0 \rho_1$ est isotope à l'identité rel le bord. Etant données des paramétrisations $t_i: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \times i$ pour $i = 0, 1$ on a l'égalité

$$d^3(\text{Id}, \rho) = 1 \otimes \text{Hopf}(t_1 p_2 - t_0 p_2). \text{ Par conséquent}$$

Théorème 2: Soient $s_0, s_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow N$ des plongements à fibré normal trivial tels que $s_0|_{\mathbb{P}^1}$ et $s_1|_{\mathbb{P}^1}$ soient homotopes. Notons la rotation parallèle à $s_1(\mathbb{P}^2)$ par ρ_1 ($i = 0, 1$). Alors il y a une composition h de rotations parallèles à des sphères telle que ρ_0 soit homotope à $h \rho_1$ (rel le 0-squelette relatif). On a l'égalité

$$d^3(\text{Id}, h) = 1 \otimes \text{Hopf}(s_1 p_2 - s_0 p_2) \mod \text{im } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \cap \mathbb{N}^1.$$

Démonstration: D'après la démonstration du lemme 1 c) de Ch II, 3 on peut passer de s_0 à s_1 par une suite de plongements $s_0 = t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k = s_1$ du plan projectif tel que $t_j(\mathbb{P}^2) \cap t_{j+1}(\mathbb{P}^2) = \emptyset$ pour $j = 0, \dots, k-1$ et que $t_j(\mathbb{P}^2) \cup t_{j+1}(\mathbb{P}^2)$ fait partie du bord d'une sous-variété plongée, homotopiquement équivalente à $\mathbb{P}^2 \times I - \text{Int } B$. Le résultat suit alors du rabiot ci-dessus et du lemme 2 de §2.4.

3.3 -

Le cas des variétés simples.

Dans cette section on considère, sauf mention contraire, des variétés simples (voir §3.1) W à groupe fondamental fini (et dont le bord consiste en une 2-sphère).

Proposition 1: Soit $\sigma: S^2 \rightarrow \partial W$ un homéomorphisme, alors

$$\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_W; \partial W) \cap \mathbb{W}^1 \cong \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W)|)$$

et il est engendré par la classe de $1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)$, correspondant à la rotation parallèle à ∂W .

Démonstration: Par le théorème de §2.3, $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_W; \partial W) \cdot \iota_W^1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(W)} \pi_2(W)$ et on sait que $\pi_2(W) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(W)] / (\sum_{g \in \pi_1(W)} g)$ est engendré par σ .

Définitions: $r_W: \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_W; \partial W) \cdot \iota_W^1 \rightarrow \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W)|)$ est l'isomorphisme unique,

$$p_W: \text{coker } \iota_W^1 \rightarrow H^2(W, \partial W; H_3(\hat{W}, \partial \hat{W})) \rightarrow H_1(W; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\pi_1(W); \mathbb{Z})$$

est l'isomorphisme de §3.1, composé, rappelons-le, de l'homomorphisme de Bockstein (lemme 1, §3.1), de l'isomorphisme de la dualité de Poincaré (en utilisant pour le revêtement universel $\hat{W}$ l'orientation induite de celle de W ; il ne dépend pas du choix) et de l'isomorphisme canonique et

$\psi_W: H_1(\pi_1(W); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W)|)$ est la composition $r_W \bar{\Delta}_W p_W^{-1}$ (voir §3.1 pour $\bar{\Delta}_W$).

Dans les deux propositions suivantes on donne le comportement de ψ_W par rapport aux applications induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux et aux revêtements (connexes).

Proposition 2: Soient W_i, σ_i comme dans la proposition 1 ($i = 1, 2$), $w_i = \sigma_i(y_0)$ et $\alpha: \pi_1(W_1, w_1) \rightarrow \pi_1(W_2, w_2)$ un isomorphisme, alors il y a une application $a: (W_1, \partial W_1, w_1) \rightarrow (W_2, \partial W_2, w_2)$ telle que (i) a induit α , (ii) $\deg(a)$ et $|\pi_1(W_1, w_1)|$ sont relativement premiers, (iii) $[a \sigma_1] = \deg(a) [\sigma_2] \in \pi_2(W_2, w_2)$ et (iv) on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_1(\pi_1(W_2, w_2); \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\alpha_1} & H_1(\pi_1(W_1, w_1); \mathbb{Z}) \\ \downarrow \psi_{W_2} & & \downarrow \psi_{W_1} \\ \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W_2, w_2)|) & = & \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W_1, w_1)|) \end{array}$$

Démonstration: $\pi_1(W_i, w_i)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1(W_i \cup_{\sigma_i} D^3, w_i)$ pour

$i = 1, 2$ et puisque $\pi_2(W_2 \cup_{\sigma_1} D^3, w_2) = 0$ il y a une application

$\bar{a}: (W_1 \cup_{\sigma_1} D^3, w_1) \rightarrow (W_2 \cup_{\sigma_2} D^3, w_2)$ induisant α . Puisque $\bar{a}$ induit une sur-

jection de groupes fondamentaux on peut s'arranger, quitte à faire une homotopie rel w_1 que $(\bar{a})^{-1}(D^3) = D^3$ (voir p.e. [H2; prop. 1.1]). En ce cas

$\bar{a}$ induit par restriction une application $a: (W_1, \partial W_1, w_1) \rightarrow (W_2, \partial W_2, w_2)$

qui satisfait à (i). (ii) est une conséquence du lemme de Ch III, 2.1.

$\bar{a}|_{\partial W_1}$ induit une application de degré $\deg(\bar{a}) = \deg(a)$, d'où (iii).

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{coker } i_{W_2}^1 & \xrightarrow{a^1} & \text{coker } i_a^1 & \xleftarrow{a_{\#}^1} & \text{coker } i_{W_1}^1 \\
 \downarrow \bar{\Delta}_{W_2} & & \downarrow \bar{\Delta}_a & & \downarrow \bar{\Delta}_{W_1} \\
 \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{W_2}; \partial W_2) i_{W_2}^1 & \xrightarrow{a^3} & \text{coker } \Delta^1(a; \partial W_1) i_a^1 & \xleftarrow{a_{\#}^3} & \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{W_1}; \partial W_1) i_{W_1}^1
 \end{array}$$

Dans la suite de la démonstration on suppose que $|\pi_1(W_1)|$ est pair, alors

$\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{W_2}; \partial W_2) i_{W_2}^1$, engendré par $1 \otimes \text{Hopf}(\sigma_2)$, est d'ordre 2.

Puisque $\deg(a)$ est impair on a les égalités suivantes dont la deuxième est expliquée à la fin de §3.1:

$$\begin{aligned}
 a^3(1 \otimes \text{Hopf}(\sigma_2)) &= a^3(\deg(a) \otimes \text{Hopf}(\sigma_2)) = \deg(a)^2 \otimes \text{Hopf}(\sigma_2) = \\
 &= 1 \otimes \text{Hopf}(a \sigma_1) = a_{\#}^3(1 \otimes \text{Hopf}(\sigma_1)).
 \end{aligned}$$

Puisque $\deg(a)^2$ est impair (par (ii)) l'élément $\xi = \deg(a)^2 \otimes \text{Hopf}(\sigma_2)$

dans $\text{coker } \Delta^1(a; \partial W_1) i_a^1$ s'envoie par la surjection induite de $1 \otimes v$

(voir la suite (S) de §1.2 et la proposition de §2.3) sur le générateur

de $\mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2(W_2)$. Par conséquent la composition $(a_{\#}^3)^{-1} a^3$ existe et

elle est l'isomorphisme unique.

Le choix des classes fondamentales de W_1 et de W_2 donnent des "trivialisations" des systèmes locaux suivants:

$$a^* H_3(\tilde{W}_2, \partial \tilde{W}_2) = \mathbb{Z}, \quad H_3(\tilde{W}_2, \partial \tilde{W}_2) = \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad H_3(\tilde{W}_1, \partial \tilde{W}_1) = \mathbb{Z}.$$

Ceci fait, l'homomorphisme de Bockstein (voir le lemme 1 de §3.1)

identifie a^1 à l'homomorphisme

$$a^2: H^2(W_2, \partial W_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(W_1, \partial W_1; \mathbb{Z}).$$

Par la dualité de Poincaré ceci correspond à l'homomorphisme

$$\deg(a) (a_1)^{-1}: H_1(W_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(W_1; \mathbb{Z}).$$

D'autre part, a induit la multiplication par $\deg(a)$

$$\deg(a): H_3(\tilde{W}_1, \partial \tilde{W}_1) = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} = a^* H_3(\tilde{W}_2, \partial \tilde{W}_2)$$

(par définition du degré) et donc l'homomorphisme de Bockstein identifie

$a_{\#}^1$ à l'homomorphisme

$$\deg(a): H^2(W_1, \partial W_1; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(W_1, \partial W_1; \mathbb{Z})$$

et par la dualité de Poincaré ceci correspond à la multiplication par

$\deg(a)$ dans $H_1(W_1; \mathbb{Z})$. L'entier $\deg(a)$ est inversible modulo $|\pi_1(W_1)|$

donc $a_{\#}^1$ est inversible.

En résumant p_{W_1} et p_{W_2} identifient $(a_{\#}^1)^{-1} a^1$ à $(a_1)^{-1}$. La proposition en suit.

Remarque: Soit W une variété compacte à groupe fondamentale fini et à bord non connexe, soit $W_1 \subset W$ une sous-variété compacte de codimension 0, telle que $\pi_1(W_1) = \pi_1(W)$, que ∂W_1 soit une sphère et donc que $W - \text{Int } W_1$ soit homotopiquement équivalent à une boule trouée, alors

(i) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{coker } i_{W_1}^1 & \xrightarrow{e_{W_1}^1} & \text{coker } i_W^1 \\ \downarrow \bar{\Delta}_{W_1} & & \downarrow \bar{\Delta}_W \\ \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{W_1}; \partial W_1) i_{W_1}^1 & \xrightarrow{e_{W_1}^3} & \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_W; \partial W) i_W^1 \end{array}$$

où $e_{W_1}^1$ et $e_{W_1}^3$ sont induits des homomorphismes d'extension,

(ii) $e_{W_1}^1$ est un isomorphisme,

(iii) Si $\{\sigma_i; i\}$ est un système de paramétrisations des composantes de ∂W , qui est une réunion de sphères, $\text{im } e^3_{W_1}$ est engendré par la classe de $\sum_i 1 \otimes \text{Hopf}(\sigma_i)$. C'est à dire, la rotation parallèle à ∂W_1 est homotope à la composition des rotations parallèles aux composantes de ∂W .

Proposition 3: Soit $q: (W, w) \rightarrow (W', w')$ un revêtement, W connexe (à bord non connexe) et W' comme dans la proposition 1. Soit $W_1 \subset W$ comme dans la remarque ci-dessus, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1(\pi_1(W', w'); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{tr}} & H_1(\pi_1(W, w); \mathbb{Z}) = H_1(\pi_1(W_1, w_1); \mathbb{Z}) \\ \downarrow \psi_{W'} & \searrow \text{mod } |\pi_1(W)| & \downarrow \psi_{W_1} \\ \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W')|) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W)|) = \mathbb{Z}/(2, |\pi_1(W_1)|) \end{array}$$

Démonstration: Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{coker } \iota^1_{W'} & \xrightarrow{q^1} & \text{coker } \iota^1_W & \xleftarrow{e^1_{W_1}} & \text{coker } \iota^1_{W_1} \\ \downarrow \bar{\Delta}_{W'} & & \downarrow \bar{\Delta}_W & & \downarrow \bar{\Delta}_{W_1} \\ \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{W'}, \partial W') \iota^1_{W'} & \xrightarrow{q^3} & \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_W, \partial W) \iota^1_W & \xleftarrow{e^3_{W_1}} & \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_{W_1}, \partial W_1) \iota^1_{W_1} \end{array}$$

$\text{im } q^3 = \text{im } e^3_{W_1}$ parce que les deux sont engendrés par la classe représentée par la classe correspondante à la composition des rotations parallèles aux composantes de ∂W . Cette classe survit dans la projection induite de $1 \otimes v$ de $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_W, \partial W) \iota^1_W$ sur $\mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2^W$ (voir le théorème de §2.3),

supposé que $|\pi_1 W|$ est pair. Par conséquent $(e^3_{W_1})^{-1} q^3$ est défini et envoie $1 \otimes \text{Hopf}(\sigma')$ sur $1 \otimes \text{Hopf}(\sigma_1)$, σ' et σ_1 étant des paramétrisations de $\partial W'$ et de ∂W_1 ; et $r_{W_1} (e^3_{W_1})^{-1} q^3 (r_{W'})^{-1}$ est la réduction modulo $|\pi_1 W_1|$. Par l'isomorphisme du lemme 1 de §3.1, q^1 et $e^1_{W_1}$ correspondent aux

homomorphismes

$$H^2(W', \partial W'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{q^2} H^2(W, \partial W; \mathbb{Z}) \xleftarrow{e^2_{W_1}} H^2(W_1, \partial W_1; \mathbb{Z})$$

Par la dualité de Poincaré ceci correspond à (voir Ch I, 3.2)

$$H_1(W'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{tr}} H_1(W; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\psi} H_1(W_1; \mathbb{Z}),$$

où le dernier homomorphisme est induit de l'injection $W_1 \subset W$. q.e.d.

Lemme 1: Soit G_0 un groupe fini. Si pour tout sous-groupe G de G_0 il est donné un homomorphisme

$$\psi_G: H_1(G; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/(2, |G|)$$

tel que (i) ψ_G est surjectif si G est cyclique,

que (ii) ψ_G est invariant par automorphismes de G

et que (iii) pour tout sous-groupe $G' \subset G$

$$\begin{array}{ccc} H_1(G; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{tr}} & H_1(G'; \mathbb{Z}) \\ \downarrow \psi_G & & \downarrow \psi_{G'} \\ \mathbb{Z}/(2, |G|) & \xrightarrow{\text{mod } |G'|} & \mathbb{Z}/(2, |G'|) \end{array}$$

commute, alors ψ_{G_0} est surjectif si le 2-Sylow-sous-groupe S_2 de G_0 est cyclique et qu'en plus, $\text{tr}: H_1(G_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2; \mathbb{Z})$ est surjectif; sinon

$$\psi_{G_0} = 0.$$

Démonstration: Si S_2 est cyclique et $\text{tr}: H_1(G_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2; \mathbb{Z})$ est surjectif, ψ_{G_0} est surjectif par (i) et (iii).

Si $\text{tr}: H_1(G_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2; \mathbb{Z})$ n'est pas surjectif (et S_2 est cyclique), son image est contenue dans $2 \cdot H_1(S_2; \mathbb{Z})$. La réduction $\text{mod } |S_2|$ étant un isomorphisme il en suit que $\psi_{G_0} = 0$. Si S_2 n'est pas cyclique il suffit de montrer que $\psi_{G_1} = 0$ pour un certain sous-groupe 2-primaire non trivial G_1 de G_0 . Deux cas se présentent: 1). il y a un seul élément $x \in S_2$ d'ordre 2 et 2). il y a deux éléments $x, y \in S_2$ d'ordre 2. Dans le cas 1) S_2 est un groupe quaternionique généralisé (voir [W; 5.3.2]) qui a une présentation comme suit :

$$(A, B; A^{2^{a-1}} = 1, B^2 = A^{2^{a-2}}, BAB^{-1} = A^{-1}) \quad (a \geq 3).$$

si S_2 est d'ordre 2^a . Par conséquent S_2 contient le groupe quaternionique Q_8 à 8 éléments engendré par $A^{2^{a-3}}$ et B . Dans le cas 2) S_2 contient un

is-groupe de présentation $(x, y; x^2 = y^2 = (xy)^k = 1)$, $(k \geq 2)$ et donc S_2 contient le 4-groupe de Klein $Z_2 \oplus Z_2 = V_4$ engendré par x et $(xy)^{\frac{1}{2}k}$. Il est facile de vérifier que les automorphismes de V_4 et Q_8 agissent transitivement sur les éléments non triviaux de leur premier groupe d'homologie qui est isomorphe à V_4 . Il en suit que $\psi_{Q_8} = 0$ (au cas 1)) et que $\psi_{V_4} = 0$ (au cas 2)). Ceci achève la démonstration.

Les groupes finis G_0 qui sont le groupe fondamental d'une 3-variété compacte ont la propriété suivante (voir p.e. [M]): la cohomologie $H^*(G_0; \mathbb{Z})$ est périodique (à période 4) et (donc) tout p -Sylow-sous-groupe est cyclique sauf éventuellement pour $p = 2$ où il peut être quaternionique généralisé. Si le p -Sylow-sous-groupe est cyclique pour tout p le théorème de Burnside (voir p.e. [W; 5.4.1]) affirme que G_0 a une présentation comme suit:

$$(A, B; A^m = B^n = 1, BAB^{-1} = A^r)$$

où $|G_0| = m.n$, $\text{pgcd}((r-1)n, m) = 1$ et $r^n \equiv 1 \pmod{m}$. Remarquons que m est impair: sinon $(r-1)$ est impair, donc r est pair et $r^n \not\equiv 1 \pmod{m}$. Par conséquent le 2-Sylow-sous-groupe est engendré par une puissance de B . Il est facile de voir que $H_1(G_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$, engendré par B .

Lemme 2: Soit G_0 le groupe fondamental d'une 3-variété compacte tel que le 2-Sylow-sousgroupe $S_2 \subset G_0$ soit cyclique, alors

$\text{tr}: H_1(G_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2; \mathbb{Z})$ est surjectif.

Pour prouver ceci on remarque que $i_*: H_1(S_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(G_0; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme sur la partie 2-primaire de $H_1(G_0; \mathbb{Z})$ et que $i_* \text{tr}$ est la multiplication par l'indice $[G_0: S_2]$ qui est impair, donc $\text{im } i_* \text{tr} = \text{im } i_*$ et tr est surjectif.

Comme conséquence immédiate du théorème 1 de §3.2, les propositions 1, 2 et 3 et les lemmes 1 et 2 on a

Théorème (supplément du théorème 1 de §3.2): Soit X une 3-variété compacte à groupe fondamental fini et à bord connexe. Alors

coker $\Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) = 0$ si le 2-Sylow-sous-groupe de $\pi_1(X)$ est cyclique et
coker $\Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) = \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_X; \partial X) \cdot \frac{1}{X} \cong \mathbb{Z}_2$, sinon, et il est engendré
par $1 \otimes \text{Hopf}(\sigma)$ où σ est une paramétrisation du bord de X. Cette classe
correspond à la rotation parallèle au bord de X.

§ 4 -

Résumé.

4.1 -

Le groupe de deuxième obstructions.

Soit $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application de 3-variétés compactes ($m \in M$, $f(m) = n$) satisfaisant à l'hypothèse $F(f)$ que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux munis de l'homomorphisme d'orientation.

Soient $\{\langle \beta_j, \tau_j \rangle; j\}$ et $\{\langle \gamma_i, \sigma_i \rangle; i\}$ des systèmes d'Epstein paramétrisés de M et de N (voir Ch II, 1). On suppose que $\{\sigma_i(S^2); i\}$ est projectivement minimal (voir Ch II, 3). Posons $\mathcal{W}_0$ l'ensemble des composantes W de $N - \bigcup_i \sigma_i(S^2)$ telles que $\bar{W} - W \subset \bigcup_i \sigma_i(S^2)$, que $\pi_1(W)$ soit fini et que le 2-Sylow-sous-groupe de $\pi_1(W)$ soit cyclique.

En utilisant l'identification de §1

$$\phi_f: H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N)) \cong \bigoplus_{\pi_1(N, n)} \pi_3(N, n)$$

on peut réunir les résultats de la proposition de §2.3, de §3.1, du théorème 1 de §3.2 et du théorème de §3.3 dans

Théorème: Sous les hypothèses ci-dessus le groupe de deuxièmes obstructions

$$\text{coker } \Delta^1(f; \partial M): H^1(M, \partial M; f^* \pi_2(N)) \rightarrow H^3(M, \partial M; f^* \pi_3(N))$$

est le quotient de $\sum_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n)$ par le sous-groupe engendré par les éléments suivants:

$$1 \otimes [f\beta_j, \tau_j, x], \text{ si } \tau_j(S^2) \cong S^2 \text{ et } x \in \pi_2(N,n),$$

$$1 \otimes [x + f\beta_j, \tau_j, f(\beta_j, \alpha_j, \beta_j^{-1}) \cdot x], \text{ si } \tau_j(S^2) \cong \mathbb{P}^2 \text{ et } x \in \pi_2(N,n), \text{ où } \alpha_j \text{ désigne}$$

le lacet non trivial de } \tau_j(S^2) \text{ et}

$$\deg(f) \otimes \sum_{\sigma_1(S^2) \subset \partial \bar{W}} 1 \otimes \text{Hopf}(\gamma_{i\sigma_1}) \text{ , si } W \in \mathcal{M}.$$

A l'aide de la remarque 2 de Ch II, 1 on en déduit que l'image de $\Delta^1(f; \partial M)$ est engendré à fortiori par les éléments sous 1, 2 et 3:

$$1. 1 \otimes [f\tau, x] \text{ , pour tout plongement } \tau: (S^2, y_0) \rightarrow (M, m) \text{ et } x \in \pi_2(N,n).$$

$$2. 1 \otimes [x + f\tau_p, f(t| \mathbb{P}^1) \cdot x] \text{ , pour tout plongement } t: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M, m) \text{ à fibré normal trivial et } x \in \pi_2(N,n).$$

$$3. \deg(f) \otimes \text{Hopf}(\sigma) \text{ , pour tout plongement } \sigma: (S^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n) \text{ tel que l'on puisse écrire } N = N_1 \bigcup_{\sigma(S^2)} N_2 \text{ de sorte que } N_1 \cap N_2 = \sigma(S^2) \text{ et que } D^3 \bigcup_{\sigma} N_1 \text{ soit une variété fermée, soit homotopiquement équivalente à } \mathbb{P}^2 \times S^1, \text{ soit à groupe fondamental fini dont le 2-Sylow-sous-groupe est cyclique.}$$

Les conséquences 3 et 4 de la proposition de §2.3 sont les suivantes:

$$4. 2 \otimes [f\tau_p, x] \in \text{im } \Delta^1(f; \partial M) \text{ dans la situation 2 ci-dessus et}$$

$$5. 1 \otimes [f\tau_p, x] \in \text{im } \Delta^1(f; \partial M) \text{ si en plus } f(t| \mathbb{P}^1) \cdot x = -x, \text{ en particulier}$$

$$1 \otimes [f\tau_p, f\tau_p] = 1 \otimes 2f_{\#} \text{Hopf}(\tau_p) \in \text{im } \Delta^1(f; \partial M).$$

Dans la remarque de §2.3 on a déduit des relations 1, 2, 4 et 5 que $\text{coker } \Delta^1(f; \partial M)$ est un $\mathbb{Z}/(2 \deg(f))$ -module.

Pour discerner le jeu du degré de f on fera l'application suivante du théorème ci-dessus:

Exemple: Supposé que M et N soient des variétés fermées, il y a une suite exacte:

$$\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N) \xrightarrow{f^*} \text{coker } \Delta^1(f) \rightarrow \mathbb{Z}/(\deg(f)) \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n) \rightarrow 0$$

Rappelons que par l'identification faite ci-dessus, f^* est l'homomorphisme induit par la multiplication par $\deg(f)$ dans $\mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n)$. Il

suffit donc de montrer que $\text{im } \Delta^1(f) \subset \deg(f) \cdot \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n)$. D'après

Ch III, 2.2 il y a un isomorphisme $\phi_f: \pi_2(M,m) \rightarrow \pi_2(N,n)$ tel que

$f_{\#} = \deg(f) \cdot \phi_f$. Par conséquent

$$1 \otimes [f_{\#}(y), x] = 1 \otimes [\deg(f) \phi_f(y), x] = \deg(f) \cdot 1 \otimes [\phi_f(y), x]$$

pour $y \in \pi_2(M,m)$ et $x \in \pi_2(N,n)$ et il suffit de montrer encore que

$$1 \otimes [x, \lambda x] \in \deg(f) \cdot \mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda_{N,n}, \text{ i.e. } \lambda \in \pi_1(N,n)$$

et λ est le lacet non trivial d'un plan projectif plongé à fibré normal

trivial (Ch II, 3). Puisque $1 \otimes [x, \lambda x]$ est d'ordre 2 dans $\mathbb{Z} \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_3(N,n)$

il suffit que $\deg(f)$ soit impair (pourvu que $\Lambda_{N,n} \neq \emptyset$), mais ceci suit du lemme 2° et son complément de Ch III, 2.1.

4.2 -

Le cas d'équivalences d'homotopie.

Dans la situation du début de §4.1 on pose R_0 le sous-groupe de

$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2^{\text{sph}}(N,n)$ engendré par les éléments

$$\{ \sigma_i(S^2) \subset \Sigma \otimes_{\partial W} 1 \otimes \gamma_i \sigma_i ; W \in \mathcal{W}_0 \}.$$

Alors le théorème de §4.1 (et la proposition de §2.3) dit que

$$\text{coker } \Delta^1(f; \partial M) = \text{coker}(\Delta^1(f; \partial M) \circ \iota_f^1) / f^* H(R_0)$$

où $H: \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2^{\text{sph}}(N,n) \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \circ \iota_N^1$ est défini dans le

lemme 2 de §2.4. Le théorème de §2.3 donne lieu au théorème suivant

Théorème: Si f est une équivalence d'homotopie en tant qu'application

$f: M \rightarrow N$, on a la suite exacte de $\mathbb{Z}_2$ -modules:

$$0 \rightarrow W(\Lambda_{M,m}) \xrightarrow{\bar{c}} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M) \xrightarrow{\overline{10v}} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)/R_0 \rightarrow 0$$

(où $\bar{c}$ et $\overline{10v}$ sont induits de c et $10v$).

Démonstration: Si $R_0 \neq 0$, le degré de f est impair par le lemme de

Ch III, 2.1. Par conséquent on a l'égalité:

$$\overline{10v} f^* H(R_0) = 10v \deg(f) H(R_0) = \deg(f) R_0 = R_0. \quad \text{q.e.d.}$$

Dans la suite on suppose que f est une équivalence d'homotopie de paires (rel les bords).

Remarque 1°: Une section de $\overline{10v}$ au dessus de $R^{\text{sph}}(N) = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2^{\text{sph}}(N,n)/R_0$:

Du lemme 1 de §2.4 on déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow R^{\text{sph}}(N) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)/R_0 \xrightarrow{101} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \mathbb{Z}[\Lambda_{N,n}] \rightarrow 0$$

où 1 est la self-intersection homotopique (Ch II, 4), et suivant le lemme 2

de §2.4 il y a un (unique) homomorphisme

$$H^{\text{sph}}: R^{\text{sph}}(N) \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N)$$

tel que pour un plongement $\sigma: (S^2, y_0) \rightarrow (N, n)$, $H^{\text{sph}}(10\sigma)$ soit la classe de $10\text{Hopf}(\sigma)$ dans $\text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N)$. Cette classe correspond à la rotation parallèle à la sphère $\sigma(S^2)$. H^{sph} définit une section

$$f^* H^{\text{sph}}: R^{\text{sph}}(N) \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) \xrightarrow{f^*} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M)$$

de $\overline{10v}$ au dessus de $R^{\text{sph}}(N)$, i.e. $\overline{10v} f^* H^{\text{sph}} = \text{Id}_{R^{\text{sph}}(N)}$.

Remarque 2°: Une section de $\overline{10v}$ modulo $R^{\text{sph}}(N)$ et $f^* H^{\text{sph}}(R^{\text{sph}}(N))$: On

pose

$$H^{\text{proj}}: \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \mathbb{Z}[\Lambda_{N,n}] \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) / \text{im } H^{\text{sph}}$$

l'homomorphisme qui associe à un générateur 10λ ($\lambda \in \Lambda_{N,n}$) la classe de

$1 \otimes \text{Hopf}(tp_2)$ où $t: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ est un plongement tel que $t|(\mathbb{P}^1, \bar{y}_0)$ représente λ . Elle ne dépend pas du choix de t par les propriétés du foncteur Hopf et par le lemme 1 de Ch II, 3. Il est facile de voir que H^{proj} est bien défini et que $(101)(\overline{10y}) H^{\text{proj}}$ est l'identité. On a donc la suite exacte scindée suivante:

$$0 \rightarrow W(\Lambda_{M,m}) \xrightarrow{\bar{c}} \text{coker } \Delta^1(f; \partial M) / f^* H^{\text{sph}}(R^{\text{sph}}(N)) \xrightleftharpoons[f^* H^{\text{proj}}]{} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \mathbb{Z}[\Lambda_{N,n}] \rightarrow 0$$

Remarque 3°: Une présentation de $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)/R_0$: Soient $\{\langle \gamma_i, \sigma_i \rangle; i\}$

un système d'Epstein de N et $\mathcal{M}_0$ comme au début de §4.1. Soit

$$\Delta_0: \bigoplus_{W \in \mathcal{M}_0} \mathbb{Z}_2 \cdot \underline{W} \rightarrow \bigoplus_i \mathbb{Z}_2 \cdot \underline{\sigma_i(S^2)}$$

l'homomorphisme défini par $\Delta_0(\underline{W}) = \frac{\sum \sigma_i(S^2)}{\sigma_i(S^2) \subset \partial \bar{W}}$, alors

$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N,n)} \pi_2(N,n)/R_0 \cong \text{coker } \Delta_0$$

(cf. la démonstration du lemme 1 de Ch IV, 1.1).

4.3 -

Les rotations parallèles aux sphères - 2.

Soit S une sphère plongée dans N et soit ρ la rotation parallèle à S , alors

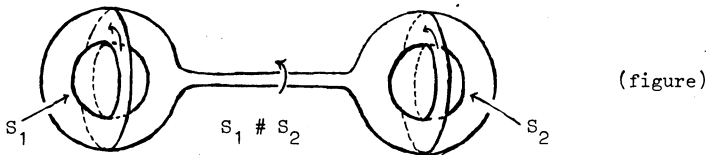
Théorème: 1. Si S ne sépare pas N , ρ n'est pas homotope à l'identité (rel le bord).

Si S sépare N , soient N_1 et N_2 des sous-variétés de N telles que $N_1 \cup N_2 = N$ et que $N_1 \cap N_2 = S$ alors

2. ρ est homotope à l'identité si et seulement si N_1 ou N_2 est la somme connexe d'une boule et de variétés homotopiquement équivalentes à un S^2 -fibré sur S^1 ou à $\mathbb{P}^2 \times S^1$ et de variétés fermées dont le groupe fondamental est fini et possède un 2-Sylow-sous-groupe cyclique.

Le théorème 1 est dû à Pontryagin [P], voir aussi [L] pour une démonstration savoureuse. Dans [H1] on trouve un critère (plus faible) pour que ρ soit non homotope à l'identité.

Remarque: La composition de rotations parallèles aux sphères d'un système de sphères disjointes est isotope à la rotation parallèle à la sphère qu'on obtient en faisant la somme connexe plongée des sphères du système (par le théorème de §2.4, voir aussi la figure: on peut annuler la rotation parallèle à $S_1 \# S_2$ par des rotations (dans le "même" sens) parallèles à S_1 et à S_2).



Démonstration des théorèmes: On peut étendre S à un système d'Epstein de N , $\mathcal{M}$, il y est associé $\mathcal{M}_0$ et Δ_0 comme au début de §4.1 et comme dans la remarque 3° de §4.2. Suivant la proposition de Ch III, 1, ρ est homotope à l'identité si et seulement si elle l'est rel le 0-squelette relatif, donc (voir la remarque 1° et 3° de §4.2) si $\underline{S} \in \text{im} \Delta_0$. Supposons que $\underline{S} = \Delta_0 \sum_{W \in \mathcal{M}_0} n_W \bar{W}$, alors nécessairement $S = \partial \left(\bigcup_{n_W \neq 0} \bar{W} \right)$ (cf. le lemme 1 de Ch IV, 1.1) donc S est cobordant à zéro (ce qui montre 1) et soit pour $i = 1$, soit pour $i = 2$, $N_i = \bigcup_{n_W \neq 0} \bar{W}$, c'est à dire que N_i est la réunion de membres de $\mathcal{M}_0$. Q.e.d.

4.4 -

Evaluation.

Soit N une variété compacte de dimension 3, munie d'une décomposition cellulaire. $\mathcal{H}^1(N, n)$ désigne l'espace des équivalences d'homotopie

$g: (N, \partial N) \rightarrow (N, \partial N)$ telles que $g(n) = n$, que g coïncide avec l'identité sur ∂N , que g soit homotope rel $\partial N \cup \{n\}$ à une application g' telle que g' coïncide avec l'identité sur le 1-squelette (si $\partial N = \emptyset$, ceci revient à dire que $g_{\#} = \text{Id}: \pi_1(N, n) \rightarrow \pi_1(N, n)$ (Ch I, 4.1(i)), et que $\deg(g) = +1$.

Soient g et g' dans $\mathcal{H}^1(N, n)$ comme ci-dessus. $d^2(\text{Id}, g') \in H^2(N, \partial N; \pi_2(N))$ ne dépend que de g . Puisque $\deg(g') = +1 = \deg(\text{Id})$, $d^2(\text{Id}, g') \in \text{im } {}^1\text{Id}$ (voir Ch IV) et il y a une composition ρ , de rotations parallèles à un système de plans projectifs à fibré normal trivial dans N telle que $d^2(\text{Id}, \rho) = d^2(\text{Id}, g')$. Selon le théorème 2 de §3.2, ρ est bien déterminée à une composition de rotations parallèles à des sphères près. Alors $d^2(\text{Id}, g'\rho^{-1}) = d^2(\text{Id}, \rho^{-1}) + d^2(\rho^{-1}, g'\rho^{-1}) = -(\rho^{-1})^* d^2(\text{Id}, \rho) + (\rho^{-1})^*(\text{Id}, g') = 0$

et il y a $g'' \in \mathcal{H}^1(N, n)$, coïncidant avec l'identité sur le 2-squelette et homotope à $g'\rho^{-1}$ rel $\partial N \cup \{n\}$. On pose

$$T(g) \in \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) / H^{\text{sph}}(R^{\text{sph}}(N))$$

la classe de $d^3(\text{Id}, g'')$.

Théorème: Sous l'hypothèse $SE(N)$ (i.e. le revêtement universel de N n'est pas une variété fermée) ceci définit un homomorphisme surjectif

$$T: \pi_0(\mathcal{H}^1(N, n), \text{Id}) \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N) / H^{\text{sph}}(R^{\text{sph}}(N)).$$

Démonstration: L'hypothèse $SE(N)$ implique que la réunion du 1-squelette de N et d'un système d'Epstein de N engendre $\pi_3(N)$ (voir §1). Par conséquent, à homotopie rel le 2-squelette près, la rotation parallèle à un plan projectif (ou une sphère) commute avec toute application coïncidant avec l'identité sur le 2-squelette. Si g_i, g_i', ρ_i et g_i'' sont comme ci-dessus ($i = 1, 2$) on a

$$T(g_1 g_2) = d^3(\text{Id}, g_1'' g_2'') = d^3(\text{Id}, g_2'') + g_2''^* d^3(\text{Id}, g_1'') = T(g_2) + T(g_1)$$

puisque $\deg(g_2'') = 1$. Ceci montre que T est bien défini et que T est un homomorphisme. La surjectivité de T est évident (réalisation des éléments de $H^3(N, \partial N; \pi_3(N))$ comme des premières obstructions).

Le noyau de T est engendré par les rotations parallèles à des sphères et des plans projectifs à fibré normal trivial et il est isomorphe à

$\mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2(N)/R_0$. En effet, utilisant la suite exacte de la remarque 1° de §4.2, la suivante (dont la surjection provient du théorème de Ch IV, 1.2)

$$0 \rightarrow R^{\text{sph}}(N) \rightarrow \ker T \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda_{N,n}] \rightarrow 0$$

et le théorème 2 de §3.2, il est un exercice simple de montrer que l'on définit un isomorphisme

$$\mathbb{Z}_2 \otimes \pi_2(N)/R_0 \xrightarrow{r} \ker T$$

en posant (i) $r(10\sigma)$ est la rotation parallèle à $\sigma(S^2)$ si σ est un plongement et (ii) $r(10sp_2)$ est la rotation parallèle à $s(P^2)$ si $s: P^2 \rightarrow N$ est un plongement à fibré normal trivial.

La remarque 2° de §4.2 donne lieu à la définition suivante:

Définition: Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\pi_1(N,n), w_N)$ la somme directe

$$\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}[\Lambda_{N,n}] \oplus w(\Lambda_{N,n})$$

i.e. le $\mathbb{Z}_2$ -module engendré par les éléments de

$$\Lambda_{N,n} = \{\lambda \in \pi_1(N,n); \lambda^2 = e, w_N(\lambda) = -1\}$$

et par les paires $\{\langle \lambda, \mu \rangle; \lambda, \mu \in \Lambda_{N,n}\}$ ayant comme relations:

$$(i) \quad \langle \lambda, \mu \rangle = \langle \mu, \lambda \rangle, \quad \langle \lambda, \lambda \rangle = 0,$$

$$(ii) \quad g\lambda g^{-1} = \lambda \quad \text{et} \quad \langle g\lambda g^{-1}, g\mu g^{-1} \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle \quad \text{pour tout } g \in \pi_1(N,n),$$

$$(iii) \quad \langle \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu \lambda \mu \rangle.$$

Soit $w: \mathcal{T} \rightarrow \text{coker } \Delta^1(\text{Id}_N; \partial N)/H^{\text{sph}}(R^{\text{sph}}(N))$ l'homomorphisme tel que pour

λ (resp. $\langle \lambda, \mu \rangle$), $w(\lambda)$ (resp. $w(\langle \lambda, \mu \rangle)$) est la classe de $1 \otimes \text{Hopf}(t_{\lambda} p_2)$

(resp. de $1 \otimes [t_\lambda p_2, t_\mu p_2]$), où t_λ et t_μ désignent des plongements $t_\lambda, t_\mu: (\mathbb{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (N, n)$ tels que $[t_\lambda | \mathbb{P}^1] = \lambda$ et que $[t_\mu | \mathbb{P}^1] = \mu$. w est un isomorphisme d'après la remarque 2° de §4.2 et les définitions.

Le théorème ci-dessus s'énonce alors comme suit:

Théorème: La suite suivante, de $\mathbb{Z}_2$ -modules, est exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \pi_2(N, n) / R_0 \xrightarrow{r} \pi_0(\mathcal{K}^1(N, n), \text{Id}) \xrightarrow{w^{-1}T} \mathcal{T}(\pi_1(N, n), w_N) \rightarrow 0$$

Rappelons que l'image de r est engendrée par les homéomorphismes de rotation parallèle à une sphère ou un plan projectif à fibré normal trivial et que $\mathcal{T} = 0$ si N est orientable.

4.5 -

Conjectures.

Ayant écarté dans §4.4 toutes les complications dues à la torsion de Whitehead (cf. la proposition 2 de [H3; II, §3.2]) et à la conjecture de Poincaré on peut conjecturer:

Conjecture I: Soit $g \in \mathcal{K}^1(N, n)$, alors g est homotope à un homéomorphisme rel $\partial M \cup \{m\}$ si et seulement si $w^{-1}T(g) = 0$.

Dite d'une autre façon:

Conjecture I': Si $g \in \mathcal{K}^1(N, n)$ et g est un homéomorphisme, alors g est homotope, à une composition de rotations parallèles à un système de plans projectifs et de 2-sphères (disjoints).

Un autre problème qui n'a pas été abordé ici est celui de la fonctorialité de la self-intersection homotopique de Ch II:

Conjecture II: La suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_2^{\text{sph}} \rightarrow \pi_2 \rightarrow \overset{\sim}{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}[\Lambda] \rightarrow 0$$

est fonctoriel par rapport aux équivalences d'homotopie.

Pour ceci il suffit

Conjecture III : Soit $f: M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie.

Si $\sigma: S^2 \rightarrow M$ est un plongement, alors $f\sigma$ est homotope à un plongement.

Si $s: \mathbb{P}^2 \rightarrow M$ est un plongement à fibré normal trivial, alors fs est homotope à un plongement.

Evidence pour I: a) La conjecture est vraie si N est orientable (voir §4.4) ou si $M = \mathbb{P}^2 \times I$. b) A l'aide de [H3] certains éléments de base $\langle \lambda, \mu \rangle$ de $\mathcal{T}$ peuvent être interprétés comme une obstruction de scindement le long d'une sphère "caractéristique" dans le revêtement associé au sous-groupe $(\lambda, \mu) \overset{\sim}{=} \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, d'un relèvement d'un représentant de $\langle \lambda, \mu \rangle$.

Evidence pour III: Si $\sigma: S^2 \rightarrow M$ est un plongement et M et N sont fermées, alors $f\sigma$ est homotope à un plongement ([L;p.110]).

BIBLIOGRAPHIE

- [E] EPSTEIN (D. B. A.). - Projective planes in 3-manifolds, *Proc. London math. Soc.*, t. 11, 1961, p. 469-484.
- [H1] HENDRIKS (H.). - Applications de la théorie d'obstruction en dimension 3, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, 1973, Série A, p. 1101-1104.
- [H2] HENDRIKS (H.), LAUDENBACH (F.). - Scindement d'une équivalence d'homotopie en dimension 3, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, Série 4, t. 7, 1974, p. 203-218.
- [H3] HENDRIKS (H.). - Une obstruction pour scinder une équivalence d'homotopie en dimension 3, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* (à paraître).
- [H4] HENDRIKS (H.). - Obstruction theory in 3-dimensional topology : an extension. *Report Mathematisch Instituut, Nijmegen*.
- [H5] HILTON (P. J.). - On the homotopy groups of the union of spheres, *J. London math. Soc.*, t. 30, 1955, p. 154-172.
- [H6] HOPF (H.). - Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Annalen*, t. 104, 1931, p. 637-665.
- [H7] HU (S.). - Homotopy theory. - New York, Academic Press, 1959 (*Pure and applied Mathematics*, Academic Press, 8).
- [L] LAUDENBACH (F.). - Topologie de la dimension trois : homotopie et isotopie, *Astérisque* 12, 1974, 152 p.
- [M] MILNOR (J.). - Groups which act on S^n without fixed points, *Amer. J. Math.*, t. 79, 1957, p. 623-630.
- [O] OLUM (P.). - Fibre bundles and obstructions : The theory of obstructions, "Proceedings of the international congress of mathematicians [1950. Cambridge]", p. 363-370. - Providence, American mathematical Society, 1952.
- [P] PONTRJAGIN (L.). - A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere, *Mat. Sbornik (Recueil math.)*, N. S., t. 9(51), 1941, p. 331-363.
- [R] ROW (W.). - Irreducible 3-manifolds whose orientable covers are not prime, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 34, 1972, p. 541-545.
- [S1] SERRE (J.-P.). - Groupes d'homotopie des bouquets de sphères, *Séminaire Gortan : Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, 7e année, 1954/55, n° 20, 7 p.
- [S2] SPANIER (E. H.). - Algebraic topology. - New York, Mc Graw-Hill Company, 1966 (*Mc Graw-Hill Series in higher Mathematics*).
- [S3] SPECKER (E.). - Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften drei-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helvet.*, t. 23, 1949, p. 303-333.
- [S4] STALLINGS (J.). - Group theory and three-dimensional manifolds. - New Heaven, Yale University Press, 1971 (*Yale mathematical Monographs*, 4).
- [S5] SWARUP (G. A.). - On embedded spheres in 3-manifolds, *Math. Annalen*, t. 203, 1973, p. 89-102.
- [S6] SWARUP (G. A.). - Projective planes in irreducible 3-manifolds, *Math. Z.*, t. 132, 1973, p. 305-317.
- [S7] SWARUP (G. A.). - On a theorem of C. B. Thomas, *J. London math. Soc.*, t. 8, 1974, p. 13-21.
- [T] THOMAS (C. B.). - The oriented homotopy type of compact 3-manifolds, *Proc.*

London math. Soc., t. 19, 1969, p. 31-44.

[W] WOLF (J. A.). - Spaces of constant curvature. - New York, McGraw-Hill Company,
1967 (McGraw-Hill Series in higher Mathematics).

Harrie Hendriks
Mathematisch Instituut
Toernooiveld
NIJMEGEN (Pays-Bas)
