GUY MÉTIVIER

Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers

Mémoires de la S. M. F., tome 51-52 (1977), p. 125-219
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__51-52__125_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 51-52, 1977, p. 125-219.

VALEURS PROPRES DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES IRREGULIERS

Guy MÉTIVIER
Département de Mathématique, Université de Nice

Sommaire

I - INTRODUCTION

Ce travail expose une méthode "directe" d'étude du comportement asymptotique des valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers ; l'irrégularité signifie ici : irrégularité de la frontière de l'ouvert sur lequel est défini le problème, irrégularité des coefficients de l'opérateur différentiel considéré et enfin, éventuellement, irrégularité des fonctions du domaine de l'opérateur (et des fonctions propres).

Pour préciser un peu les résultats, prenons quelques notations : soit Ω un ouvert, a priori quelconque, de $\mathbb{R}^n$; soit $(A,D(A))$ une réalisation minorée autoadjointe dans $L^2(\Omega)$ d'un opérateur

$$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

Nous préciserons ultérieurement nos hypothèses sur l'irrégularité des a_α ainsi que la manière dont nous définissons A ; notons cependant que pour $|\alpha| = 2m$ les a_α sont des fonctions continues. $\mathcal{A}$ est supposé formellement autoadjoint et elliptique et :

$$\forall (x,\xi) \in \Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0) \;:\; a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha > 0$$

Notons en outre μ la mesure sur Ω de densité :

$$\mu'(x) = (2\pi)^{-n} \int_{a(x,\xi)<1} d\xi$$

Si l'injection de D(A) dans $L^2(\Omega)$ est compacte, le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres réelles tendant vers $+\infty$. Notant $N(\lambda)$ le nombre de ces valeurs propres (répétées selon leur multiplicité) inférieures à λ, nous nous intéressons au comportement lorsque $\lambda\to+\infty$ de $N(\lambda)$.

Le premier problème est de donner un équivalent asymptotique de $N(\lambda)$; il est désormais classique ([32] , [11] , [17] , [2]...) que si $\mathcal{A}$ est uniformément elliptique, on a, sous certaines hypothèses de régularité :

(1.1) $$N(\lambda) \sim \lambda^{n/2m} \,.\, \mu(\Omega) \qquad (\text{quand } \lambda\to+\infty)$$

On renvoie aussi à BEALS ([5],[6]) pour l'étude d'opérateurs à coefficients peu réguliers, et à [16] et [24] pour l'étude de problèmes sur des ouverts irréguliers. (Voir aussi [9]).

Dans un premier temps (cf. aussi [23]) nous obtenons (théorème 5.1) une décomposition du type :

$$N(\lambda) \sim \mu(\Omega)\, \lambda^{n/2m} + B(\lambda) \tag{1.2}$$

(lire $N(\lambda)$ est équivalent au plus grand des deux termes), où l'on considère $\mu(\Omega)\, \lambda^{n/2m}$ comme un terme dû à l'intérieur et $B(\lambda)$ comme un terme dû au bord.

Ensuite nous utilisons des majorations de n - diamètres (paragraphe III) (voir à ce sujet [8] , [14]), pour établir que dans certains cas $B(\lambda)$ est négligeable devant $\lambda^{n/2m}$ et étendre à ces cas la formule (1.1). Citons par exemple (Théorème 5.12) le cas d'un problème de Dirichlet pour un opérateur variationnel uniformément elliptique sur n'importe quel ouvert borné, aussi irrégulier soit-il, ou le cas du problèmes de Neumann pour Δ sur une "pointe effilée".
Citons aussi l'exemple (non classique) des opérateurs du type $-\Delta + (\delta(x))^{-\alpha}$ ($\alpha \geq o$) où $\delta(x)$ est la distance de $x\in\Omega$ à $\partial\Omega$. On établit aussi la formule (1.1) (Théorème 5.15) pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, introduite en [4]. Pour une étude plus systématique des opérateurs elliptiques dégénérés voir [25], [27], [28], [29].

Tous ces résultats sont généralisables aux cas de systèmes elliptiques. Notons aussi que pour ce qui concerne les systèmes les idées précédentes ont été utilisées en [26] pour étudier les valeurs propres de systèmes (non elliptiques) généralisant le système de Stokes.

Remarquons que la formule (1.2) fournit une première classification des problèmes elliptiques à l'intérieur :

a) Si $\mu(\Omega) = +\infty$ alors $\lambda^{n/2m} = o(N(\lambda))$ et en fait $N(\lambda) \sim B(\lambda)$, ce qu'on peut traduire en disant que le comportement asymptotique des valeurs propres ne dépend que de $\partial\Omega$ et de l'opérateur sur des voisinages de $\partial\Omega$; c'est le cas pour les opérateurs elliptiques dégénérant suffisamment sur $\partial\Omega$.

b) Si $\mu(\Omega) < +\infty$, il faut comparer $B(\lambda)$ et $\lambda^{n/2m}$. On peut dire que dans les "bons cas" (voir § V.4 et § V.5) $B(\lambda) = o(\lambda^{n/2m})$, mais cela dépend de la régularité de $\partial\Omega$, des conditions aux limites et aussi de la régularité des coefficients $a_{\alpha,\beta}$ pour $|\alpha|=|\beta|=m$. Au paragraphe VII on étudie précisément (et de manière directe) des exemples d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $\mu(\Omega)<+\infty$ et où $B(\lambda) \sim \lambda^{\alpha}$ α pouvant être pris quelconque supérieur ou égal à $n/2m$; bien sûr $\partial\Omega$ est alors très irrégulier.

Lorsque la formule (1.1) est vraie, alors se pose le problème d'estimer la différence $R(\lambda) = N(\lambda) - \mu(\Omega)\,\lambda^{n/2m}$; nous supposons pour cette étude que $\mathcal{A}$ est uniformément elliptique. Dans le cas des opérateurs à coefficients C^{∞} AGMON et KANNAI ([3]) et HORMANDER ([18]) ont obtenu l'estimation:

(1.3) $$R(\lambda) = O(\lambda^{(n-\theta)/2m})$$

avec $\theta < 1/2$ (et $\theta < 1$ si la partie principale de $\mathcal{A}$ est à coefficients constants). Voir aussi ([15]).

Dans [19] HORMANDER a démontré que, dans le cas où Ω n'est plus un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais une variété compacte sans bord, on a l'estimation optimale (1.3) avec $\theta = 1$.

Utilisant les résultats de ([19]) BRUNNING ([12]) a prouvé que, toujours dans le cas des opérateurs à coefficients C^{∞} :

(1.4) $$R(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2m}\,\mathrm{Log}\,\lambda).$$

Notons que pour tous ces résultats cités, les auteurs font des hypothèses explicites ou implicites de régularité sur Ω : on entend par hypothèse implicite de régularité sur Ω une hypothèse du type $D(A) \subset H^{2m}(\Omega)$ ou encore $D(A^k) \subset H^{2km}(\Omega)$ pour k entier ≥ 1.

Dans le cas où les coefficients de $\mathcal{A}$ sont irréguliers BEALS ([7]) et MARUO et TANABE ([22]) ont obtenu une estimation (1.3) avec $\theta < \frac{s}{s+3}$ si les coefficients a_{α}, pour $|\alpha| = 2m$, sont höldériens d'exposant $s \in]0,1]$ sur $\overline{\Omega}$.

Nous démontrons ici une estimation (1.3) avec $\theta = \frac{s}{s+1}$ si les coefficients a_{α} pour $|\alpha| = 2m$ sont hölderiens d'exposant s (l'étude pour $s=1$ a déjà été faite dans [24]) et nous obtenons (1.4) dans le cas particulier où ces mêmes coefficients sont constants. Cette dernière estimation est à rapprocher de celle obtenue en [13] pour le Laplacien. Là encore, nos hypothèses de régularité sur Ω sont très faibles.

La méthode employée ici s'inspire de COURANT-HILBERT ([13]) et fait une utilisation systématique de la formule du mini-max pour les valeurs propres, ainsi que de la relation valeur propre - n-ième diamètre ([10] , [13], [21], [31]...).

Nous définissons par la suite nos opérateurs par la méthode variationnelle : nous nous donnerons un espace de Hilbert V contenat $\mathcal{D}(\Omega)$ et s'injectant avec injection compacte dans $L^2(\Omega)$; la réalisation (A, D(A)) sera associée par la méthode variationnelle à une forme sesquilinéaire hermitienne continue et coercive sur V, telle que :

$$\forall u \in V, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad a(u,\varphi) = \langle \mathcal{A}u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$$

Cette méthode nous permet de définir des "problèmes aux limites" dans le cas d'ouverts très irréguliers ; d'autre part ce n'est pas vraiment une restriction que de se limiter à de tels problèmes variationnels : si l'opérateur (A,D(A)) est donné, posant V = D(A) et $a(u,v) = (Au,Av)_{L^2(\Omega)}$, le problème variationnel (V, $L^2(\Omega)$, a) définit l'opérateur (A^2, D(A^2)) (A est supposé autoadjoint positif), et pour notre problème de valeurs propres, il est équivalent d'étudier A^2 ou A.

II - FORMULE DU MINI - MAX

II - 1 n-ième diamètre

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé E ; pour tout entier $n \geq o$, on appelle selon Kolmogorov [20], n-ième diamètre de A dans E le nombre

$$(2.1) \qquad d_n(A\ ;\ E) = \underset{G \in G_n(E)}{\mathrm{Inf}}\ \underset{x \in A}{\mathrm{Sup}}\ \underset{y \in G}{\mathrm{Inf}}\ \|x-y\|_E$$

où $G_n(E)$ désigne l'ensemble des sous espaces de E de dimension inférieure ou égale à n.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

(1) $d_n(\alpha A\ ;\ E) = \alpha\ d_n(A\ ;\ E) \qquad (\alpha \geq o)$

(2) $A \subset B \Rightarrow d_n(A\ ;\ E) \leq d_n(B\ ;\ E)$

(3) la suite d_n est décroissante ; de plus $\lim_{n \to +\infty} d_n = o$ si et seulement si A est précompact.

Notons aussi le résultat classique suivant (cf. LORENTZ [21]) :

<u>Théorème de Krein</u> : s'il existe $G \in G_{n+1}(E)$ tel que la boule de rayon δ dans G soit contenue dans A, on a :

$$d_n(A\ ;\ E) \geq \delta$$

Dans le cas où E est hilbertien, la démonstration de ce théorème est immédiate : pour $H \in G_n(E)$, il existe alors x non nul dans G, qui soit orthogonal à H. Posant $y = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot x$ on a $y \in A$ et

$$\forall z \in G\ :\ \|y-z\|_E \geq \|y\|_E = \delta$$

II - 2 Problèmes variationnels

Nous définissons dans ce paragraphe les fonctions $N(\lambda, V, H, a)$ qui seront notre outil principal ; nous donnons quelques règles de calcul pour ces fonctions, ainsi que la manière de les évaluer à l'aide de n-diamètres. Mais précisons d'abord quelques notations :

Soient V et H deux espaces de Hilbert, V s'injectant continuement dans H ; on note (,) le produit scalaire de H. Soit a une forme sesquilinéaire sur V ; on convient de noter simplement $a+\mu$ ($\mu\in\mathbb{C}$) la forme $a+\mu(\,,\,)$.

Nous supposerons que a est hermitienne :

(2.2) $$\forall u \in V,\ \forall v \in V : a(u,v) = \overline{a(v,u)}$$

et que a est continue sur V :

(2.3) $$\exists M : \forall u \in V,\ \forall v \in V : |a(u,v)| \leq M\|u\|_V.\|v\|_V$$

On dira que a est fortement coercive sur V si :

(2.4) $$\exists m > 0 : \forall u \in V\ m\|u\|_V^2 \leq a(u,u)$$

On dira que a est coercive sur V (relativement à H) s'il existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tel que $a+\lambda_o$ soit fortement coercive sur V, i.e. s'il existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ et $m>o$ tels que :

(2.5) $$\forall u \in V : m\|u\|_V^2 - \lambda_o\|u\|_H^2 \leq a(u,u)$$

Pour simplifier le vocabulaire, on appellera triplet variationnel un triplet (V, H, a), où V et H sont des espaces de Hilbert tels que V s'injecte continuement dans H, et où a est une forme hermitienne continue et coercive sur V.

Si (V,H,a) est un triplet variationnel, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on désigne par $\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ l'ensemble des sous espaces fermés E de V, tels que la forme $a-\lambda$ soit fortement coercive sur E.

On pose alors :

$$N(\lambda;V,H,a) = \inf_{E\in\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)} \operatorname{codim}_V(E).$$

$\operatorname{codim}_V(E)$ désignant la codimension finie ou infinie de E dans V. $N(\lambda,V,H,a)$

est alors un élément de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition :

(2.6) : $$N(\lambda;V,H,a+t) = N(\lambda-t;V,H,a) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(2.7) : $$N(\lambda;V,H,\alpha a) = N(\alpha^{-1}\lambda;V,H,a) \qquad (\alpha>o)$$

(2.8) : si a_1 et a_2 sont deux formes hermitiennes continues et coercives sur V telles que : $\forall u \in V \quad a_1(u,u) \leq a_2(u,u)$, alors :

$$N(\lambda;V,H,a_1) \geq N(\lambda;V,H,a_2).$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à l'obtention de résultats dont certains sont classiques ou faciles, et qui seront utilisés par la suite. (Voir en particulier les propositions 2.7 et 2.8). Les liens qui relient les fonctions $N(\lambda\ ;\ V,H,a)$, les valeurs propres et les n-diamètres sont exposés par les propositions 2.2 et 2.9.

Notons d'abord le

<u>Lemme 2.1</u> : soit (V,H,a) un triplet variationnel ; soit E un sous espace fermé de V. Pour que $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ il faut et il suffit qu'il existe $\varepsilon>o$ tel que :

(2.9) $$\forall u \in E : \quad (a-\lambda)\ (u,u) \geq \varepsilon\|u\|_H^2.$$

<u>Démonstration</u> : pour $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ on a par définition :

$$\forall u \in E^{\cdot} : (a-\lambda)\ (u,u) \geq C^{te}\ \|u\|_V^2 \geq C^{te}\ .\ \|u\|_H^2.$$

Inversement, supposons que l'on ait l'estimation (2.9) ; notons m et λ_o des constantes telles que (2.5) ait lieu. Pour $\lambda \leq -\lambda_o$, $(a-\lambda)$ est, d'après (1.5), fortement coercive sur V, donc sur E et $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$. Pour $\lambda > -\lambda_o$, posant $\varepsilon' = \varepsilon/(\lambda+\lambda_o)$, on déduit de (2.5) et (2.9) que pour tout

$u \in E$:

$$(1+\varepsilon')\ (a-\lambda)\ (u,u) \geq \varepsilon\|u\|_H^2 + \varepsilon'(a-\lambda)\ (u,u) \geq \varepsilon' m.\|u\|_V^2$$

et le lemme suit.

La relation fondamentale avec les n-diamètres est donnée par :

Proposition 2.2 : Soit (V,H,a) un triplet variationnel. Si a est fortement coercive sur V, on a en notant $S_a = \{u \in V \ / \ a(u,u) \leq 1\}$:

$$\forall \lambda > o \ N(\lambda;V,H,a) = \text{Cardinal } \{n \geq o \ / \ d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\}.$$

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$;
soit $\nu = \text{Cardinal } \{n \geq o \ / \ d_n(S_a,H) \geq \lambda^{-1/2}\}$. La proposition résulte des deux inégalités suivantes, qui ont lieu entre éléments de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

$$N(\lambda;V,H,a) \leq \nu \tag{2.10}$$

$$\nu \leq N(\lambda;V,H,a). \tag{2.11}$$

Si $\nu = +\infty$, (2.10) est trivial. Si $\nu < +\infty$ on a :

$$d_\nu(S_a,H) < \lambda^{-1/2} \leq d_{\nu-1}(S_a,H)$$

Choisissons $\lambda' > \lambda$ tel que $d_\nu(S_a,H) < \lambda'^{-1/2}$. Par définition il existe alors $G \in G_\nu(H)$ tel que :

$$\forall u \in S_a,\ \exists v \in G : \|u-v\|_H \leq \lambda'^{-1/2}. \tag{2.12}$$

Notant Π le projecteur orthogonal dans H sur G et appliquant (2.12) à $u/\sqrt{a(u,u)}$, on obtient que :

$$\forall u \in V : \|u-\Pi u\|_H^2 \leq \lambda'^{-1}\ a(u,u). \tag{2.13}$$

Prenant $E = V \cap \operatorname{Ker} \Pi$, on voit que E est fermé dans V, de codimension majorée par ν. De plus par (2.13) on a :

$$\forall u \in E : (\lambda'-\lambda) \|u\|_H^2 \leq (a-\lambda)(u,u)$$

Par le lemme 2.1 E est donc dans $\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ et (2.10) résulte des majorations :

$$N(\lambda;V,H,a) \leq \operatorname{codim}_V(E) \leq \nu.$$

De même si $N(\lambda;V,H,a) = +\infty$, (2.11) est évidemment vérifié. Si $N(\lambda;V,H,a) = n < +\infty$, il existe $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ de codimension n dans V. Soit G l'orthogonal pour a de E dans V ; on a : $G \in G_n(V) \subset G_n(H)$. Notons Π' le projecteur orthogonal pour a de V sur G. Il existe $\varepsilon > o$ tel que :

$$\forall u \in E : \quad \varepsilon \|u\|_H^2 \leq (a-\lambda)(u,u)$$

d'où l'on tire que :

$$\forall u \in V : \quad (\varepsilon+\lambda) \|u-\Pi'u\|_H^2 \leq a(u-\Pi'u,u-\Pi'u) \leq a(u,u)$$

et :

$$d_n(S_a ; H) \leq (\lambda+\varepsilon)^{-1/2} < \lambda^{-1/2}$$

La suite $d_n(S_a ; H)$ étant décroissante on en déduit (2.11) et la proposition.

<u>Notation</u> : Si V et H sont deux espaces de Hilbert, V s'injectant avec injection continue dans H on note simplement :

$$N(\lambda;V,H) = N(\lambda;V,H,a_o) = \sum_{\lambda\, d_n^2(SV;H) \geq 1} 1$$

où a_o est le produit scalaire de V et SV la boule unité de V. (La seconde égalité résulte de la proposition 2.2).

<u>Lemme 2.3</u> : Soient $V\hookrightarrow W\hookrightarrow H$ trois espaces de Hilbert. Pour λ et μ réels positifs on a :

$$N(\lambda.\mu \,;\, V,H) \le N(\lambda;V,W) + N(\mu;W,H).$$

De plus si γ est la norme de l'injection $V\hookrightarrow W$ on a :

$$N(\lambda;V,H) \le N(\gamma^2\lambda;W,H).$$

<u>Démonstration</u> : (Voir aussi [14]). Il est clair que pour $E\in\mathcal{E}_\lambda(V,W)$ et $F \in \mathcal{E}_\mu(W,H)$ l'espace $E \cap F$ est dans $\mathcal{E}_{\lambda.\mu}(V,H)$, et $F\cap V$ est aussi dans $\mathcal{E}_{\gamma^2.\lambda}$ (V,H), grâce au lemme 2.1.

<u>Lemme 2.4</u> : Soient $V\hookrightarrow H$ deux espaces de Hilbert, V étant dense dans H ; notant H' et V' les espaces duaux de H et V et considérant l'injection $H'\hookrightarrow V'$ on a :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} : N(\lambda;V,H) = N(\lambda;H',V')$$

<u>Démonstration</u> : Par symétrie il suffit de prouver l'inégalité :

$$N(\lambda;V,H) \ge N(\lambda;H',V'). \tag{2.14}$$

Cette inégalité est évidente si $N(\lambda,V,H) = +\infty$; si $N(\lambda;V,H)=n <+\infty$ considérons un espace $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H)$ de codimension n dans V. Il existe $\varepsilon>o$ tel que :

$$\forall u \in E : \qquad (\lambda+\varepsilon)\ \|u\|_H^2 \le \|u\|_V^2 \tag{2.15}$$

Soit E_1 le supplémentaire orthogonal de E dans V; soit F l'orthogonal de E_1 pour la dualité $V'\times V$, et soit $G = F\cap H'$. Il est clair que $\mathrm{codim}_{H'}(G) \le \mathrm{codim}_{V'}(F) = \dim E_1 = n$. Pour $u \in G$ on a :

$$\|u\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \le 1} |<u,v>_{V'\times V}| = \sup_{v\in E} \frac{|<u,v>_{V'\times V}|}{\|v\|_V}$$

Or pour $u \in H'$ et $v \in E$ on a :

$$|\langle u,v\rangle_{V'\times V}| = |\langle u,v\rangle_{H'\times H}| \leq \|u\|_{H'} \|v\|_H$$

et compte tenu de (2.15) on obtient que pour $u \in G$ on a :

$$\|u\|^2_{V'} \leq (\lambda+\varepsilon)^{-1} \|u\|^2_{H'}$$

d'où l'on déduit que $G \in \mathcal{E}_\lambda(H',V')$, et (2.14) suit.

Nous avons aussi le

Lemme 2.5 : Soit (V,H,a) un triplet variationnel : soit V_o un sous espace fermé de V ; alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \qquad N(\lambda;V_o,H,a) \leq N(\lambda;V,H,a).$$

Démonstration : il suffit de vérifier que pour $E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ $E \cap V_o \in \mathcal{E}_\lambda(V_o,H,a)$ et que :

$$\operatorname{codim}_{V_o} (E \cap V_o) \leq \operatorname{codim}_V(E).$$

Nous allons préciser ce lemme (proposition 2.7 ci-dessous), mais nous vérifions d'abord le

Lemme 2.6 : soit (V,H,a) un triplet variationnel ; λ étant donné on suppose que $n = N(\lambda;V,H,a) < +\infty$. On introduit l'espace :

$$K = \{u \in V \ / \ \forall v \in V : (a-\lambda)(u,v) = 0\}.$$

Alors il existe une décomposition de V en somme directe orthogonale pour $(a-\lambda)$: $V = E \oplus K \oplus E'$, telle que

i) $\dim E \oplus K = n$

ii) la forme $(a-\lambda)$ est définie négative sur E.

iii) $E' \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$.

<u>Démonstration</u> : puisque $n = N(\lambda;V,H,a) < +\infty$, il existe E' de $\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ de codimension n. Posons :

$$F = \{u \in V \ / \ \forall v \in E' : (a-\lambda)\ (u,v) = o\}.$$

Prouvons d'abord que

(2.16) $$V = F \oplus E'.$$

Puisque $(a-\lambda)$ est définie positive sur E', il est clair que $F \cap E' = \{o\}$. De plus, la forme $(a-\lambda)$ étant fortement coercive et continue sur E', l'espace E' muni du produit scalaire $a-\lambda$ est un espace de Hilbert ; utilisant l'isomorphisme de cet espace sur son dual on voit que pour tout u fixé dans V l'équation

(2.17) $$\forall v \in E' : (a-\lambda)\ (u',v) = (a-\lambda)\ (u,v)$$

définit u' de manière unique dans E'. De plus (2.17) exprime précisément que $u-u' \in F$ et (2.16) en résulte.

Vérifions ensuite que $(a-\lambda)$ est ≤ 0 sur F : en effet s'il existait $u_o \in F$ tel que $(a-\lambda)\ (u_o,u_o) > 0$, on en déduirait en utilisant l'orthogonalité pour $(a-\lambda)$ de E' et F, que pour un $\varepsilon > 0$ on aurait :

$$\forall u \in E',\ \forall t \in \mathbb{C} : (a-\lambda)\ (u+tu_o,u+tu_o) \geq \varepsilon(\|u\|_V^2 + |t|^2\ \|u_o\|_V^2) \geq$$
$$\geq \varepsilon/2\ \|u+tu_o\|_V^2$$

d'où il résulterait que $E' \oplus \mathbb{C}u_o \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ contredisant la minimalité dans $\mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ de $\mathrm{codim}_V(E')$.

Il est clair, par la définition de F, que $K \subset F$; soit E un supplémentaire de K dans F. On a bien alors $V = E \oplus K \oplus E'$, les facteurs étant deux à deux orthogonaux pour $(a-\lambda)$; iii) résulte du choix de E', i) découle de (2.16) ; reste à vérifier ii).
Or on a, d'après (2.16) et la définition de F :

$$K = \{u \in F \ / \ \forall v \in F : (a-\lambda)\ (u,v) = o\}.$$

La forme $(a-\lambda)$ étant négative sur F on en déduit que :

$$K = \{u \in F \ / \ (a-\lambda)\ (u,u) = 0\}.$$

et par suite que $(a-\lambda)$ est définie négative sur E.

Proposition 2.7 : soit (V,H,a) un triplet variationnel ; soit V_o un sous espace fermé de V. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit l'espace :

$$Z_\lambda = \{u \in V \ / \ \forall v \in V_o : (a-\lambda)\ (u,v) = 0\}.$$

Alors on a :

$$N(\lambda;V,H,a) + \dim(V_o \cap Z_\lambda) = N(\lambda;V_o,H,a) + N(\lambda;Z_\lambda,H,a).$$

Démonstration : par le lemme 1.4 on a :

$$N(\lambda;V,H,a) \geq \operatorname{Sup}\{N(\lambda;V_o,H,a),\ N(\lambda;Z_\lambda,H,a)\}.$$

et la proposition est évidente si $N(\lambda;V_o,H,a)$ ou $N(\lambda,Z_\lambda,H,a)$ est infini. Nous supposons donc maintenant que

$$\begin{cases} n_o = N(\lambda;V_o,H,a) < +\infty \\ n_1 = N(\lambda;Z_\lambda,H,a) < +\infty \end{cases}$$

On décompose V_o et Z_λ comme indiqué au lemme 2.6 :

$$V_o = E \oplus K \oplus E'$$

$$Z_\lambda = F \oplus L \oplus F'$$

Remarquons que $K = V_o \cap Z_\lambda$ et en particulier on a $\dim V_o \cap Z_\lambda < +\infty$; on a aussi $K \subset L$. On introduit l'espace

$$N = (E \oplus K) + (F \oplus L) = E \oplus L \oplus F$$

N est de dimension $\nu = n_o + n_1 - \dim K$ et il nous faut prouver que $N(\lambda;V,H,a) = \nu$.

On remarque d'abord en utilisant l'orthogonalité pour $(a-\lambda)$ de V_o et Z_λ, que $(a-\lambda)$ est négative sur N. Par conséquent si $G \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)$ $G \cap N = \{0\}$ et $\mathrm{codim}_V G \geq \nu$. On a donc :

(2.18) $$N(\lambda;V,H,a) \geq \nu$$

Pour démontrer l'inégalité inverse nous avons besoin de quelques préliminaires. On introduit d'abord l'espace

$$K^\perp = \{u \in V \ / \ \forall v \in K : (a-\lambda)(u,v) = 0\}$$

et nous allons montrer que

(2.19) $$K^\perp = V_o + Z_\lambda$$

Il résulte immédiatement des définitions que $V_o + Z_\lambda \subset K^\perp$ et en fait seule l'inclusion inverse est à démontrer.

Pour $u \in V$ on déduit comme au lemme précédent du fait que $a-\lambda$ est fortement coercive sur E' et définie négative sur E qui est de dimension fini, qu'il existe $e \in E$ et $e' \in E'$ tels que :

$$\forall v \in E \quad (a-\lambda)(e,v) = (a-\lambda)(u,v)$$

$$\forall v' \in E' \quad (a-\lambda)(e',v') = (a-\lambda)(u,v')$$

Posant $u_o = e+e'$ et tenant compte de l'orthogonalité pour $(a-\lambda)$ de E et E', on en déduit :

(2.20) $$\forall v \in E \oplus E' \quad (a-\lambda)(u_o,v) = (a-\lambda)(u,v).$$

Par définition de K on a $(a-\lambda)(u_o,v) = 0$ pour $v \in K$, et donc il résulte de la définition de $K^\perp$ que pour $u \in K^\perp$ l'égalité de (2.20) se prolonge à tout $v \in V_o$; mais alors cela exprime que $u-u_o \in Z_\lambda$ et (2.19) est démontré.

Il résulte de (2.19) que V_o+Z_λ est fermé dans V et de codimension inférieure à dim K.

Nous vérifions maintenant que :

(2.21) $$N(\lambda;V,H,a) \leq n_1+n_2 < +\infty.$$

En effet a-λ est fortement coercive sur E' et F' et pour un $\varepsilon>o$ on a :

$$\forall u \in E' \quad (a-\lambda)\ (u,u) \geq \varepsilon\|u\|_V^2$$

$$\forall u \in F' \quad (a-\lambda)\ (u,u) \geq \varepsilon\|u\|_V^2.$$

Utilisant l'orthogonalité de E' et F' pour (a-λ) il vient :

$$\forall u \in E' \oplus F' \quad (a-\lambda)\ (u,u) \geq \varepsilon/2\ \|u\|_V^2$$

et donc $\quad N(\lambda;V,H,a) \leq \operatorname{codim}_V\ (E' \oplus F')$.

On obtient alors (2.21) en remarquant que

$$\operatorname{codim}_V\ (E' \oplus F') = \operatorname{codim}_{V_o+Z_\lambda}\ (E' \oplus F') + \operatorname{codim}_V\ (V_o+Z_\lambda)$$

et que $\begin{cases} \operatorname{codim}_{V_o+Z_\lambda}\ (E' \oplus F') = \dim N = n_o+n_1 - \dim K \\ \operatorname{codim}_V\ (V_o+Z_\lambda) \leq \dim K. \end{cases}$

Posant alors $n = N(\lambda;V,H,a) < +\infty$ nous achèverons la démonstration de la proposition 2.7 en prouvant l'inégalité

(2.22) $$n \leq \nu.$$

Procédant par l'absurde, supposons que $\nu>n$. Suivant le lemme 2.6 on pose :

$$M = \{u\in V\ /\ \forall v\in V \quad (a-\lambda)\ (u,v) = 0\}.$$

Il est clair que $M \subset Z_\lambda$ et même que $M \subset L$.

Utilisant le lemme 2.6, soit G un espace sur lequel la forme a-λ soit définie négative et tel que $\dim(G \oplus M) = n$.

Puisque $M \subset L \subset N$, on peut écrire $N = M \oplus N_1$ et notre hypothèse $\nu>n$ équivaut à $\dim G > \dim N_1$. Alors, il existe $u \neq 0$ dans G tel que :

$$\forall v \in N_1 \quad (a-\lambda)(u,v) = 0.$$

Nous rappelant la définition de M, on en déduit que

$$\forall v \in N \quad (a-\lambda)(u,v) = 0. \tag{2.23}$$

Puisque $K \subset N$ on déduit de (2.23) et (2.19) que $u \in K^{\perp} = V_o+Z_\lambda$. On peut donc écrire $u = u_o+z$ avec $u_o \in V_o$, et $z \in Z_\lambda$.

Puisque $E \subset N$ on tire encore de (2.23) que :

$$\forall v \in E \quad (a-\lambda)(u,v) = (a-\lambda)(u_o,v) = 0$$

et suivant le choix de E, E' et K il en résulte que $u_o \in K \oplus E'$.

Usant de l'inclusion $F \subset N$ on déduit aussi de (2.23) que $z \in L \oplus F'$.

La forme $(a-\lambda)$ est positive sur $K \oplus E'$ et $L \oplus F'$ et ces espaces sont orthogonaux pour $(a-\lambda)$. Il en résulte que :

$$(a-\lambda)(u,u) = (a-\lambda)(u_o,u_o) + (a-\lambda)(z,z) \geq 0$$

ce qui est la contradiction cherchée, puisque u a été choisi non nul dans G, et que $(a-\lambda)$ est définie négative sur G.

Nous utiliserons aussi le résultat suivant, qui peut être considéré comme un corollaire de la proposition précédente :

<u>Proposition 2.8</u> : Soient $(V_i,H_i,a_i)_{i=1,\dots,\nu}$ ν triplets variationnels. On considère les espaces $V = \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$ et $H = \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} H_i$ munis des normes hilbertiennes :

$$\left\| \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i \right\|_V = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \|u_i\|_{V_i}^2 \right)^{1/2} ; \left\| \overset{\nu}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i \right\|_H = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \|u_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2}.$$

On définit la forme a sur V en posant :

$$a\left(\bigoplus_{i=1}^{\nu} u_i, \bigoplus_{i=1}^{\nu} v_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i(u_i,v_i)$$

Alors (V,H,a) est un triplet variationnel et

$$N(\lambda;V,H,a) = \sum_{i=1}^{\nu} N(\lambda;V_i,H_i,a_i). \tag{2.24}$$

Démonstration : le fait que a soit hermitienne continue et coercive sur V est évident. En groupant les termes sous la forme :

$$\bigoplus_{i=1}^{\nu} H_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{\nu-1} H_i\right) \oplus H_\nu$$

on se ramène par récurrence sur ν à prouver (2.24) quand $\nu=2$.

λ étant donné, notons K le noyau de $(a_1-\lambda)$ dans V_1. Avec les notations de la proposition 2.7 (remplaçant V_0 par V_1) on a :

$$Z_\lambda = K \oplus V_2.$$

La forme $(a-\lambda)$ étant nulle sur K on a :

$$\mathcal{E}_\lambda(Z_\lambda,H,a) = \mathcal{E}_\lambda(V_2,H,a) = \mathcal{E}_\lambda(V_2,H_2,a_2).$$

et

$$N(\lambda;Z_\lambda,H,a) = N(\lambda;V_2,H_2,a_2) + \dim K.$$

La proposition suit par application de la proposition 2.7.

II - 3 Valeurs propres de problèmes variationnels

Nous rappelons maintenant la formule du mini-max pour les valeurs propres [10] [13] ; c'est cette formule qui nous dit que les fonctions $N(\lambda;V,H,a)$ sont bien adaptées à l'étude des valeurs propres.

Soit (V,H,a) un triplet variationnel ; supposons que V soit dense dans H. Alors par le lemme de Lax Milgram on définit un opérateur non borné

$(A,D(A))$, autoadjoint minoré dans H ; on a :

(2.25) $\qquad \forall u \in D(A)\ ,\ \forall v \in V\ :\ a(u,v) = (Au,v).$

Si l'on suppose en outre que l'injection de V dans H est compacte, la résolvante de A est compacte dans H et le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres réelles $(\lambda_j)_{j=1,\dots}$ tendant vers $+\infty$. Chaque valeur propre est répétée conformément à sa multiplicité et on ordonne la suite λ_j de façon à la rendre croissante : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \dots$. De plus il existe une base orthonormée φ_j de H constituée de fonctions propres de A.

Fixons λ_o tel que $a+\lambda_o$ soit fortement coercive sur V. Alors il est clair que $\lambda_j+\lambda_o \geq 0$ pour $j=1,\dots,$. et :

$$H = \{f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j \ /\ \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 < +\infty\}.$$

$$V = \{f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j \ /\ \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j+\lambda_o)\ |f_j|^2 < +\infty\}.$$

et pour $f \in V$ on a :

$$(a+\lambda_o)\ (f,f) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j+\lambda_o)\ |f_j|^2$$

Posant $S_{a+\lambda_o} = \{f \in V \ /\ (a+\lambda_o)\ (f,f) \leq 1\}$, on obtient alors de manière classique :

(2.26) $\qquad \forall n = 0,1,\dots \qquad d_n(S_{a+\lambda_o}\ ,\ H) = (\lambda_{n+1}+\lambda_o)^{-1/2}$

Compte tenu de la proposition 2.2 on a alors :

<u>Proposition 2.9</u> : Soit (V,H,a) un triplet variationnel, V étant dense dans H, et l'injection de V dans H étant compacte. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda;V,H,a)$ est le nombre de valeurs propres λ_j inférieures ou égales à λ, de l'opérateur $(A,\ D(A))$ associé au triplet variationnel, i.e :

$$N(\lambda;V,H,a) = \text{Cardinal}\{j \geq 1 \ /\ \lambda_j \leq \lambda\}.$$

Nous faisons aussi la remarque suivante :

Proposition 2.10 : Soit (V,H,a) un triplet variationnel. Pour que l'injection de V dans H soit compacte, il faut et il suffit que :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} : \qquad N(\lambda;V,H,a) < +\infty.$$

Démonstration : on peut toujours se ramener au cas où a est fortement coercive, et alors par la proposition 2.2 on a équivalence entre les deux assertions :

1) $\forall\lambda \in \mathbb{R} \qquad N(\lambda;V,H,a) < +\infty.$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad d_n(S_a,H) = 0$

S_a étant fermé et H un hilbert, la seconde équivaut ainsi qu'on l'a rappelé au paragraphe II.1 à la compacite dans H de l'ensemble S_a, c'est à dire à la compacité de l'injection de V dans H puisque S_a contient un homothétique de la boule unité de V.

III - MAJORATIONS DE n-DIAMETRES

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des majorations de n-diamètres dans les espaces de Sobolev semblables à celles obtenues en ([8] et [14]), mais nous voulons inclure ici le cas des ouverts irréguliers, tout en restant dans le cadre Hilbertien. Les idées et les méthodes sont celles de [8] et [14].

III - 1 Espaces de Sobolev

Comme nous voulons considérer des ouverts très irréguliers, il est bon de préciser nos définitions: Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et pour $m \in \mathbb{N}$ on note :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \;/\; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{m,\Omega} = \{\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\}^{1/2}.$$

En particulier on note $\|.\|_{o,\Omega} = \|.\|_{L^2(\Omega)}$; on introduit aussi les semi-normes :

$$|u|_{m,\Omega} = \{\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\}^{1/2}.$$

On désigne par $H^m_o(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

On introduit aussi :

$$\mathcal{H}^m_o(\Omega) = \{u \in H^m(\mathbb{R}^n) \;/\; D^\alpha u(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega, \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

C'est un sous espace fermé de $H^m(\mathbb{R}^n)$ qui s'injecte dans $H^m(\Omega)$, et qu'on identifie à un sous espace de $H^m(\Omega)$.

$\mathcal{H}^m(\Omega)$ désigne l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $H^m(\mathbb{R}^n)$; on le munit de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \inf_{\substack{v\in H^m(\mathbb{R}^n) \\ v|_\Omega=u}} \|v\|_{m,\mathbb{R}^n}.$$

$\mathcal{H}^m(\Omega)$ est isométrique au quotient de $H^m(\mathbb{R}^n)$ par l'espace :

$$\{u \in H^m(\mathbb{R}^n) \ / \ u|_{\Omega} = 0\}.$$

et il existe un prolongement linéaire isométrique de $\mathcal{H}^m(\Omega)$ dans $H^m(\mathbb{R}^n)$. Notons enfin les inclusions :

$$H^m_o(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}^m_o(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}^m(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega). \tag{3.1}$$

Enfin, $H^m_{loc}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont la restriction à tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ (i.e $\overline{\Omega}_1$ compact et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$) est dans $H^m(\Omega_1)$, et $H^m_{comp}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $H^m(\Omega)$ à support compact dans Ω.

<u>Notation</u> : nous devons introduire encore une notation ; soit $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ un espace de Hilbert et soit ω un ouvert inclus dans Ω. Notons SV la boule unité de V et $SV|_\omega$ l'ensemble des restrictions à ω des fonctions de SV ; on note $N(\lambda;V,L^2(\omega))$ le nombre de n-diamètres de $SV|_\omega$ dans $L^2(\omega)$ supérieurs ou égaux à $\lambda^{-1/2}$:

$$N(\lambda;V,L^2(\omega)) = \sum_{\lambda\, d_n^2(SV|_\omega;L^2(\omega)) \geq 1} 1 \tag{3.2}$$

Une autre définition est la suivante : notant $\mathcal{V}(\omega)$ l'ensemble des restrictions à ω des fonctions de V, muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{V}(\omega)} = \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in V \\ v|_\omega = u}} \|v\|_V$$

on a alors : $N(\lambda;V,L^2(\omega)) = N(\lambda;\mathcal{V}(\omega), L^2(\omega))$.

En particulier si $\omega = \Omega$ la notation est cohérente avec celle introduite précédemment. Les deux définitions sont équivalentes grâce à la proposition 2.2.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'obtention de majorations de $N(\lambda;V,L^2(\omega))$, lorsque V est l'un des espaces de Sobolev introduits plus haut.

Notons cependant tout de suite que pour deux ouverts ω_1 et ω_2 tels que $\omega_1 \subset \omega_2$ on a :

(3.3) $$N(\lambda;V,L^2(\omega_1)) \leq N(\lambda;V,L^2(\omega_2))$$

Il est en effet clair que $d_n(SV_{|\omega_1} ; L^2(\omega_1)) \leq d_n(SV_{|\omega_2} ; L^2(\omega_2))$.

III - 2 Un lemme d'itération

Nous commençons par ramener l'étude au cas des espaces de Sobolev d'ordre 1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; soient $V^m \hookrightarrow H^m(\Omega)$ $(m \geq 0)$ des espaces de Hilbert tels que :

(3.4) $$V^m \hookrightarrow V^{m-1} \hookrightarrow \ldots V^1 \hookrightarrow L^2(\Omega) = V^o$$

et

(3.5) $$\forall u \in V^m : \|u\|_{V^{m-1}} \leq \|u\|_{V^m}.$$

On suppose que pour $i=1,..,n$ la dérivation D_i opère de V^m dans V^{m-1} avec :

(3.6) $$\forall u \in V^m : \|D_i u\|_{V^{m-1}} \leq \|u\|_{V^m}$$

Ces hypothèses sont satisfaites pour les suites $H^m_o(\Omega)$, $\mathcal{H}^m_o(\Omega)$ $\mathcal{H}^m(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$; seul le cas de $\mathcal{H}^m(\Omega)$ pose peut-être un problème : pour $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$, il existe, ainsi qu'on la déjà noté, un élément $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $v_{|\Omega} = u$ et que $\|v\|_{m,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$.

On a alors :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{m-1}(\Omega)} \leq \|v\|_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$$

et

$$\|D_i u\|_{\mathcal{H}^{m-1}(\Omega)} \leq \|D_i v\|_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$$

Soit $\omega \subset \Omega$; notons $V^m(\omega)$ l'espace des restrictions à ω des éléments de V^m ; notons enfin $\overline{V}^1(\omega)$ l'adhérence de $V^1(\omega)$ dans $H^1(\omega)$; on a alors :

<u>Proposition 3.1</u> : sous les hypothèses précédentes on a pour $\lambda>0$, $m\geq 1$:

(3.7) $$N(\lambda^m;V^m,L^2(\omega)) \leq \sum_{h=o}^{m-1} (n+1)^h \, . N((n+1)\lambda \; ; \; \overline{V}^1(\omega) \; , \; L^2(\omega)).$$

<u>Démonstration</u> : on munit $V^m(\omega)$ de la norme quotient :

$$\|u\|_{V^m(\omega)} = \inf_{\substack{v\in V^m \\ v|_\omega=u}} \|v\|_{V^m}$$

On a alors : $\|.\|_{V^o(\omega)} = \|.\|_{L^2(\omega)}$; on vérifie aussi que la dérivation D_i $(i=1,..,n)$ opère de $V^m(\omega)$ dans $V^{m-1}(\omega)$ et que :

(3.8) $$\begin{cases} \|u\|_{V^{m-1}(\omega)} \leq \|u\|_{V^m(\omega)} \\ \\ \|D_i u\|_{V^{m-1}(\omega)} \leq \|u\|_{V^m(\omega)} . \end{cases}$$

D'autre part $\overline{V}^1(\omega)$ est muni de la norme de $H^1(\omega)$:

(3.9) $$\|u\|_{\overline{V}^1(\omega)} = \{\|u\|^2_{L^2(\omega)} + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2_{L^2(\omega)}\}^{1/2} .$$

On démontre (3.7) par récurrence sur m ; pour m=1 (3.7) résulte simplement de la majoration suivante qui découle de (3.8) et (3.9) :

$$\|.\|^2_{\overline{V}^1(\omega)} \leq (n+1) \; \|.\|^2_{V^1(\omega)}$$

Supposons (3.7) démontré à l'ordre (m-1) ($m\geq 2$) et établissons le à l'ordre m. Si $N((n+1)\lambda \; ; \; \overline{V}^1(\omega), \; L^2(\omega)) = +\infty$ il n'y a rien à démontrer ; supposons donc que $\nu = N((n+1)\lambda \; ; \; \overline{V}^1(\omega), \; L^2(\omega))$ est fini. Il existe donc un espace E de codimension ν dans $\overline{V}^1(\omega)$, et un $\varepsilon>o$ tels que :

(3.10) $$\forall u \in E \; : \; (n+1) \; (\lambda+\varepsilon) \; \|u\|^2_{L^2(\omega)} \leq \|u\|^2_{\overline{V}^1(\omega)}$$

D'après notre hypothèse de récurrence on a :

$$N(\lambda^{m-1} \; ; \; V^{m-1}, \; L^2(\omega)) \leq \sum_{h=o}^{m-2} (1+n)^h \; . \; \nu < +\infty.$$

Or on a : $N(\lambda^{m-1}; V^{m-1}, L^2(\omega) = N(\lambda^{m-1}; V^{m-1}(\omega), L^2(\omega))$.

Par conséquent il existe F de codimension majorée par $\nu. \sum_{h=o}^{m-2} (1+n)^h$, dans $V^{m-1}(\omega)$ tel que :

(3.11) $$\forall v \in F : \lambda^{m-1} \|v\|^2_{L^2(\omega)} \leq \|v\|^2_{V^{m-1}}.$$

Soit G l'ensemble des u de $V^m(\omega)$ tels que $u \in E \cap F$, et tels que $D_i u \in F$ pour i=1,..,n. G est de codimension dans $V^m(\omega)$ majorée par :

(3.12) $$\nu + (n+1) \nu \sum_{h=o}^{m-2} (1+n)^h = \nu \sum_{h=o}^{m-1} (1+n)^h$$

Pour $u \in G$ on applique (3.11) à u et aux $D_i u$; puis par sommation on obtient, compte tenu de (3.8) et (3.9) :

$$\lambda^{m-1} \|u\|^2_{\overline{V}^1(\omega)} \leq (n+1) \|u\|^2_{V^m}$$

appliquant alors (3.10), on trouve que :

$$\forall u \in G : \quad \lambda^{m-1} . (\lambda+\varepsilon) \|u\|^2_{L^2(\omega)} \leq \|u\|^2_{V^m}$$

d'où l'on déduit que :

$$N(\lambda^m; V^m(\omega), L^2(\omega)) \leq \operatorname{codim}_{V^m(\omega)} (G)$$

et compte tenu de (3.12), on a démontré (3.7) à l'ordre m.

<u>Remarque</u> : dans le cas où $\omega=\Omega$ et où V^1 est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ (c'est le cas de $H^1_o(\Omega)$, $\mathcal{H}^1_o(\Omega)$ et bien sûr de $H^1(\Omega)$) on a démontré que:

$$N(\lambda; V^m, L^2(\Omega)) \leq C^{te}. N((n+1). \lambda^{1/m} ; V^1 , L^2(\Omega)).$$

<u>III - 3 Estimations pour les espaces $\mathcal{V}^m$ et $\mathcal{V}^m_o$</u>

Les idées de base sont comme on l'a déjà signalé dans ([8], [14]).

<u>Lemme 3.2</u> : pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : l'orthogonal dans H^1 de H^1_o est constitué du noyau dans H^1 de $(-\Delta+1)$ et est donc constitué de fonctions C^∞ sur Ω.

L'estimation fondamentale est la suivante :

<u>Lemme 3.3</u> : Soit J un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$; soient J_1 et J_2 deux parties mesurables de J ; notant mes J_i (i=1,2) la mesure de Lebesgue de J_i et $\delta(J) = \sup_{(x,y)\in J^2} |x-y|$ le diamètre de J, pour $f \in H^1(J)$ on a :

$$\int_{J_1\times J_2} |f(x)-f(y)|^2 \, dxdy \le 2^{n-1}(\text{mes } J_1 + \text{mes } J_2)\, (\delta(J))^2 \, \|Df\|^2_{o,J}$$

(3.13)

où Df désigne le gradient de f.

<u>Démonstration</u> : par le lemme 3.2 il suffit d'établir (3.13) pour $f \in H^1(J) \cap C^1(J)$. On a alors :

$$f(x)-f(y) = \int_o^1 \langle Df(tx+(1-t)y),\ x-y\rangle \, dt$$

et

$$|f(x)-f(y)|^2 \le (\delta(J))^2 \int_o^1 |Df(tx+(1-t)y)|^2 \, dt.$$

Il suffit donc d'établir la majoration suivante :

(3.14)

$$\int_{J\times J\times]o,1[} 1_{J_1}(x).1_{J_2}(y).|Df(tx+(1-t)y)|^2 dxdydt \le 2^{n-1}(\text{mes } J_1+\text{mes } J_2) \int_J |Df(z)|^2 dz.$$

Posons $\tilde{J}_1 = J\times J\times]o,1/2[$; soit θ le difféomorphisme de $\tilde{J}_1$ sur $U_1 \subset \tilde{J}_1$

$$\theta_1(x,y,t) = (x,tx+(1-t)y,t)$$

Le jacobien de θ_1 vaut $(1-t)^n$ et on le minore par 2^{-n}.

On considère l'intégrale du premier membre de (3.14) sur $\tilde{J}_1$: on effectue le changement de variables θ_1 ; la fonction intégrée étant positive, on majore $1_{J_2}(y)$ par 1, et on majore l'intégrale sur U_1 obtenue, par l'intégrale sur $\tilde{J}_1 \supset U_1$; on a alors :

(3.15)

$$\int_{\tilde{J}_1} 1_{J_1}(x).1_{J_2}(y)\ |Df(tx+(1-t)y)|^2 dxdydt \le 2^{\ n}.\text{mes } J_1.1/2.\int_J |Df(z)|^2\ dz.$$

De même considérant $\theta_2 : (x,y,t) \to (tx+(1-t)y,y,t)$ de $\tilde{J}_2 = J\times J\times]1/2,1[$ sur U_2 on majore

$$\int_{\tilde{J}_2} \dots\ dxdydt \le 2^n.\text{mes } J_2 \ .\ \frac{1}{2}\int_J |Df(z)|^2\ dz$$

et avec (3.15) on obtient (3.14) et le lemme.

<u>Proposition 3.4</u> : Il existe des constantes $\gamma(n,m)$ ne dépendant que de l'entier $m \ge 1$ et de la dimension d'espace n, telles que : si $\omega \subset \Omega$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et si pour $\delta > 0$ on note :

$$\omega_\delta = \{x\in\Omega\ /\ \text{dist}\,(x,\omega) < \sqrt{n}\delta\}$$

on a :

$$\forall\lambda \ge 0 : N(\lambda;\ \mathcal{H}^m_o(\Omega)\ ;\ L^2(\omega) \le \gamma(n,m).\text{mes } \omega_{\lambda^{-1/2m}}.\lambda^{n/2m}.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\delta > 0$; soient J_ν ($\nu \in \mathbb{Z}^n$) les pavés :

$$J_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n\ /\ |x_i-\delta\nu_i| < \delta/2 \text{ pour } i=1,..,n\}.$$

Soit A l'ensemble des indices ν tels que $J_\nu \cap \omega \ne \emptyset$; soit $A_1 \subset A$ l'ensemble des indices $\nu\in A$ tels que : mes $J_\nu \cap \Omega \ge \frac{1}{2}\delta^n$.

Notons $\omega' = \text{Int}\ \{\bigcup_{\nu\in A} (\overline{J}_\nu \cap \Omega)\}$.

On a alors : $\omega \subset \omega' \subset \omega_\delta$ et $\frac{1}{2}\delta^n$ Cardinal $(A_1) \le$ mes ω' et encore :

$$\text{Card } A_1 \le 2.\text{mes } \omega_\delta.\ \delta^{-n} \tag{3.16}$$

Rappelons que par définition de $\mathcal{H}^1_o(\Omega)$, tout $f \in \mathcal{H}^1_o(\Omega)$ se prolonge en $\tilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\tilde{f}$ et $D_i\tilde{f}$ $(i=1,..,n)$ soient nulles p.p. sur $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$. Pour $f \in \mathcal{H}^1_o(\Omega)$ et $\nu \in A_1$ on pose alors :

$$f_\nu = \frac{1}{\text{mes } J_\nu} \int_{J_\nu} \tilde{f}(y).dy$$

On a :

$$\|f-f_\nu\|^2_{o,J_\nu} \leq \frac{1}{\text{mes } J_\nu} \int_{J_\nu \times J_\nu} |\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|^2 \; dxdy$$

et appliquant le lemme 3.3 on obtient que :

$$\|f-f_\nu\|^2_{o,J_\nu \cap \Omega} \leq 2^n \delta^2 \; \|\tilde{f}\|^2_{1,J_\nu} = 2^n.\delta^2 \; \|f\|^2_{1,J_\nu \cap \Omega}. \tag{3.17}$$

Pour $\nu \in A \backslash A_1$ on écrit que :

$$\|\tilde{f}\|^2_{o,J_\nu} = \frac{1}{\text{mes}(J_\nu \cap \Omega^c)} \int_{(J_\nu \cap \Omega)\times(J_\nu \cap \Omega^c)} |f(x)-f(y)|^2 \; dxdy$$

et remarquant que pour $\nu \in A\backslash A_1$ $\text{mes}(J_\nu \cap \Omega^c) \geq \text{mes }(J_\nu \cap \Omega)$ on déduit du lemme 3.2 que :

$$\|f\|^2_{o,J_\nu \cap \Omega} \leq 2^n.\delta^2 \; \|f\|^2_{1,J_\nu \cap \Omega} . \tag{3.18}$$

Notant $g = \sum_{\nu \in A_1} f_\nu \, . \, 1_{J_\nu}$ on a donc d'après (3.17) et (3.18)

$$\|f-g\|^2_{o,\omega'} \leq 2^n \delta^2 \; \|f\|^2_{1,\omega'} . \tag{3.19}$$

g variant dans un espace de dimension $\text{card}(A_1)$.

Notons, selon les notations de la proposition 3.1, $V^1(\omega')$ l'espace des restrictions à ω' des éléments de $\mathcal{K}^1_o(\Omega)$; (3.19) a lieu pour $f \in V^1(\omega')$ et ne fait intervenir que les normes de $L^2(\omega')$ et de $H^1(\omega')$; de plus l'application $f \to g$ est continue de $L^2(\omega')$ dans $L^2(\omega')$; par suite (3.19) se prolonge aux $f \in \overline{V}^1(\omega')$ adhérence de $V^1(\omega')$ dans $H^1(\omega')$ et on déduit de (3.19) que :

$$\forall \lambda < 2^{-n} \; \delta^{-2} \; : \; N(\lambda;\overline{V}^1(\omega'), \; L^2(\omega')) \leq \text{card}(A_1).$$

Nous appliquons alors la proposition (3.1) à la suite d'espaces $\mathcal{H}_o^m(\Omega)$ et nous obtenons que :

$$(3.20)\quad \forall\lambda < \left(\frac{2^{-n}}{n+1} \cdot \delta^{-2}\right)^m : N(\lambda;\mathcal{H}_o^m(\Omega),L^2(\omega')) \leq \sum_{h=o}^{m-1} (1+n)^h.\mathrm{card}(A_1).$$

Remarquant que

$$N(\lambda;\mathcal{H}_o^m(\Omega),L^2(\omega)) \leq N(\lambda;\mathcal{H}_o^m(\Omega),L^2(\omega'))$$

on achève la démonstration de la proposition en choisissant pour λ donné, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 2^{-n/2} \cdot (n+1)^{-1/2} \cdot \lambda^{-1/2m} < \lambda^{-1/2m}$, et en reportant (3.16) dans (3.20).

<u>Proposition 3.5</u> : Il existe des constantes $\gamma(n,m)$ telles que : si $\omega \subset \Omega$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et si on note pour $\delta > 0$: $\tilde{\omega}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathrm{dist}\ (x,\omega) < \sqrt{n}.\delta\}$ on a :

$$\forall\lambda \geq 0 : N(\lambda;\mathcal{H}^m(\Omega),L^2(\omega)) \leq \gamma(n,m).\mathrm{mes}\ \tilde{\omega}_{\lambda^{-1/2m}}.\ \lambda^{n/2m}$$

<u>Démonstration</u> : elle se calque complètement sur la démonstration précédente ; pour $\delta>0$ on considère les pavés J_ν ($\nu \in \mathbb{Z}^n$) comme précédemment: J_ν est de centre $\delta\nu$ et de côté δ.

Soit A l'ensemble des indices $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tels que $J_\nu \cap \omega \neq \emptyset$ et soit $\omega' = \mathrm{Int}(\bigcup_{\nu\in A} \overline{J}_\nu)$. On a : $\omega \subset \omega' \subset \tilde{\omega}_\delta$ et

$$(3.21)\qquad \mathrm{Card}\ A \leq \delta^{-n}.\mathrm{mes}\ \tilde{\omega}_\delta .$$

Pour $f \in H^1(\omega')$ on pose $f_\nu = \frac{1}{\mathrm{mes}\ J_\nu} \int_{J_\nu} f(y)\, dy$ $(\nu\in A)$, et comme pour (3.17) on déduit du lemme 3.3 que :

$$(3.22)\qquad \|f - \sum_{\nu\in A} f_\nu.\lambda_{J_\nu}\|^2_{o,\omega'} \leq 2^n.\delta^2\ \|f\|^2_{1,\omega'}$$

On en déduit que :

$$\forall\lambda < 2^{-n}\ \delta^{-2} : N(\lambda;H^1(\omega'),L^2(\omega')) \leq \mathrm{Card}(A).$$

Appliquant la proposition 3.1 à la suite d'espaces $H^m(\omega')$ on a alors :

$$\forall\lambda < \left(\frac{2^{-n}\delta^{-2}}{n+1}\right)^m : N(\lambda; H^m(\omega'), L^2(\omega')) \leq \text{Card } A.$$

Il existe donc pour tout $\lambda < \left(\frac{2^{-n}\delta^{-2}}{n+1}\right)^m$, un sous espace E de codimension majorée par card A dans $H^m(\omega')$ tel que :

$$(3.23) \qquad \forall u \in E : \lambda\|u\|^2_{o,\omega'} \leq \|u\|^2_{m,\omega'}$$

Notons P_m l'opérateur de prolongement isométrique de $\mathcal{H}^m(\omega)$ dans $H^m(\mathbb{R}^n)$; soit F l'ensemble des $u \in \mathcal{H}^m(\omega)$ tels que $(P_m u)_{|\omega'} \in E$; pour $u \in F$ on a avec (3.23) :

$$\lambda\|u\|^2_{o,\omega} \leq \lambda\|P_m u\|^2_{o,\omega'} \leq \|P_m u\|^2_{m,\omega'} \leq \|u\|^2_{\mathcal{H}^m(\omega)}.$$

On en déduit que :

$$(3.24) \qquad \forall\lambda < \left(\frac{2^{-n}\delta^{-2}}{n+1}\right)^m : N(\lambda; \mathcal{H}^m(\omega), L^2(\omega)) \leq \text{card}(A).$$

On remarque maintenant en retournant aux définitions que :

$$N(\lambda; \mathcal{H}^m(\Omega), L^2(\omega)) = N(\lambda; \mathcal{H}^m(\omega), L^2(\omega)).$$

et on conclut avec (3.21) et (3.24) comme pour la proposition 3.4.

III - 4 Estimations pour les espaces H^m

Pour étudier le cas des espaces $H^m(\Omega)$, nous sommes amenés à faire quelques hypothèses sur l'ouvert Ω.

On dira qu'un ouvert borné Ω possède la propriété (C), s'il existe des constantes $\delta_o > 0$ et K telles que :

(C)
- pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout $\delta \leq \delta_o$, il existe un vecteur unitaire h tel que si l'on désigne par $B(x,\delta)$ la boule de centre x et de rayon δ on ait :
- i) $\forall t \in [0, K\delta]$, $\forall y \in B(x,\delta) \cap \Omega$: $y+th \in \Omega$
- ii) l'enveloppe convexe de $K\delta h + (B(x,\delta) \cap \Omega)$ est contenue dans Ω.

Donnons tout de suite quelques exemples : rappelons d'abord qu'un ouvert borné Ω est dit Lipschitzien (possède la propriété forte du cône de [1]) si pour tout $x_o \in \partial\Omega$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_o et un système de coordonnées de centre x_o tels que :

$$\Omega \cap \mathcal{V} = \{x=(x_1,x') \in]-2t_o,2t_o[\times \mathcal{V}' \ / \ x_1 > \Phi(x')\}.$$

où $\mathcal{V}'$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$, Φ une fonction lipschitzienne de $\mathcal{V}'$ dans $\mathbb{R}$ avec $\Phi(o) = 0$.

On peut supposer $\mathcal{V}'$ convexe et $\Phi(\mathcal{V}') \subset]-t_o,t_o[$.

De plus, par compacité de $\partial\Omega$, on peut supposer que la constante de Lipschitz de Φ est majorée indépendemment de $x_o \in \partial\Omega$ par une constante K.

Pour δ assez petit, la boule de centre x_o et de rayon δ est incluse dans $]-t_o,t_o[\times \mathcal{V}'$. Pour $x = (x_1,x') \in B(x_o,\delta) \cap \Omega$ on a clairement $x+t(1,o) \in \Omega \cap \mathcal{V}$ pour $t \leq t_o$.

Si $y = (y_1,y')$ est un autre point de $B(x_o,\delta) \cap \Omega$, on a pour $s \in [o,1]$:

$$\Phi(sx'+(1-s)y') \leq \Phi(x') + K(1-s)|x'-y'| < x_1+K(1-s)\ |x'-y'|$$

$$\Phi(sx'+(1-s)y') \leq \Phi(y') + Ks|x'-y'| < y_1+Ks\ |x'-y'|$$

et

$$\Phi(sx'+(1-s)y') < sx_1 + (1-s)y_1 + 2s(1-s)\ K|x'-y'|.$$

Si δ est assez petit on a :

$$2\ s(1-s)K\ |x'-y'| \leq K|x-y| \leq 2K\delta < t_o$$

et

$$2K\delta(1,o) + (B(x_o,\delta)\cap\Omega) \subset \Omega\cap\mathcal{V}.$$

Nous venons donc de démontrer le

<u>Lemme 3.6</u> : tout ouvert borné Lipschtzien vérifie la condition (C).

Il faut cependant remarquer qu'une classe beaucoup plus vaste d'ouverts, en particulier d'ouverts très irréguliers, vérifient la condition (C). Par exemple les ouverts "modèles" :

$$\Omega = \{x=(x_1,x') \in]o,1[\times \mathbb{R}^{n-1} \ / \ |x'| < \varphi(x_1)\}$$

φ étant une fonction croissante de $]o,1[$ dans $]o,\infty[$, qu'on suppose par commodité constante pour $x_1 \geq 1/2$. En particulier on peut choisir φ aussi plate que l'on veut à l'origine.

En effet pour $x_1 \in [o,1/2]$ et pour $x = (x_1,x') \in \partial\Omega$, si δ est assez petit on a :

$$B(x,\tfrac{\delta}{2}) \cap \Omega \subset \{y=(y_1,y') \in \Omega \ / \ |y_1-x_1| < \delta/2\}.$$

φ étant croissante pour $y = (y_1,y') \in B(x,\delta) \cap \Omega$, on a :

$(y_1+t,y') \in \Omega$ pour $t \leq 1/2-\delta/2$ et

$$\delta(1,o) + (B(x,\tfrac{\delta}{2}) \cap \Omega) \subset \{(y_1,y') \in]x_1+\tfrac{\delta}{2},x_1+\tfrac{3\delta}{2}[\ / \ |y'| < \varphi(x_1+\tfrac{\delta}{2})\} \subset \Omega.$$

Pour rendre la condition (C) invariante par difféomorphisme et pour tenir compte des ouverts qui ne sont pas d'un seul côté de leur frontière on introduit aussi la condition suivante :

(C') $\left\{\right.$ Ω borné possède la propriété (C') s'il existe des ouverts Ω_i $(i=o,..,N)$ inclus dans Ω tels que :

i) $\overline{\Omega}_o \subset \Omega$ et $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \bigcup_{i=o}^{N} \Omega_i) = 0$.

ii) Pour $i=1,..,N$ il existe un C^1 difféomorphisme θ_i d'un voisinage de $\overline{\Omega}_i$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, tel que $\theta_i(\Omega_i)$ possède la propriété (C).

Exemples 1 : l'ouvert $\Omega = (]0,1[\times]o,1[) \setminus (]0,1/2[\times \{o\})$ est égal à un ensemble négligeable près, à la réunion de deux rectangles, et possède donc la propriété (C').

2 : l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in]o,1[\times \mathbb{R} \ / \ y \in]\psi(x),\varphi(x)[\}$. possède la propriété (C') si φ et ψ sont deux fonctions C^1 telles que $\varphi-\psi$ soit croissante.

3 : l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in]o,1[\times \mathbb{R} \ / \ |y| < \varphi(x)\}$ où $\varphi(x) = x^{\alpha}(1+\theta(x))$ avec $|\theta(x)| < 1/2$ pour $x \in [o,1]$ et θ de classe C^1 sur $[o,1]$, possède aussi la propriété (C'), quel que soit $\alpha \geq 0$.

Lemme 3.7 : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (C') pour la partition $\Omega_i (i=0,..,N)$. Alors il existe des constantes $\delta_o > 0$, K_o et C_o telles que :

pour tout $\delta \leq \delta_o$, tout ouvert J connexe de diamètre $\leq \delta$, coupant $\partial\Omega$, on a, en notant $\tilde{J} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \text{dist}(x,J) \leq K_o\delta\}$: $\forall f \in H^1(\tilde{J} \cap \Omega)$, $\forall i=1,..,N$:

(3.25)

$$\int_{(J\cap\Omega_i)\times(J\cap\Omega_i)} |f(x)-f(y)|^2 \, dx \, dy \leq C_o.\text{mes}\,(J\cap\Omega_i).\delta^2 \, \|f\|^2_{1,\tilde{J}\cap\Omega_i}$$

Démonstration : si $J\cap\Omega_i = \emptyset$ il n'y a rien à démontrer. Si $J\cap\Omega_i \neq \emptyset$ et si $J\cap\Omega \not\subset \Omega_i$, $J\cap\partial\Omega_i \neq \emptyset$; mais aussi si $J\cap\Omega \subset \Omega_i$ l'hypothèse $J\cap\partial\Omega \neq \emptyset$ implique que $J\cap\partial\Omega_i \neq \emptyset$; donc dans tous les cas où $J\cap\Omega_i \neq \emptyset$ J coupe $\partial\Omega_i$ et par le difféomorphisme θ_i on se ramène à démontrer le lemme quand Ω vérifie lui même la condition (C).

Notons alors δ_o et K les constantes de la condition C. Par hypothèse il existe $x_o \in J\cap\partial\Omega$, et $J \subset B(x_o,\delta)$.

Si $\delta \leq \delta_o$, alors pour tout $x \in J\cap\Omega$, le segment $[x,x+\delta Kh]$ est inclus dans Ω (h vecteur unitaire donné par la condition (C)) et si l'on note $J' = \delta Kh + (J\cap\Omega)$, l'enveloppe convexe de J', notée $\tilde{J}'$, est incluse dans Ω. On remarque aussi que $[x,x+\delta Kh]$ et $\tilde{J}'$ sont inclus dans l'ensemble :

$$\{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \text{dist}(y,J) \leq (K+1)\delta\} = \tilde{J}$$

Suivant le lemme 3.2 on peut se contenter d'établir (3.25) pour $f \in H^1(\tilde{J}\cap\Omega) \cap C^1(\tilde{J}\cap\Omega)$. On écrit alors que :

$$f(x)-f(y) = [f(x)-f(x+\delta K.h)] + [f(x+\delta Kh) - f(y+\delta Kh)] + [f(y+\delta Kh) - f(y)]$$

On en déduit que :

(3.26)

$$\int_{(J\cap\Omega)\times(J\cap\Omega)} |f(x)-f(y)|^2 \, dx \, dy \leq 6 \, \text{mes}(J\cap\Omega) \int_{J\cap\Omega} |f(x) - f(x+\delta Kh)|^2 \, dx + \ldots$$

$$+ 3 \iint_{J'\times J'} |f(x') - f(y')|^2 \, dx \, dy.$$

Or on a :

$$f(x) - f(x+\delta Kh) = \int_0^{\delta K} (D_h f)\ (x+th)\ dt$$

où l'on note D_h la dérivation dans la direction h.

On en déduit que :

$$\int_{J\cap\Omega} |f(x)-f(x+\delta Kh)|^2 dx \le \delta^2 K^2 \int_{\widetilde{J\cap\Omega}} |D_h f(z)|^2\ dz.$$

On peut appliquer le lemme 3.3 à la seconde intégrale de (3.26) et l'on obtient, puisque mes J' = mes $(J\cap\Omega)$ l'estimation (3.25) cherchée :

$$\int_{(J\cap\Omega)\times(J\cap\Omega)} |f(x)-f(y)|^2 dx\ dy \le (6K^2+3.2^n)\delta^2.\mathrm{mes}(J\cap\Omega)\ \|f\|^2_{1,\widetilde{J\cap\Omega}}$$

Nous déduisons du lemme la

<u>Proposition 3.8</u> : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ possédant la propriété (C'). Pour $\rho>0$ on note :

$$\Omega_\rho = \{x\in\Omega\ /\ \mathrm{dist}\ (x,\partial\Omega) < \rho\}$$

et pour $\delta>0$ on note encore :

$$\Omega_{\rho,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^n\ /\ \mathrm{dist}(x,\Omega_\rho) < \delta\}.$$

Il existe des constantes λ_o, K et C telles que :

$$\forall\rho > 0,\ \forall\lambda \ge \lambda_o\ :\ N(\lambda;H^m(\Omega),L^2(\Omega_\rho)) \le C\ \mathrm{mes}(\Omega_{\rho,K\lambda^{-1/2m}})\lambda^{n/2m}$$

<u>Démonstration</u> : notons δ_o, K_o et C_o les constantes données par le lemme 3.7 ; fixons $\rho>0$.

Pour $\delta \le \delta_o / \sqrt{n}$ on note encore J_ν le pavé de centre $\delta.\nu$ et de coté δ. Soit A_o l'ensemble des indices ν tels que $J_\nu \cap \partial\Omega \ne \emptyset$; pour $\nu \in A_o$ on note :

$$\tilde{J}_\nu = \{x\in\Omega \ / \ \mathrm{dist}(x,J_\nu) < K_o\sqrt{n}\ \delta\}.$$

On a alors :

$$\tilde{J}_\nu \subset \Omega_{(K_o+1)\sqrt{n}\delta}. \tag{3.27}$$

On pose $\bar{\rho} = \mathrm{Max}\ (\rho,(K_o+2)\ \sqrt{n}\ \delta)$ et on définit A comme étant l'ensemble des $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tels que $J_\nu \cap \Omega_{\bar{\rho}} \neq \emptyset$. On remarque que $A \supset A_o$ et que pour $\nu \in A\backslash A_o$ $J_\nu \subset \Omega$. Pour $\nu \in A$ on a $J_\nu \subset \Omega_{\bar{\rho},\sqrt{n}\ \delta}$ et

$$\mathrm{Card}(A) \leq \delta^{-n}\ \mathrm{mes}(\Omega_{\bar{\rho},\sqrt{n}\delta}). \tag{3.28}$$

On pose : $\omega = \mathrm{Int}\ (\bigcup_{\nu\in A} \bar{J}_\nu) \cap \Omega$.

On a :

$$\Omega_{\bar{\rho}} \subset \omega \subset \Omega_{\bar{\rho},\sqrt{n}\delta}$$

et par (3.27) pour $\nu \in A_o$ on a $\tilde{J}_\nu \subset \omega$.

Notons Ω_i $(i=o,..,N)$ une partition de Ω pour laquelle la condition (C') est satisfaite et à laquelle on a associé par le lemme 3.7 les constantes δ_o, K_o et C_o.

Soit E le sous espace des $f \in H^1(\omega)$ tels que :

i) $\forall\nu \in A\backslash A_o \qquad \int_{J_\nu} f(y)\ dy = 0$

ii) $\forall\nu \in A_o\ ,\ \forall i = 1,..,N \qquad \int_{J_\nu\cap\Omega_i} f(y)\ dy = 0$

E est de codimension majorée par N card(A) dans $H^1(\omega)$.
De plus pour $f \in E$ on a :

$$\forall\nu \in A\backslash A_o \qquad \|f\|^2_{o,J_\nu} \leq \frac{1}{\mathrm{mes}\ J_\nu} \int_{J_\nu\times J_\nu} |f(x)-f(y)|^2\ dx\ dy$$

$$\forall\nu \in A_o, \forall i = 1,..,N : \|f\|^2_{o,J_\nu \cap \Omega_i} \leq \frac{1}{\text{mes} J_\nu \cap \Omega_i} \int_{(J_\nu \cap \Omega_i)\times(J_\nu \cap \Omega_i)} |f(x)-f(y)|^2 dxdy$$

et on déduit des lemmes 3.3 et 3.7

(3.29) $$\forall\nu \in A\backslash A_o \qquad \|f\|^2_{o,J_\nu} \leq 2^n n\delta^2 \|f\|^2_{1,J_\nu}$$

(3.30) $$\forall\nu \in A_o, \ \forall i=1,..,N \qquad \|f\|^2_{o,J_\nu \cap \Omega_i} \leq C_o n.\delta^2 \|f\|^2_{1,\tilde{J}_\nu} .$$

On peut supposer δ_o assez petit pour que : si $\nu \in A_o$, $J_\nu \cap \Omega_o = \emptyset$. On déduit alors de (3.30) que pour $f \in E$:

$$\forall\nu \in A_o \ \|f\|^2_{o,J_\nu} \leq \sum_{i=1}^{N} \|f\|^2_{o,J_\nu \cap \Omega_i} \leq C_o n \ \delta^2 \ N \ \|f\|^2_{1,J_\nu}$$

et avec (3.29) :

$$\forall f \in E \ \|f\|^2_{o,\omega} \leq (C_o N+2^n)n \ \delta^2 \ \|f\|^2_{1,\omega}.$$

On en déduit que :

$$\forall\lambda < [(C_o N+2^n)n \ \delta^2]^{-1} : N(\lambda;H^1(\omega),L^2(\omega)) \leq N \ \text{Card}(A).$$

et avec la proposition (3.1)

(3.31) $$\forall\lambda < C_1 \ \delta^{-2m} : N(\lambda;H^m(\omega),L^2(\omega)) \leq C_2 \ \text{mes}(\Omega_{\overline{\rho},\sqrt{n}\delta}) \ \delta^{-n}$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de n,m et Ω (elles sont indépendantes de ρ et δ).

Si λ est choisit assez grand on peut choisir $\delta = (\frac{2\lambda}{C_1})^{-1/2m}$ de sorte que $\delta \leq \delta_o/\sqrt{n}$. On conclut alors à partir de (3.31) comme pour les propositions 3.4 et 3.5.

IV - PROBLEMES A COEFFICIENTS CONSTANTS SUR UN PAVE

On étudie maintenant le cas des opérateurs à coefficients constants sur les pavés.

IV - 1 Hypothèses - Résultat

Soit a une forme intégrodifférentielle homogène à coefficients constants :

(4.1) $$a(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha,\beta} \int D^{\alpha}u(x)\, \overline{D^{\beta}v(x)}\, dx$$

On suppose que :

(4.2) $$\forall(\alpha,\beta) \quad a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}}$$

Notant $a(\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}\, \xi^{\alpha+\beta}$, on suppose aussi que

(4.3) $$\forall\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \quad a(\xi) > 0.$$

On notera M et c_o des constantes telles que :

(4.4) $$\begin{cases} \forall(\alpha,\beta)\ ,\ |\alpha| = |\beta| = m : |a_{\alpha,\beta}| \leq M \\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n : a(\xi) \geq c_o\ |\xi|^{2m} \end{cases}$$

Enfin on pose $\mu'_a = (2\pi)^{-n} \int_{a(\xi)<1} d\xi$ et on désigne par μ_a la mesure de densité constante μ'_a.

On note $\mathcal{A}$ l'opérateur différentiel :

(4.5) $$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m a_{\alpha\beta}\, D^{\alpha+\beta}$$

Il est clair, par transformation de Fourrier, que pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, la forme a est coercive sur $H^m_o(\Omega)$ (relativement à $L^2(\Omega)$).

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous définissons pour λ réel l'espace :

$$Z_\lambda(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \;/ \mathcal{A}u = \lambda u\}.$$

$Z_\lambda(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^m(\Omega)$ et est muni de la norme $\|.\|_{m,J}$.

Notre but est de démontrer la

<u>Proposition 4.1</u> : Avec les notations précédentes, il existe des constantes C_1 et C_2 qui ne dépendent que de c_o et M, telles que :

pour tout pavé J de $\mathbb{R}^n$ de côté ρ, et pour tous réels λ et μ positifs on a :

i) $N(\mu;Z_\lambda(J),L^2(J)) \leq C_1[1+\rho^{n-1}(\lambda^{(n-1)/2m} + \mu^{(n-1)/2m})]$

ii) $|N(\lambda;H^m_o(J), L^2(J), a) - \mu_a(J)\,\lambda^{n/2m}| \leq C_2\,[1 + \rho^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}]$

IV - 2 Réductions

Nous commençons par nous ramener au cas où $J = (]o,2\pi[)^n$. Nous pouvons toujours supposer que $J = (]o,\rho[)^n$; posons $J_o = (]o,2\pi[)^n$ et $t=\rho/2\pi$.

Soit T l'isométrie de $L^2(J)$ sur $L^2(J_o)$ définie par :

$$(Tu)\ (x) = t^{-n/2}.u(t\ x)$$

T est un isomorphisme de $H^m(J)$ sur $H^m(J_o)$ et de $H^m_o(J)$ sur $H^m_o(J_o)$.

De plus on a :

$$\forall u \in H^m(J) : a(Tu,Tu) = t^{2m}\ a(u,u) \tag{4.6}$$

$$\forall u \in H^m(J) : \mathcal{A}(Tu) = t^{2m}\ T(\mathcal{A}u). \tag{4.7}$$

$$\forall u \in L^2(J) : \|Tu\|_{o,J_o} = \|u\|_{o,J} \tag{4.8}$$

et plus généralement :

$$\forall u \in L^2(J)\ ,\ \forall j=0,..,m : |Tu|_{j,J_o} = t^j\ |u|_{j,J}. \tag{4.9}$$

Nous rappelons le lemme suivant (cf par exemple [1]) :

<u>Lemme 4.2</u> : soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$; pour tout $m\geq 2$ il existe une constante γ, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout f de $H^m(\Omega)$ et tout entier $j=1,..,m-1$, on a :

$$|f|^2_{j,\Omega} \leq \gamma\{\varepsilon^{m-j}|f|^2_{m,\Omega} + (1+\varepsilon^{-j})\ |f|^2_{o,\Omega}\}.$$

Appliquant ce lemme à J_o et utilisant (4.9) on a alors :

<u>Lemme 4.3</u> : il existe une constante γ_o ne dépendant que des entiers n et m, telle que, pour tout pavé J de $\mathbb{R}^n$ de côté ρ, pour tout $f \in H^m(J)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $j=1,..,m-1$, on a :

$$|f|^2_{j,J} \leq \gamma_o\{\varepsilon^{m-j}\ |f|^2_{m,J} + (\varepsilon^{-j} + \rho^{-2j})|f|^2_{o,J}\}.$$

Ces deux lemmes nous serons surtout utiles par la suite ; on en retient maintenant deux choses : tout d'abord qu'il existe une constante γ_1 telle que :

(4.10) $$\forall u \in H^m(J_o)\ \|u\|^2_{m,J_o} \leq \gamma_1(|u|^2_{m,J_o} + |u|^2_{o,J_o})$$

Ensuite on déduit du lemme 4.3 que la forme

$$a_o(u,v) = \sum_{|\alpha|=m} \int (D^\alpha u)\ \overline{(D^\alpha v)}\ dx$$

est coercive sur $H^m(J)$. On a aussi :

(4.11) $$\forall u \in H^m(J)\ :\ a_o(u,u) \leq \|u\|^2_{m,J}$$

(4.12) $$\forall u \in H^m(J)\ :\ a_o(Tu,Tu) = t^{2m}\ a_o(u,u).$$

On déduit de (4.11) que :

$$N(\mu;Z_\lambda(J),\ L^2(J)) \leq N(\mu;Z_\lambda(J),L^2(J),a_o).$$

Par (4.7), T est un isomorphisme de $Z_\lambda(J)$ sur $Z_{t^{2m}\lambda}(J_o)$. Posons

$\lambda_o = t^{2m}\lambda$ et $\mu_o = t^{2m}\mu$; on déduit alors de (4.12) et (4.8) :

$$N(\mu;Z_\lambda(J),L^2(J),a_o) = N(\mu_o;Z_{\lambda_o}(J_o),L^2(J_o),a_o).$$

Or par (4.10) on a :

$$N(\mu_o;Z_{\lambda_o}(J_o),L^2(J_o),a_o) \leq N(\gamma_1(\mu_o+1);Z_{\lambda_o}(J_o),L^2(J_o)).$$

Regroupant on obtient donc que :

(4.13) $$N(\mu;Z_\lambda(J),L^2(J) \leq N(\gamma_1(\mu_o+1);Z_{\lambda_o}(J_o),L^2(J_o)).$$

Plus simplement on tire de (4.6) et (4.8) que :

(4.14) $$N(\lambda;H_o^m(J),L^2(J),a) = N(t^{2m}\,\lambda;H_o^m(J_o),L^2(J_o),a).$$

Il est alors clair que les estimations i) et ii) sur le pavé J, résultent par (4.13) et (4.14), quitte à modifier C_1, des estimations semblables sur J_o.

Nous supposons donc désormais que $J = (]o,2\pi[)^n$. On introduit alors l'espace $H_\#^m(J)$ des fonctions de $H^m(J)$ périodiques. Pour $\nu \in \mathbb{Z}^n$ on pose $\varphi_\nu(x) = (2\pi)^{-n}\,\exp(i\nu.x)$.

Développant les fonctions de $H_\#^m(J)$ en série de Fourier, on voit que a est coercive sur $H_\#^m(J)$, et qu'il existe une constante γ_2 ne dépendant que de c_o telle que :

(4.15) $$\forall u \in H_\#^m(J) \ : \ \gamma_2\|u\|_{m,J}^2 \leq a(u,u) + \|u\|_{o,J}^2.$$

Les φ_ν constituent une base orthonormée de $L^2(J)$ de fonctions propres, pour la valeur propre $a(\nu)$, de l'opérateur $A_\#$, associé au problème variationnel $(H_\#^m(J),\ L^2(J),\ a)$.

On a donc :

$$N(\lambda;H_\#^m(J),L^2(J),a) = \text{Cardinal}\ \{\nu \in \mathbb{Z}^n\ /\ a(\nu) \leq \lambda\}.$$

Pour $t \geq o$ notons $\Gamma_t = \{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ a(\xi) \leq t\}$. On a :

(4.16) $$\text{mes } \Gamma_t = t^{n/2m} \mu_a(J).$$

Pour $\nu \in \mathbb{Z}^n$ soit P_ν le pavé de centre ν de côté 1. On déduit de (4.4) qu'il existe une constante γ_3 ne dépendant que de c_o et M telle que pour tout $\nu \in \mathbb{Z}^n \backslash 0$ et tout $\xi \in P_\nu$, on ait :

$$|a(\nu) - a(\xi)| \leq \gamma_3 \ a(\nu)^{1-1/2m}$$

et

$$|a(\nu) - a(\xi)| \leq \gamma_3 \ a(\xi)^{1-1/2m}.$$

Donc pour $\nu \neq 0$, $\nu \in \Gamma_\lambda$ on a $P_\nu \subset \Gamma_{\lambda(1+\gamma_3 \lambda^{-1/2m})}$; Inversement si $P_\nu \cap \Gamma_{\lambda(1-\gamma_3 \lambda^{-1/2m})} \neq \emptyset$ alors $\nu \in \Gamma_\lambda$.

On en déduit, avec (4.16), qu'il existe une constante C ne dépendant que de M et c_o telle que :

(4.17) $$|N(\lambda; H^m_\#(J), L^2(J), a) - \mu_a(J)\lambda^{n/2m}| \leq C(1+\lambda^{(n-1)/2m}).$$

Pour λ réel on pose :

$$Z'_\lambda = \{u \in H^m_\#(J) \ / \ \forall v \in H^m_o(J) \ : \ a(u,v) = \lambda(u,v)\}.$$

On a $Z'_\lambda = Z_\lambda(J) \cap H^m_\#(J)$ et par (4.15) on a :

$$N(\lambda; Z'_\lambda, L^2(J), a) \leq N(\mu; Z'_\lambda, L^2(J)) \leq N(\mu; Z_\lambda(J), L^2(J))$$

avec $\mu = (\lambda+1)/\gamma_2$.

Il résulte alors de la proposition 2.7 que l'estimation ii) découle de (4.17) et de l'estimation i). En conclusion, nous nous sommes ramenés à démontrer le i) de la proposition 4.1 dans le cas où $J = (]o,2\pi[)^n$.

IV - 3 Formules de Green

Pour estimer $N(\mu; Z_\lambda(J), L^2(J))$, nous utilisons le fait que $Z_\lambda(J)$ est isomorphe à un espace de traces, et nous nous ramenons à des majorations de n-diamètres dans ces espaces de traces. Nous voulons construire des relèvements de traces et pour cela nous transposons l'opérateur $A_{\#}$ et nous avons besoin de formules de Green.

Notations : J est le pavé $(]0,2\pi[)^n$; pour $p=1,..,n$ J_p est la face de J d'équation $x_p = 2\pi$ et pour $p = n+1,...,2n$ J_p est la face de J d'équation $x_{p-n} = 0$.

On introduit les espaces :

$$X = \prod_{|\alpha|\leq m-1} \prod_{p=1}^{2n} H^{m-|\alpha|-1/2}(J_p)$$

$$Y = \prod_{|\alpha|\leq m-1} \prod_{p=1}^{2n} H^{|\alpha|+1/2}(J_p)$$

$$L = \prod_{|\alpha|\leq m-1} \prod_{p=1}^{2n} L^2(J_p).$$

On a les injections continues $X \hookrightarrow L$ et $Y \hookrightarrow L$. Pour u et v dans $\mathcal{D}(\overline{J})$, en intégrant par parties successivement en x_1, x_2 ..., x_n on a :

$$a(u,v) - (\mathcal{A}u,v) = \sum_{|\alpha|\leq m-1} \sum_{p=1}^{2n} (T_p^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(J_p)} \tag{4.18}$$

où les T_p^α sont des opérateurs différentiels d'ordre inférieur à $2m-|\alpha|-1$. On a pour $p=1,..,n$: $T^\alpha_{p+n} = -T_p^\alpha$.

Remarquons que ces opérateurs T_p^α ne sont pas uniquement déterminés; ils dépendent de l'ordre des intégrations par parties. Remarquons aussi que les J_p étant des variétés à bord, on ne peut pas garder dans (4.18) uniquement des dérivations normales en v. Nous considérons pour toute la suite le système des T_p^α fixé.

On définit $\tilde{\tau}$ opérant de $H^{2m}(J)$ dans Y en posant :

$$\tilde{\tau}u = (T_p^\alpha u|_{J_p})_{|\alpha|\leq m-1} \; ; \; p=1,..,2n$$

On a :

(4.19) $$\|\tilde{\tau}u\|_Y \leq C_1 \|u\|_{2m,J}$$

où C_1 ne dépend que de M.

On définit aussi l'opérateur $\tilde{\gamma}$ de $H^m(J)$ dans X :

$$\tilde{\gamma}u = (D^\alpha u_{|J_p})_{|\alpha|\leq m-1} \quad ; \quad p=1,..,2n\, .$$

On déduit de (4.18), par densité de $\mathfrak{D}(J)$ dans $H^m(J)$ et dans $H^{2m}(J)$:

<u>Lemme 4.4</u> : Pour tout u de $H^{2m}(J)$ et tout v de $H^m(J)$ on a :

$$a(u,v) - (\mathcal{A}u,v) = (\tilde{\tau}u,\tilde{\gamma}v)_L$$

Nous cherchons maintenant à prolonger $\tilde{\tau}$ à l'espace :

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \{u \in H^m(J) \,/\, \mathcal{A}u \in L^2(J)\}.$$

Pour cela nous avons besoin du

<u>Lemme 4.5</u> : le noyau dans $H^m(J)$ de $\tilde{\gamma}$ est $H^m_o(J)$.

<u>Démonstration</u> : il est clair que ce noyau contient $\mathfrak{D}(J)$ et, par suite, $H^m_o(J)$.

D'autre part pour $|\alpha| \leq m$, il existe un opérateur σ de $H^m(J)$ dans L tel que :

(4.20)

$$\forall u \in H^m(J)\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{J}) : (D^\alpha u,\varphi)_{L^2(J)} - (u,D^\alpha\varphi)_{L^2(J)} = (\tilde{\gamma}u,\sigma\varphi)_L$$

En effet on établit (4.20) pour $u \in \mathfrak{D}(\overline{J})$ par intégrations par parties ; et par densité (4.20) se prolonge alors à $u \in H^m(J)$.

Il en résulte que pour $u \in \operatorname{Ker} \tilde{\gamma}$, $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 sur $\mathbb{R}^n\backslash J$ est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$. On a donc démontré que $\mathcal{H}^m_o(J) \supset \operatorname{Ker} \tilde{\gamma}$, J étant Lipschitzien, il est connu que $\mathcal{H}^m_o(J) = H^m_o(J)$ et ceci achève la démonstration.

Notons X_o l'espace quotient de $H^m(J)$ par $H^m_o(J)$, et γ l'opérateur de projection de $H^m(J)$ sur X_o ; il existe un relèvement R_o de $\underset{\sim}{\gamma}$, opérateur continu de X_o dans $H^m(J)$ tel que $\gamma \circ R_o = Id_{X_o}$; l'opérateur $\gamma \circ R_o$ est d'après le lemme précédent une injection continue, et cette injection nous permet d'identifier X_o à un sous espace, non fermé, de X.

<u>Lemme 4.6</u> : Il existe un opérateur continu τ de $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ dans X'_o, anti dual de X_o, tel que :

$$\forall u \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}\ \forall v \in H^m(J) : a(u,v) - (\mathcal{A}u,v) = \langle \tau u, \gamma u \rangle_{X'_o \times X_o}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit en effet de poser :

$$\forall \varphi \in X_o : \langle \tau u, \varphi \rangle_{X'_o \times X_o} = a(u, R_o\varphi) - (\mathcal{A}u, R_o\varphi).$$

IV - 4 Deux lemmes

<u>Lemme 4.7</u> : Il existe une constante K, telle que pour tout $\mu \geq o$, il existe un sous espace H de X de codimension majorée par $K.\mu^{(n-1)/2m}$, tel que :

$$\forall u \in H\ ,\ \forall v \in Y\ |(u,v)_L| \leq \mu^{-1/2}\ \|u\|_X\ \|v\|_Y$$

<u>Démonstration</u> : quitte à changer K le lemme résulte de l'assertion suivante :

pour tout entier $k=o,\dots,m-1$, pour tout $\mu \geq o$, il existe un sous espace H de $H^{m-k-1/2}(J')$ de codimension majorée par $K.\mu^{(n-1)/2m}$, tel que :
(4.21)

$$\forall u \in H\ ;\ \forall v \in H^{k+1/2}(J')\ |(u,v)_{L^2(J')}| \leq \mu^{-1/2}\ \|u\|_{m-k-1/2}\ \|v\|_{k+1/2}$$

On a noté J' le pavé $(]o,2\pi[)^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Posons pour simplifier $V = H^{m-k-1/2}(J')$ et $W = H^{k+1/2}(J')$.

W s'injecte dans $L^2(J')$ et est dense dans $L^2(J')$; on peut alors identifier $L^2(J')$ à un sous espace de W' et (4.21) équivaut à l'estimation :

$$N(\mu;V,W') \leq K.\mu^{(n-1)/2m}.$$

Par les lemmes 2.3 et 2.4 on a :

$$N(\mu;V,W') \leq N(\mu^{1-\frac{2k+1}{2m}}; V,L^2(J)) + N(\mu^{\frac{2k+1}{2m}};W,L^2(J))$$

Le lemme résulte alors des estimations : (El Kolli [14])

$$N(\mu;H^s(J'),L^2(J')) \leq K.\mu^{(n-1)/2s}$$

pour s réel positif.

<u>Lemme 4.8</u> : Il existe une constante C ne dépendant que de c_o et M, telle que pour tout $\lambda \geq o$, pour tout $\delta \geq 2\lambda$, l'espace :

$$\{u \in Z_\lambda(J) \;/\; (u,\varphi_\nu)_{L^2(J)} = 0 \text{ pour } a(\nu) \leq \delta\}$$

est de codimension dans $Z_\lambda(J)$ majorée par

$$C(1 + \delta^{(n-1)/2m} + \lambda^{(n-1)/2m})$$

<u>Démonstration</u> : pour $u \in Z_\lambda(J) \subset \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ et pour $v \in H^m(J)$ on a d'après le lemme 4.6 :

(4.22) $$a(u,v) - \lambda(u,v) = \langle \tau u,\gamma v\rangle_{X'_o\times X_o}$$

et avec le lemme 4.5 on obtient que pour $u \in H^{2m}(J)$ on a :

(4.23) $$(u,(\mathcal{A}-\lambda)v) = \langle \tau u,\gamma v\rangle_{X'_o\times X_o} - (\widetilde{\gamma} u,\widetilde{\tau} v)_L$$

en particulier on a :

(4.24) $$(a(\nu)-\lambda)\;(u,\varphi_\nu) = \langle \tau u,\gamma\varphi_\nu\rangle_{X'_o\times X_o} - (\widetilde{\gamma} u,\widetilde{\tau}\varphi_\nu)_L$$

Notons E l'espace engendré par les $\gamma\varphi_\nu$ pour $a(\nu) \leq \delta$, F l'espace engendré par les $\widetilde{\tau}\varphi_\nu$ pour $a(\nu) \leq \delta$ et G l'espace engendré par les φ_ν pour $a(\nu) = \lambda$.

On déduit de (4.17) que :

(4.25) $$\dim G \le C_1(1+\lambda^{(n-1)/2m})$$

C_1 ne dépendant que de c_o et M.

Notant $\tilde{E}$ l'espace engendré par les $\tilde{\gamma\varphi_\nu}$ pour $a(\nu) \le \delta$ on a $\dim E = \dim \tilde{E}$; de plus $\tilde{\gamma\varphi_\nu}$ et $\tilde{\tau\varphi_\nu}$ sont combinaisons linéaires d'exponentielles à (n-1) variables du type $\exp(i\, \hat{\nu}_p . \hat{x}_p)$ où :

$$\hat{\nu}_p = (\nu_1,..,\nu_{p-1},\nu_{p+1},..\nu_n) \text{ et } \hat{x}_p = (x_1,..,x_{p-1},x_{p+1},..x_n).$$

avec $|\hat{\nu}_p|^{2m} \le |\nu|^{2m} \le \frac{1}{c_o} a(\nu) \le \delta/c_o$.

On en déduit que :

(4.26) $$\dim E + \dim F \le C_2(1+\delta^{(n-1)/2m}).$$

C_2 ne dépendant que de c_o.

Soit Z le sous espace des $u \in Z_\lambda(J)$ tels que :

- $\forall\zeta \in E$: $\langle\tau u,\zeta\rangle_{X'_o \times X_o} = 0$

- $\forall\zeta \in F$: $(\tilde{\gamma u}, \tilde{\tau\zeta})_L = 0$

- $\forall\varphi \in G$: $(u,\varphi)_{L^2(J)} = 0.$

Il résulte de (4.25) et (4.26) que la codimension de Z dans $Z_\lambda(J)$ est majorée par $C(1+\delta^{(n-1)/2m} + \lambda^{(n-1)/2m})$.

De plus il résulte de (4.24) que :

$$Z \subset \{u \in Z_\lambda(J) \;/\; (u,\varphi_\nu)_{L^2(J)} = 0 \text{ , pour } a(\nu) \le \delta\}.$$

et le lemme suit.

IV - 5 Démonstration de la proposition 4.1

Soit $\lambda>0$ donné : soit $\delta \geq 2\lambda$ que l'on choisira par la suite. Soit Z l'espace :

$$Z = \{u \in Z_\lambda(J) \ / \ \forall\nu \ , \ a(\nu) \leq \delta \ : \ (u,\varphi_\nu)_{L^2(J)} = 0\}.$$

Soit H un sous espace de X donné par le lemme 4.7 tel que :

$$(4.27) \qquad \forall\xi \in H, \ \forall\zeta \in Y \ : \ |(\xi,\zeta)_L| \leq \delta^{-1/2}\|\xi\|_X \ \|\zeta\|_Y$$

Notons enfin $Z' = \{u \in Z \ / \ \tilde{\gamma} u \in H\}$. Il résulte des lemmes 4.7 et 4.8 que :

$$(4.28) \qquad \operatorname{Codim}_{Z_\lambda(J)} (Z') \leq C(1+\lambda^{(n-1)/2m} + \delta^{(n-1)/2m}).$$

C ne dépendant que de c_o et M.

Pour $u \in Z'$ posons $v = \sum\limits_{a(\nu)>\delta} \dfrac{(u,\varphi_\nu)}{a(\nu)-\lambda} \varphi_\nu$ de sorte que $v \in H^{2m}_{\#}(J)$ et $(\mathcal{A}-\lambda)v=u$.

De plus on a :

$$\|v\|^2_{2m} \leq \gamma \sum \frac{(|\nu|^{2m}+1)^2}{(a(\nu)-\lambda)^2} \ |(u,\varphi_\nu)|^2$$

et puisque pour $(u,\varphi_\nu) \neq 0$ on a $a(\nu) > \delta \geq 2\lambda$ on en déduit que :

$$(4.29) \qquad \|v\|^2_{2m} \leq C_1 \ \|u\|^2_o$$

C_1 ne dépendant que de c_o. De même on a :

$$(4.30) \qquad \|v\|^2_m \leq C_2/\delta \ \|u\|^2_o$$

On remarque encore que :

$$(u,v)_{L^2(J)} = \sum_{a(\nu)>\delta} \frac{|(u,\varphi_\nu)|^2}{a(\nu)-\lambda} \geq 0$$

et on en déduit avec le lemme 4.6 que :

$$(4.31) \ \operatorname{Re} < \tau u,\gamma v> = \operatorname{Re} a(u,v) - \lambda(u,v) \leq \operatorname{Re} a(u,v) \leq C_3 \ \|u\|_m \ \|v\|_m$$

où C_3 ne dépend que de M.

Finalement on tire de (4.23) que :

$$\|u\|_o^2 = (u,(\mathcal{A}-\lambda)v)_{L^2(J)} = \mathrm{Re}<\tau u,\gamma v> - \mathrm{Re}\ (\tilde{\gamma}u,\tilde{\tau}v)$$

et avec (4.31) et (4.27) :

$$\|u\|_o^2 \le C_3\ \|u\|_m\ \|v\|_m + \delta^{-1/2}\ \|\tilde{\gamma}u\|_X\ \|\tilde{\tau}v\|_Y.$$

Utilisant finalement (4.19), (4.29) et (4.30) on obtient que :

(4.32) $$\delta\|u\|_o^2 \le C_4\|u\|_m^2.$$

Donc si μ est donné on choisit $\delta = 2\mu.C_4$ et on tire de 4.32 que :

$$N(\mu;Z_\lambda(J),L^2(J)) \le \mathrm{codim}_{Z_\lambda(J)}\ (Z')$$

et on conclut par l'estimation (4.28).

V - ETUDE ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES

Nous allons donner un sens précis à la formule (1.2) annoncée dans l'introduction et utiliser les estimations du § III pour en déduire la formule (1.1).

V - 1 Décomposition du comportement asymptotique

Soit Ω un ouvert (quelconque) de $\mathbb{R}^n$; soit V un espace de Hilbert vérifiant pour un entier m>0 fixé :

$$(5.1) \qquad H^m_{comp.}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

On note $\mathcal{a}(V)$ l'ensemble des formes intégrodifférentielles

$$(5.2) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \{\sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha,\beta}(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)}\}\, dx$$

qui sont définies, hermitiennes, continues et coercives sur V et telles que:

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} &\forall\alpha,\forall\beta \ : \quad a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}} \in L^\infty_{loc}(\Omega) \\ &\forall\alpha,\forall\beta \ , \ |\alpha|=|\beta|=m \ : \ a_{\alpha,\beta} \in C^0(\Omega) \end{aligned}$$

$L^\infty_{loc}(\Omega)$ désignant l'espace des fonctions mesurables localement bornées dans Ω, et $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues dans Ω.

Pour $a \in \mathcal{a}(V)$ on définit la fonction :

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x)\, \xi^{\alpha+\beta} \qquad ((x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n)$$

Puisque V contient $H^{k}_{comp}(\Omega)$ la coercivité de a sur V implique l'ellipticité de a dans Ω et il existe une fonction $c_0(x)$ strictement positive sur Ω, semi continue inférieurement et telle que :

$$(5.4) \qquad \forall(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \ : \ c_0(x)\, |\xi|^{2m} \leq a(x,\xi)$$

Pour $a \in \mathcal{Q}(V)$ on désigne par μ_a la mesure de densité

$$\mu_a'(x) = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ a(x,\xi) < 1\}$$

et par (5.4) $\mu_a'(x)$ est fini pour tout $x \in \Omega$.

Si ω est un ouvert inclus dans Ω, on note comme au § III $V(\omega)$ l'ensemble des restrictions à ω des éléments de V ; on introduit aussi l'espace:

$$\text{(5.5)} \qquad V_o(\omega) = \{u \in V \ / \ \forall\alpha, \ |\alpha| \leq m : (D^\alpha u)(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \Omega \backslash \omega\}$$

$V_o(\omega)$ s'injecte dans $L^2(\omega)$; notons aussi avec (5.1) que :

$$\text{(5.6)} \qquad \text{si } \omega \subset\subset \Omega : V_o(\omega) = \mathcal{H}_o^m(\omega).$$

Pour étudier le comportement asymptotique des fonctions $N(\lambda;.)$ on introduit une classe de fonctions de comparaison (contenant les fonctions λ^s et $\lambda^s(\operatorname{Log}\lambda)^{s'}$ pour $s>o$) :

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions φ de $]o,\infty[$ dans $]o,\infty[$, croissantes, tendant vers $+\infty$ quand la variable tend vers $+\infty$ et telles que :

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{cases} \forall\mu > 0 \ : \ \varphi^*(\mu) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda\mu) \ / \ \varphi(\lambda) \text{ existe, et est une fonction} \\ \text{continue de } \mu \text{ au point } 1. \end{cases}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{F}$ et $\omega \subset \Omega$ on définit alors :

$$\text{(5.8)} \qquad \begin{cases} N_\varphi^+ (V_o(\omega),a) = \limsup\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\omega),a)}{\varphi(\lambda)} \\ \\ N_\varphi^- (V_o(\omega),a) = \liminf\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\omega),a)}{\varphi(\lambda)} \end{cases}$$

et

$$\text{(5.9)} \qquad B_\varphi^{\pm} (V,a) = \operatorname*{Inf}_{\omega\subset\subset\Omega} N_\varphi^{\pm}(V_o(\Omega\backslash\overline{\omega}),a)$$

$N_\varphi^{\pm}(V_o(\omega),a)$ et $B_\varphi^{\pm}(V,a)$ sont définis comme éléments de $[o,\infty]$. Pour $\omega=\Omega$ on a $V_o(\Omega) = V$ et on notera plus simplement $N_\varphi^{\pm}(V,a) = N_\varphi^{\pm}(V_o(\Omega),a)$.

Nous faisons tout de suite deux remarques : en revenant aux définitions on voit immédiatement que pour $\omega \subset \Omega$:

(5.10) $$N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\omega),a) = N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\Omega)a)$$

Ensuite, utilisant le lemme 2.5 on en déduit que pour $\omega \subset \omega'$

(5.11) $$N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\omega),a) \leq N(\lambda;V_o(\omega'),L^2(\omega'),a)$$

et par conséquent pour $\varphi \in \mathfrak{F}$ on a :

(5.12) $$N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega),a) \leq N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega'),a).$$

Nous nous proposons de démontrer le

Théorème 5.1 : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; soit V un espace de Hilbert vérifiant (5.1) ; alors pour tout $a \in \mathcal{a}(V)$ et pour tout $\varphi \in \mathfrak{F}$ on a :

i) $N^{\pm}_{\varphi}(V,a) = \mu_a(\Omega) + B^{\pm}_{\varphi}(V,a)$ si $\varphi(\lambda) = \lambda^{n/2m}$

ii) $N^{\pm}_{\varphi}(V,a) = B^{\pm}_{\varphi}(V,a)$ si $\lambda^{n/2m} = o(\varphi(\lambda))$.

Remarque : chaque égalité i) ou ii) en contient en fait deux : l'une pour les signes + l'autre pour les signes -. On utilisera systématiquement cette convention par la suite, afin d'alléger les énoncés et les démonstrations.

Nous démontrerons en même temps que le théorème 5.1 le

Théorème 5.2 : sous les mêmes hypothèses que le théorème 5.1 on a:

i) si $\mu_a(\Omega) = +\infty$ alors $\lambda^{n/2m} = o(N(\lambda;V,L^2(\Omega),a))$ et pour tout $\varphi \in \mathfrak{F}$:
$N^{\pm}_{\varphi}(V,a) = B^{\pm}_{\varphi}(V,a)$

ii) $N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) = O(\lambda^{n/2m})$ si et seulement si $B^{+}_{\varphi_o}(V,a) < +\infty$ pour $\varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m}$; et alors on a nécessairement $\mu_a(\Omega) < +\infty$.

Le cas qui n'est pas envisagé dans ce théorème est celui où $\mu_a(\Omega)<+\infty$ et où $B^+_{\varphi_o}(V,a) = +\infty$. Dans [16] et [23] on donne des exemples d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que pour le problème de Neuman pour le Laplacien, ce phénomème a lieu ; et dans un cas limite on obtient un exemple où :

$$\mu_a(\Omega) < +\infty \ ; \ o < B^-_{\varphi_o}(V,a) \leq B^+_{\varphi_o}(V,a) < +\infty$$

Ces exemples sont repris et précisés au § VII.

V - 2 Partitions de Ω

Nous suivons la méthode utilisée par Courant-Hilbert [13] pour le Laplacien : nous considérons des partitions de Ω pour obtenir des estimations de $N(\lambda;V,L^2(\Omega),a)$; nous démontrons dans le même temps les estimations qui nous seront utiles au § VI.

Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 5.1 : Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un espace de Hilbert vérifiant (5.1). Soit $a \in \mathcal{a}(V)$: nous supposons a fortement coercive sur V :

$$\exists\, c_1 > 0 \ , \ \forall u \in V \ : \ c_1 \|u\|^2_V \leq a(u,u) \tag{5.13}$$

Soient J_ν $(\nu \in A)$ des pavés de côté ρ_ν, deux à deux disjoints et tels que $\overline{J_\nu} \subset \Omega$. L'ensemble d'indices A est supposé fini. On pose

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega' = \left(\bigcup_{\nu\in A} J_\nu\right) \subset\subset \Omega \\ \\ \omega = \Omega \setminus \overline{\Omega}' \end{array}\right. \tag{5.14}$$

De l'injection $V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega)$, on déduit avec (5.13) qu'il existe une constante c_2 telle que :

$$\forall u \in V \ : \ c_2 \|u\|^2_{m,\Omega'} \leq a(u,u) \tag{5.15}$$

On en déduit alors par la réciproque de l'inégalité de Garding (cf [1] par exemple) que :

(5.16) $$\forall (x,\xi) \in \Omega' \times \mathbb{R}^n \ : \ c_2 |\xi|^{2m} \leq a(x,\xi).$$

On introduit maintenant les quantités suivantes :

(5.17) $$M = \operatorname*{Sup}_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega')}$$

(5.18) $$\eta = \frac{1}{c_2} \operatorname*{Sup}_{\nu\in A} \ \operatorname*{Sup}_{|\alpha|=|\beta|=m} \ \operatorname*{Sup}_{(x,y)\in J_\nu \times J_\nu} |a_{\alpha,\beta}(x) - a_{\alpha,\beta}(y)|$$

(5.19) $$\rho = \operatorname*{Inf}_{\nu\in A} \rho_\nu .$$

On suppose dans toute la suite que $\rho \leq 1$.

Pour simplifier l'exposé on convient de noter $\gamma, \gamma_1, \ldots$, des constantes numériques qui ne dépendent que de n et m, et C, $C_1, \ldots$ des constantes qui ne dépendent que de c_1, c_2, M, n et m.

La première étape consiste à approcher a par une forme $\tilde{a}$ à coefficients constants par morceaux ; on définit alors :

(5.20) $$\begin{cases} \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) = a_{\alpha,\beta}(x) & \text{si } x \in \omega \\ \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega' \text{ et si } |\alpha|+|\beta| < 2m \\ \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{\text{mes } J_\nu} \displaystyle\int_{J_\nu} a_{\alpha,\beta}(y)\, dy & \text{si } x \in J_\nu \text{ et si } |\alpha|=|\beta|=m \end{cases}$$

Les $\tilde{a}_{\alpha,\beta}$ sont définis p.p et pour $|\alpha|=|\beta|=m$, $\tilde{a}_{\alpha,\beta}$ est constant sur chaque pavé J_ν. On considère la forme :

(5.21) $$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega \{ \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \tilde{a}_{\alpha,\beta}(x) \, D^\alpha u \, \overline{D^\beta v} \} \, dx.$$

et nous avons :

<u>Lemme 5.3</u> : $\tilde{a}$ est définie, continue, hermitienne sur V. De plus il existe des constantes C_1 et γ_1 telles que pour tout $\delta \in]o,1[$ et tout $u \in V$ on ait :

$$|a(u,u) - \tilde{a}(u,u)| \leq \gamma_1(\eta+\delta)\ a(u,u) + C_1(\delta^{1-2m}+\rho^{1-2m})\ \|u\|^2_{o,\Omega}$$

<u>Démonstration</u> : On pose

$$b_o(u,v) = \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (a_{\alpha,\beta} - \tilde{a}_{\alpha,\beta})\ D^\alpha u\ \overline{D^\beta v}\ dx.$$

$$b_1(u,v) = \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} a_{\alpha,\beta}\ D^\alpha u\ \overline{D^\beta v}\ dx.$$

Puisque $V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega)$ b_o et b_1 sont clairement définies et continues sur V ; de plus elles sont hermitiennes puisque $a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}}$.
On a $a = \tilde{a}+b_o+b_1$ et il est alors clair que $\tilde{a}$ est bien définie sur V et qu'elle est hermitienne et continue. De plus on a :

$$|b_o(u,u)| \leq c_2\ \eta\ \gamma_1\ |u|^2_{m,\Omega'} \leq \gamma_1\eta\ a(u,u)\ .$$

et

$$|b_1(u,u)| \leq \gamma_2\ M \sum_{\nu\in A}\ \sum_{\substack{j,j'\leq m\\ j+j'<2m}} |u|_{j,J_\nu}\ |u|_{j',J_\nu}$$

On déduit des résultats rappelés au lemme 4.3 que :

$$\forall u \in H^m(J_\nu)\ ,\ \forall\delta \in]o,1]\ ,\ \forall\ j=o,..,m-1\ :$$

$$|u|^2_{j,J_\nu} \leq \delta|u|^2_{m,J_\nu} + \gamma_3[\rho_\nu^{-2j} + \delta^{-j/m-j}]\ |u|_{o,J_\nu}$$

et par suite :

$$|u|^2_{j,J_\nu} \leq \delta|u|^2_{m,J_\nu} + \gamma_3[\rho^{2-2m} + \delta^{1-m}]\ |u|^2_{o,J_\nu}$$

On en déduit que pour j<m et j'<m on a :

$$|u|_{j,J_\nu}\ |u|_{j',J_\nu} \leq \delta|u|^2_{m,J_\nu} + \gamma_3\ [\rho^{2-2m}+\delta^{1-m}]\ |u|^2_{o,J_\nu}$$

et pour j < m on a :

$$|u|_{j,J_\nu}\ |u|_{m,J_\nu} \leq \delta|u|^2_{m,J_\nu} + \gamma_4\ [\delta^{-1}\ \rho^{2-2m} + \delta^{1-2m}]\ |u|^2_{o,J_\nu}$$

Notant que $\delta^{-1}\ \rho^{2-2m} \leq \delta^{1-2m} + \rho^{1-2m}$ on achève la démonstration du lemme.

On déduit de ce lemme que si $\gamma_1\eta < 1$ $\widetilde{a}$ est coercive sur V. En particulier si $\gamma_1\eta < 1/4$, choisissant $\delta = 1/4\ \gamma_1$ on a :

(5.22) $$\forall u \in V\ a(u,u) \leq 2[\widetilde{a}(u,u) + \tau\|u\|^2_{o,\Omega}]$$

avec $\tau = C_1[\rho^{1-2m} + \gamma_1']$

Le lemme suivant résulte du lemme 5.3 et des propriétés (2.6), (2.7) et (2.8) des fonctions $N(\lambda',.)$

<u>Lemme 5.4</u> : On suppose que $\gamma_1\eta < 1/4$; alors pour tout $\delta\in]o,1/4\ \gamma_1[$ on a les estimations :

$$N(\lambda';V,L^2(\Omega),\widetilde{a}) \leq N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) \leq N(\lambda'';V,L^2(\Omega),\widetilde{a})$$

avec

$$\lambda' = \lambda(1-\gamma_1(\eta+\delta)) - C_1[\rho^{1-2m} + \delta^{1-2m}]$$

$$\lambda'' = (1+\gamma_1(\eta+\delta))\ (\lambda+C_1(\rho^{1-2m}+\delta^{1-2m})).$$

Nous remarquons aussi :

<u>Lemme 5.5</u> : Si $\gamma_1\eta < 1$, alors on a :

$$(1-\gamma_1\eta)^{n/2m}\ \mu_{\widetilde{a}}(\Omega') \leq \mu_a(\Omega') \leq (1+\gamma_1\eta)^{n/2m}\ \mu_{\widetilde{a}}(\Omega')$$

<u>Démonstration</u> : pour $x \in \Omega'$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$|\widetilde{a}(x,\xi)-a(x,\xi)| \leq \gamma_1 \eta c_2|\xi|^{2m} \leq \gamma_1\eta\, a(x,\xi)$$

la constante γ_1 étant la même que celle trouvée lors de la démonstration du lemme 5.3. On en déduit que pour $x\in\Omega'$ on a :

$$(1+\gamma_1\eta)^{-n/2m}\,\mu'_a(x) \leq \mu'_{\widetilde{a}}(x) \leq (1-\gamma_1\eta)^{-n/2m}\,\mu'_a(x)$$

et le lemme suit.

On suppose maintenant pour toute la suite de ce paragraphe que $\gamma_1\eta < 1/4$ de sorte que $\widetilde{a}$ est coercive sur V et que (5.22) a lieu.

On note maintenant $W_o = H^m_o(\Omega')$; prolongeant les fonctions de $H^m_o(J_\nu)$ par 0 on identifie W_o à $\underset{\nu\in A}{\oplus} H^m_o(J_\nu)$, la somme étant orthogonale pour $\widetilde{a}$ et pour le produit scalaire L^2 ; on identifie aussi W_o à un sous espace de V et on a :

$$W_o \oplus V_o(\omega) \subset V$$

la somme étant ici aussi, orthogonale pour $\widetilde{a}$ et dans $L^2(\Omega)$. On déduit de la proposition 2.8 et du lemme 2.5, compte tenu du fait que sur $V_o(\omega)$, a et $\widetilde{a}$ coincident, le

<u>Lemme 5.6</u> : pour tout $\lambda\geq o$ on a :

$$N(\lambda);W_o,L^2(\Omega'),\widetilde{a}) + N(\lambda;V_o(\omega),L^2(\omega),a) \leq N(\lambda;V,L^2(\Omega),\widetilde{a}).$$

On déduit aussi de la proposition 2.8 et de l'estimation ii) de la proposition 4.1 le

<u>Lemme 5.7</u> : Il existe une constante C_2 ne dépendant que de M et de c_2 telle que pour tout $\lambda\geq o$ on ait :

$$|N(\lambda;W_o,L^2(\Omega'),\widetilde{a}) - \mu_{\widetilde{a}}(\Omega')\,\lambda^{n/2m}| \leq C_2 \sum_{\nu\in A} \{1+\rho_\nu^{n-1}\,\lambda^{(n-1)/2m}\}.$$

Démonstration : on déduit de (5.20) et (5.16) que :

$$\forall \nu \in A, \ \forall (x,\xi) \in J_\nu \times \mathbb{R}^n : c_2 |\xi|^{2m} \leq \tilde{a}(x,\xi).$$

Sur chaque pavé J_ν la forme $\tilde{a}$ est du type considéré au IV et nous pouvons alors appliquer la proposition 4.1.

Suivant la proposition 2.7 il est naturel d'introduire pour $\lambda \geq o$ l'espace :

$$Z_\lambda = \{u \in V \ / \ \forall v \in W_o : \tilde{a}(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)}\}.$$

Nous avons alors le

Lemme 5.8 : il existe des constantes C_3 et C_4, qui ne dépendent que de c_1 , c_2 et M telles que pour tout $\lambda \geq o$ on ait :

$$N(\lambda ; Z_\lambda, L^2(\Omega), \tilde{a}) \leq N((\lambda+\tau)\, C_3 \ ; \ V, \ L^2(\omega)) + C_4 \sum_{\nu \in A} \{1 + \rho_\nu^{n-1} (\lambda+\tau)^{n-1/2m}\}.$$

(τ est défini en (5.22) et la notation $N(\mu;V,L^2(\omega))$ a été introduite au § III en (3.2)).

Démonstration : pour $\nu \in A$ on note :

$$Z_\lambda(J_\nu) = \{u \in H^m(J_\nu) \ / \ \forall v \in H_o^m(J_\nu) : \tilde{a}(u,v) = \lambda(u,v)\}.$$

Il est clair que pour $u \in Z_\lambda$, $u|_{J_\nu} \in Z_\lambda(J_\nu)$.

Fixons $\mu \geq o$; pour tout $\nu \in A$, il existe un sous espace E_ν de $Z_\lambda(J_\nu)$ de codimension $N(\mu; Z_\lambda(J_\nu), L^2(J_\nu))$ tel que :

$$\forall \zeta \in E_\nu : \mu \|\zeta\|^2_{o,J_\nu} \leq \|\zeta\|^2_{m,J_\nu} \tag{5.23}$$

De plus il existe un sous espace E_o de codimension $N(\mu;V,L^2(\Omega))$ dans V tel que :

$$\forall u \in E_o : \mu \|u\|^2_{o,\omega} \leq \|u\|^2_V \tag{5.24}$$

Soit alors F le sous espace des u de Z_λ, tels que $u \in E_o$ et tels que pour tout $\nu \in A$ $u_{|J_\nu} \in E_\nu$. F est de codimension finie dans Z_λ et :

$$(5.25) \qquad \mathrm{codim}_{Z_\lambda}(F) \leq N(\mu;V,L^2(\omega)) + \sum_{\nu\in A} N(\mu;Z_\lambda(J_\nu),L^2(J_\nu)).$$

Pour $u \in F$, on écrit (5.24) et pour $\nu \in A$ l'inégalité (5.23) appliquée à $u_{|J_\nu}$; sommant ces inégalités on obtient compte tenu de (5.13), (5.15) et (5.22) que :

$$\forall u \in F : \mu\|u\|^2_{o,\Omega} \leq 2(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}) \, [\tilde{a}(u,u)+\tau\|u\|^2_{o,\Omega}].$$

Prenant $C_3 > 2 \dfrac{c_1+c_2}{c_1c_2}$, on en déduit que :

$$N(\mu/C_3-\tau;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a}) \leq \mathrm{codim}_{Z_\lambda}(F)$$

et avec (5.25) le lemme résulte de l'estimation i) de la proposition 4.1.

Nous utiliserons aussi une estimation un peu différente de $N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a})$; notons Ω'' l'intérieur de $\overline{\Omega'}$, et introduisons un ouvert $\omega'' \subset \Omega$ tel que $\Omega\backslash\omega''$ soit un compact inclus dans Ω''. Nous avons alors :

<u>Lemme 5.9</u> : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}$ telle que $\lambda^{(n-1)/2m} = o\,(\varphi(\lambda))$ on a :

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a}) \;/\; \varphi(\lambda) \leq N^+_\varphi(V_o(\omega''),\tilde{a}).$$

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} N(\lambda;Z_\lambda,L^2(\Omega),\tilde{a}) \;/\; \varphi(\lambda) \leq N^-_\varphi(V_o(\omega''),\tilde{a}).$$

<u>Démonstration</u> : Choisissons d'abord $\chi \in \mathcal{D}(\Omega'')$ valant 1 sur $\Omega\backslash\omega''$ et $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $1-\zeta \in \mathcal{D}(\Omega'')$, de sorte que $\chi^2 + \zeta^2 = 1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Puisque $V \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega)$, pour $u \in V$, χu et $(1-\zeta)u$ sont dans $H^m_{comp}(\Omega)$ et par conséquent χu et ζu sont dans V. Tenant compte de la relation $\chi^2+\zeta^2=1$, on obtient qu'il existe une constante K_1 dépendant de M et des dérivées de χ et ζ telle que :

(5.26) $\forall u \in V : |\tilde{a}(u,u)-\tilde{a}(\chi u,\chi u)-\tilde{a}(\zeta u,\zeta u)| \leq K_1 \|u\|_{m,\Omega''} \|u\|_{m-1,\Omega''}$

Par (5.22) la forme $\tilde{a}+\tau$ est positive et on en déduit que :

(5.27) $$\tilde{a}(\zeta u,\zeta u) \leq \tilde{a}(u,u) + K_1\|u\|_{m,\Omega''} \|u\|_{m-1,\Omega''} + \tau\|u\|^2_{o,\Omega}$$

Ω'' étant Lipschitzien, il existe une constante K_2 telle que :

$$\forall\varepsilon \in]o,1], \forall u \in H^m(\Omega'') : \|u\|^2_{m-1,\Omega''} \leq \varepsilon\|u\|^2_{m,\Omega''} + K_2\, \varepsilon^{1-m} \|u\|^2_{o,\Omega''}$$

Utilisant (5.15) et (5.22) on en déduit alors avec (5.27) que pour tout $\varepsilon \in]o,1]$ il existe t_ε tel que :

(5.28) $$\forall u \in V : \tilde{a}(\zeta u,\zeta u) \leq (1+\varepsilon)\, \tilde{a}(u,u) + t_\varepsilon\|u\|^2_{o,\Omega}$$

Fixons $\varepsilon>o$; soit $\lambda\geq o$; il existe un sous espace E_o de $V_o(\omega'')$ de codimension $N(\lambda;V_o(\omega''),L^2(\omega''),\tilde{a})$ tel que :

(5.29) $$\forall u \in E_o : \lambda\|u\|^2_{o,\omega''} \leq \tilde{a}(u,u)$$

Posons $\mu = \dfrac{2\lambda}{\varepsilon\, c_1}$; comme au lemme précédent, on considère pour tout $\nu\in A$ un sous espace E_ν de $Z_\lambda(J_\nu)$ de codimension $N(\mu;Z_\lambda(J_\nu),L^2(J_\nu))$ tel qu'on ait encore (5.23).

Notons F l'espace des $u\in Z_\lambda$ tels que pour tout $\nu\in A$ on ait $u_{|J_\nu} \in E_\nu$ et tels que $\zeta u \in E_o$; On déduit alors de (5.28) et (5.29) que pour $u\in F$ on a :

(5.30) $$\lambda\|u\|^2_{o,\omega} \leq \lambda\|\zeta u\|^2_{o,\omega''} \leq (1+\varepsilon)\, \tilde{a}(u,u) + t_\varepsilon\|u\|^2_{o,\Omega}$$

Par conséquent on voit avec (5.23) (5.15) et (5.22) que pour tout $u\in F$ on a :

$$\lambda\|u\|^2_{o,\Omega} \leq (1+2\varepsilon)\, \tilde{a}(u,u) + (t_\varepsilon+\tau)\, \|u\|^2_{o,\Omega}$$

Il en résulte que pour $t'_\varepsilon > t_\varepsilon+\tau$

(5.31) $$N((\lambda-t'_\varepsilon)/1+2\varepsilon \; ; \; Z_\lambda, L^2(\Omega), \tilde{a}) \leq \operatorname{codim}_{Z_\lambda}(F)$$

Or on a grâce à la proposition 4.1 :

$$\operatorname{codim}_{Z_\lambda}(F) \leq N(\lambda; V_o(\omega''), L^2(\omega''), \tilde{a}) + \frac{1}{\varepsilon}\, O(\lambda^{(n-1)/2m})$$

On déduit alors de (5.31) que si $\lambda^{(n-1)/2m} = o(\varphi(\lambda))$ pour $\varphi \in \mathfrak{F}$ on a, avec une notation évidente :

$$\overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(Z_\lambda, \tilde{a}) \leq \varphi^*(1+2\varepsilon)\, \overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(V_o(\omega''), \tilde{a}).$$

Or cette inégalité a lieu pour tout $\varepsilon \in]o,1]$; par conséquent faisant tendre ε vers 0 on déduit de la continuité de φ^* que

$$\overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(Z_\lambda, \tilde{a}) \leq \overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(V_o(\omega''), \tilde{a})$$

c'est à dire le lemme.

<u>V - 3 Démonstration des théorèmes 5.1 et 5.2</u>

Nous nous plaçons sous les hypothèses de ces théorèmes et sans nuire à la généralité nous supposons que a est fortement coercive sur V. Soient $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$; on pose $\omega_1 = \Omega\backslash\bar{\Omega}_1$ et $\omega_2 = \Omega\backslash\bar{\Omega}_2$. Avec ces notations nous avons alors :

<u>Proposition 5.10</u> :

i) pour $\varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m}$ on a :

$$\mu_a(\Omega_2) + \overset{+}{\underset{\varphi_o}{N^-}}(V_o(\omega_1), a) \leq \overset{+}{\underset{\varphi_o}{N^-}}(V, a) \leq \mu_a(\Omega_1) + \overset{+}{\underset{\varphi_o}{N^-}}(V_o(\omega_2), a)$$

ii) pour $\varphi \in \mathfrak{F}$ tel que $\lambda^{n/2m} = O(\varphi(\lambda)$ on a :

$$\overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(V_o(\omega_1), a) \leq \overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(V, a) \leq \overset{+}{\underset{\varphi}{N^-}}(V_o(\omega_2), a)$$

<u>Démonstration</u> : notons d'abord qu'il existe c'_2 tel que :

(5.32) $$\forall u \in V : c'_2 \|u\|^2_{m,\Omega_1} \leq a(u,u)$$

Fixons $\varepsilon \in]o,1/4[$; les $a_{\alpha,\beta}$ pour $|\alpha|=|\beta|=m$ étant uniformément continus sur $\overline{\Omega}_1$ il existe $\rho>o$ tel que :

(5.33)
$$\forall (x,y) \in \overline{\Omega}_1\times\overline{\Omega}_1 \ , \ |x-y| \leq \sqrt{n}\ \rho \Rightarrow |a_{\alpha,\beta}(x)-a_{\alpha,\beta}(y)| \leq c'_2\ \varepsilon/\gamma_1$$

Pour $\nu \in \mathbb{Z}^n$ considérons J_ν le pavé de $\mathbb{R}^n$ de centre $\rho\nu$ et de côté ρ. Notons A l'ensemble des indices ν tels que $J_\nu \subset \Omega_1$. Comme en (5.14) on pose $\Omega' = \bigcup_{\nu\in A} J_\nu$ et Ω'' désigne l'intérieur de $\overline{\Omega}'$; nous pouvons supposer que $\rho\leq 1$ et que ρ est assez petit pour que $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega''$.

On pose aussi $\omega = \Omega\backslash\overline{\Omega}'$ et on a alors :

(5.34) $$\begin{cases} \overline{\Omega}_2 \subset \Omega'' \subset \Omega_1 \\ \omega_1 \subset \omega \subset \omega_2 \end{cases}$$

Il est clair que la constante c_2 de (5.15) peut être minorée par la constante c'_2 de (5.32), et reportant (5.33) dans (5.18) on a alors $\eta \leq \varepsilon/\gamma_1$.

On définit $\tilde{a}$ par (5.21) et reprenant les notations du § V.2 on déduit du lemme 5.7 que :

(5.35) $$N^{\pm}_{\varphi_o}(W_o,\tilde{a}) = \mu_{\tilde{a}}(\Omega') \qquad \text{pour } \varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m} .$$

Pour éviter de séparer les cas i) et ii) on introduit la convention suivante : on pose

$$\chi_\varphi = 1 \qquad \text{si } \varphi(\lambda) = \varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m}$$

et

$$\chi_\varphi = 0 \qquad \text{si } \lambda^{n/2m} = o(\varphi(\lambda)).$$

On déduit alors de (5.35) et du lemme 5.6 que :

(5.36) $$N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega),a) + \mu_{\tilde{a}}(\Omega').\chi_{\varphi} \leq N^{\pm}_{\varphi}(V,\tilde{a})$$

De même on déduit du lemme 5.9 et de 5.35, grâce à la proposition 2.7 :

(5.37) $$N^{\pm}_{\varphi}(V,\tilde{a}) \leq \mu_{\tilde{a}}(\Omega').\chi_{\varphi} + N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega_2),\tilde{a})$$

Nous appliquons maintenant le lemme 5.4 en choisissant $\delta = \varepsilon/\gamma_1$; on obtient alors :

$$\varphi^*(1-2\varepsilon)\ N^{\pm}_{\varphi}(V,\tilde{a}) \leq N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \leq \varphi^*(1+2\varepsilon)\ N^{\pm}_{\varphi}(V,\tilde{a}).$$

De même on a :

$$N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega_2),\tilde{a}) \leq \varphi^*(1+2\varepsilon)\ N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega_2),a).$$

Reportant dans (5.36) et (5.37), on déduit de ces encadrements et du lemme 5.5 que :

$$\begin{cases} \varphi^*(1-2\varepsilon)\ [N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega),a) + \varphi^*(1-\varepsilon)\ \mu_a(\Omega')\ \chi_{\varphi}] \leq N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \\ N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \leq \varphi^*(1+2\varepsilon)\ [\varphi^*(1+\varepsilon)\ \mu_a(\Omega')\ \chi_{\varphi} + \varphi^*(1+2\varepsilon)\ N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega_2),a)] \end{cases}$$

Tenant compte des encadrements (5.34) (cf aussi 5.12) on a :

$$\begin{cases} [\varphi^*(1-2\varepsilon)]^2\ \{N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega_1),a) + \mu_a(\Omega_2)\ \chi_{\varphi}\} \leq N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \\ N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \leq [\varphi^*(1+2\varepsilon)]^2\ \{N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\omega_2),a) + \mu_a(\Omega_1)\ \chi_{\varphi}\}. \end{cases}$$

Ces estimations ont lieu pour tout $\varepsilon \in]0,1/4[$, et faisant tendre ε vers 0, on obtient la proposition 5.10.

Il nous reste à déduire les théorèmes 5.1 et 5.2 de la proposition 5.10. Reprenant la notation χ_{φ} introduite ci-dessus on déduit de la proposition que pour $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ on a :

$$N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \leq \mu_a(\Omega)\ \chi_{\varphi} + N^{\pm}_{\varphi}(V_o(\Omega\backslash\overline{\Omega}_1),a)$$

$$N^{\pm}_{\varphi}(V,a) \geq \mu_a(\Omega_1)\ \chi_{\varphi} + B^{\pm}_{\varphi}(V,a).$$

Prenant les bornes respectivement inférieure et supérieure pour $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ on obtient le théorème 5.1.

Maintenant si $N^{+}_{\varphi_o}(V,a) < +\infty$ pour $\varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m}$ alors pour tout $\omega \subset \Omega$ $N^{+}_{\varphi_o}(V_o(\omega),a) < +\infty$ et $B^{+}_{\varphi_o}(V,a) < +\infty$. Inversement, si $B^{+}_{\varphi_o}(V,a) < +\infty$, il existe $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ tel que $N^{+}_{\varphi_o}(V_o(\Omega\backslash\overline{\Omega}_1),a) < +\infty$; puisque $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, $\mu_a(\Omega_1)<+\infty$.

Enfin si $\mu_a(\Omega) = +\infty$, on a d'après le théorème 5.1 $N^{-}_{\varphi_o}(V,a) = +\infty$ et donc $\lambda^{n/2m} = o(N(\lambda;V,L^2(\Omega),a))$ et on achève ainsi de démontrer le théorème 5.2.

<u>V - 4 Applications aux problèmes elliptiques</u>

On déduit des théorèmes 5.1 et 5.2 le

<u>Corollaire 5.11</u> : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit V un espace de Hilbert vérifiant (5.1). On suppose que pour une forme a_o de $\mathcal{a}(V)$ on a :

$$B^{+}_{\varphi_o}(V,a_o) = 0 \qquad \text{pour } \varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m}.$$

Alors pour toute forme a de $\mathcal{a}(V)$, le spectre de l'opérateur défini par le problème variationnel $(V,L^2(\Omega),a)$ est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j. Notant $N(\lambda)$ le nombre de ces valeurs propres inférieures à λ on a :

$$N(\lambda) \sim \mu_a(\Omega)\ \lambda^{n/2m} \qquad (\lambda\to+\infty)$$

où $\mu_a(\Omega) \in]o,\infty[$.

<u>Démonstration</u> : la seule chose qu'il nous reste à vérifier est que si $B^{+}_{\varphi_o}(V,a_o) = 0$ pour $a_o \in \mathcal{a}(V)$ alors pour toute forme a de $\mathcal{a}(V)$ $B^{+}_{\varphi_o}(V,a)=0$. Or ceci résulte immédiatement de la continuité et de la coercivité des formes a et a_o.

Théorème 5.12 : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit V un espace de Hilbert contenant $H^m_{comp}(\Omega)$; on suppose que l'on est dans l'une des situations suivantes :

1 - $V \hookrightarrow \mathcal{H}^m_o(\Omega)$ et Ω est de mesure de Lebesgue finie.

2 - Ω est borné, $\partial\Omega$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$ et $V \hookrightarrow \mathcal{H}^m(\Omega)$.

3 - Ω est borné, $\partial\Omega$ de mesure nulle, Ω vérifie la condition (C') du §III et $V \hookrightarrow H^m(\Omega)$.

alors pour toute forme $a \in \mathcal{a}(V)$, $\mu_a(\Omega) \in]o,\infty[$, et le nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres inférieure à λ de l'opérateur associé au problème variationnel $(V, L^2(\Omega), a)$ vérifie :

$$N(\lambda) \sim \mu_a(\Omega).\lambda^{n/2m} \qquad (\lambda \to +\infty)$$

Démonstration : Notons W l'espace $\mathcal{H}^m_o(\Omega)$, $\mathcal{H}^m(\Omega)$ ou $H^m(\Omega)$ suivant que l'on est dans la situation 1, 2 ou 3. On a donc $V \hookrightarrow W$; et pour $\omega \subset \Omega$ on a aussi $V_o(\omega) \hookrightarrow W_o(\omega)$ la norme de l'injection étant majorée indépendemment de $\omega \subset \Omega$. On en déduit que pour $a \in \mathcal{a}(V)$ en notant a_o le produit scalaire de W on a :

$$B^+_{\varphi_o}(V,a) \leq \text{Cte } B^+_{\varphi_o}(W,a_o) \qquad \text{avec } \varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2m}.$$

Or il résulte aisément des propositions 3.4, 3.5 et 3.8 que

$$B^+_{\varphi_o}(W,a_o) = 0.$$

et on conclut par le corollaire 5.11.

Exemples 1 : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue finie.
On note $\delta(x)$ la distance de $x \in \Omega$ à $\partial\Omega$.
On considère la forme :

$$a(u,v) = \int_\Omega \{ \sum_{i=1}^n D_i u \, \overline{D_i v} + \delta^{-\alpha}_{(x)} \, u.\overline{v} \} \, dx.$$

avec $\alpha \geq 0$.

Soit V le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\{a(u,u)\}^{1/2}$. Nous sommes dans le cas 1 du théorème ; et nous avons donc :

$$N(\lambda) \sim \lambda^{n/2}\ \mu_a(\Omega)$$

l'opérateur étant ici une réalisation de $-\Delta + (\delta(x))^{-\alpha}$

2 : Si l'on suppose seulement les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ continus par morceaux pour $|\alpha|=|\beta|=m$, i.e. continus sur un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ avec $\mathrm{mes}(\Omega\setminus\Omega')=0$ on se ramène à un problème aux limites sur Ω' (problème de transmission).

3 : Ce théorème est bien, comme annoncé, une extension du résultat classique aux problèmes irréguliers. Noter que pour le problème de Drichlet (Cas 1 du théorème) aucune hypothèse de régularité sur Ω n'est faite. Pour des conditions aux limites générales, on rappelle (Cf § III) que la condition (C') est vérifiée par une classe très large d'ouverts, contenant des ouverts très irréguliers (pointes effilées, etc...).

<u>V - 5 Application à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés</u>

Il s'agit d'opérateurs elliptiques dans Ω pouvant dégéner dans les dérivations normales sur $\partial\Omega$; ce sont les opétateurs envisagés en [4] et on renvoie à [4] pour une description précise des opérateurs.

a) <u>Le modèle</u> : pour deux entiers $1 \leq \ell \leq n$ et pour $\delta \in (]0,\infty[)^n$ on note $J_{\ell,\delta}$ le pavé de $\mathbb{R}^n$:

$$J_{\ell,\delta} =]0,\delta_1[\times\cdots\times]0,\delta_\ell]\times]-\delta_{\ell+1},\delta_{\ell+1}[\times\cdots\times]-\delta_n,\delta_n[$$

et pour $\sigma \in]0,2[$ on définit l'espace :

$$V^\sigma(J_{\ell,\delta}) = \{u\in L^2(J_{\ell,\delta}) \ / \ x_j^{\sigma/2} D_j u \in L^2(J_{\ell,\delta}) \text{ si } j\leq\ell$$

et $D_j u \in L^2(J_{\ell,\delta})$ si $\ell<j\leq n\}$.

On munit cet espace de la norme hilbertienne évidente ; notant a le produit scalaire on a :

Lemme 5.13 : on a $\mu_a(J_{\ell,\delta}) < +\infty$ et

$$N(\lambda;V^\sigma(J_{\ell,\delta}) \;,\; L^2(J_{\ell,\delta}),a) \sim \mu_a(J_{\ell,\delta})\,\lambda^{n/2}$$

Démonstration : L'opérateur associé à (V^σ,L^2,a) admet une décomposition tensorielle (cf [25]) : ses fonctions propres sont de la forme :

(5.38) $$\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n)$$

pour la valeur propre

(5.39) $$\lambda = \lambda_1+\ldots+\lambda_n$$

où φ_j $(j=1,..,n)$ est fonction propre pour la valeur propre λ_j d'un opérateur différentiel à une variable associé à un problème variationnel d'un des deux types suivant :

(5.40) $$(V^\sigma(o,\delta),L^2(o,\delta),a) \qquad (\text{cas où } j\leq\ell)$$

(5.41) $$(H^1(-\delta,\delta),L^2(o,\delta),a) \qquad (\text{cas où } j>\ell)$$

a désignant à chaque fois le produit scalaire de l'espace variationnel.

Il nous suffit alors de démontrer le lemme dans le cas $\ell=n=1$: en effet ce cas correspond au problème (5.40) ; les valeurs propres d'un problème (5.41) sont bien connues ; on obtient alors le lemme dans le cas général grâce à (5.39) en réindiçant les valeurs propres, i.e. en les comptant dans le bon ordre.

Dans le cas où $\ell=n=1$, notons $V_o^\sigma(o,\delta)$ l'adhérence de $\mathfrak{D}(]o,\delta[)$ dans V^σ. El Kolli [14] a montré que :

$$N(\lambda;V_o^\sigma(o,1),L^2(o,1)) = O(\sqrt{\lambda})$$

Considérant l'opérateur T : $u \to (Tu)(x) = u(\delta.x)$ on obtient que :

$$N(\lambda;V_o^\sigma(o,\delta),L^2(o,\delta)) = O(\delta^{1-\sigma/2}\sqrt{\lambda})$$

On remarque que $V_o^\sigma(o,\delta)$ est de codimension au plus 2 dans $V^\sigma(o,\delta)$ et passant à la limite en λ on obtient que :

(5.42) $$N_\varphi^+(V^\sigma(o,\delta),a) = O(\delta^{1-\sigma/2}) \quad \text{pour } \varphi(\lambda) = \sqrt{\lambda}.$$

Il en résulte aisément que :

$$B_\varphi^+(V^\sigma(o,\delta_o),a) = 0.$$

En effet l'étude en δ_o ne pose aucun problème et l'étude en o se fait en faisant tendre δ vers o dans (5.42).

Appliquant le corollaire 5.11 on a démontré le lemme dans le cas $n=\ell=1$.

Le fait que $\mu_a(J_{\ell,\delta}) < +\infty$ se vérifie ici directement.

Appliquant le théorème 5.1 i) on déduit du lemme le

<u>Corollaire 5.14</u> : On a

$$B_{\varphi_o}^+(V^\sigma(J_{\ell,\delta}),a) = o \qquad \text{pour } \varphi_o(\lambda) = \lambda^{n/2}$$

b) <u>Le cas général</u>. On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que :

(5.43) Il existe un recouvrement $\mathcal{O}_i$ $(i=1,\dots,\nu)$ de $\partial\Omega$, des C^1 difféomorphisme θ_i $(i=1,..,\nu)$ de $\mathcal{O}_i$ sur des ouverts U_i de $\mathbb{R}^n$ et des pavés $J_{\ell_i,\delta_i} \subset U_i$ $(i=1,..,\nu)$ tels que pour tout $i=1,..,\nu$:

$$\theta_i(\mathcal{O}_i \cap \Omega) = J_{\ell_i,\delta_i}$$

$$\theta_i(\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega) = \{x \in \overline{J_{\ell_i,\delta_i}} \;/\; \prod_{j=1}^{\ell_i} x_j = o\}.$$

On complète le recouvrement $\mathcal{O}_i$ par un ouvert $\Omega_o \subset\subset \Omega$ de sorte que $\Omega_o \cup (\bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{O}_i) \supset \overline{\Omega}$. On se fixe pour la suite des fonctions ζ_i $(i=o,\dots,\nu)$

telles que :

$$(5.44)\qquad \begin{cases} \zeta_o \in \mathcal{D}(\Omega_o) \ ; \ \zeta_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_i) \text{ pour } i=1,\dots,\nu. \\ \sum_{i=o}^{\nu} \zeta_o^2 = 1 \quad \text{sur } \overline{\Omega} \end{cases}$$

Soit $\sigma \in]o,2[$; on définit alors V^σ l'espace des fonctions u telles que

$$(5.45)\qquad \begin{cases} \text{i)} & u \in L^2(\Omega) \\ \text{ii)} & \zeta_o u \in H^1(\Omega) \\ \text{iii)} & (\zeta_i u) \circ \theta_i^{-1} \in V^\sigma(J_{\ell_i,\delta_i}) \quad \text{pour } i=1,\dots,\nu \end{cases}$$

On renvoie à [4] pour une étude détaillée de V^σ.

Nous avons alors :

Théorème 5.15 : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (5.43). Soit V^σ pour $\sigma \in]o,2[$, l'espace défini par (5.45) et soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert tel que :

$$H^1_{comp}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow V^\sigma$$

Alors pour toute forme a de $\mathcal{a}(\mathcal{V})$, $\mu_a(\Omega) < +\infty$ et

$$N(\lambda; \mathcal{V}, L^2(\Omega), a) \sim \mu_a(\Omega)\ \lambda^{n/2}$$

Démonstration : il nous suffit de prouver que pour une forme b de $\mathcal{a}(V^\sigma)$ on a :

$$B^+_\varphi(V^\sigma, b) = o \qquad \text{pour } \varphi(\lambda) = \lambda^{n/2}.$$

Notons a_o le produit scalaire de $H^1(\Omega)$ et pour $i=1,..,\nu$ a_i le produit scalaire de $V^\sigma(J_{\ell_i,\delta_i})$. On pose pour u et v de V^σ :

$$(5.46)\qquad b(u,v) = a_o(\zeta_o u, \zeta_o v) + \sum_{i=1}^{\nu} a_i((\zeta_i u)\circ\theta_i^{-1}, (\zeta_i v)\circ\theta_i^{-1}).$$

On a aussi :

$$(5.47) \qquad \|u\|^2_{o,\Omega} \leq \|\zeta_o u\|^2_{o,\Omega} + C \sum_{i=1}^{\nu} \|(\zeta_i u)\circ\theta_i^{-1}\|^2_{o,J_{\ell_i,\delta_i}}$$

Posant $\omega_o = \Omega\backslash\overline{\Omega}_o$ on déduit aisément de (5.46) et (5.47) que pour $\omega \subset \omega_o$, on a :

$$N(\lambda;V_o^\sigma(\omega),L^2(\omega),b) \leq \sum_{i=1}^{\nu} N(\lambda C;V_o^\sigma(\omega_i),L^2(\omega_i),a_i)$$

où $\omega_i = \theta_i(\omega \cap \mathcal{O}_i) \subset J_{\ell_i,\delta_i}$

et par conséquent on a :

$$B_\varphi^+(V^\sigma,b) \leq \sum_{i=1}^{\nu} C^{n/2}\, B_\varphi^+(V^\sigma(J_{\ell_i,\delta_i}),a_i)$$

pour $\varphi = \lambda^{n/2}$ et avec le corollaire 5.14 on obtient

$$B_\varphi^+(V^\sigma,b) = 0$$

ce qui achève la démonstration.

VI - ESTIMATION DU RESTE

Notre but est d'établir maintenant des estimations plus précises des valeurs propres dans le cas de problèmes uniformément elliptiques.

VI - 1 Les Résultats

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$; soit V un sous espace fermé de $H^m(\Omega)$ contenant $H_o^m(\Omega)$.

Pour $s \in]o,1]$ on désigne par $\mathcal{a}_s(V)$ l'ensemble des formes hermitiennes continues et coercives sur V, $a \in \mathcal{a}(V)$:

$$(6.1) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \{ \sum_{o\leq|\alpha|,|\beta|\leq m} a_{\alpha,\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} \} \, dx$$

telles que

$$(6.2) \qquad \forall_{\alpha,\beta} : a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta,\alpha}} \in L^\infty(\Omega)$$

et

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} &\exists K \;.\; \forall(\alpha,\beta), |\alpha|=|\beta|=m \;;\; \forall(x,y)\in\Omega\times\Omega : \\ &\qquad |a_{\alpha,\beta}(x) - a_{\alpha,\beta}(y)| \leq K\{d_\Omega(x,y)\}^s \end{aligned}$$

où l'on a noté $d_\Omega(x,y)$ la distance de x à y dans Ω : $d_\Omega(x,y)$ est le minimum de 1 et de la borne inférieure de la longueur des chemins de classe C^1 joignant x à y dans Ω.

Nous serons amenés à faire l'hypothèse suivante sur $\partial\Omega$: "la mesure (n-1) - dimensionnelle de $\partial\Omega$ est finie" ; pour donner un sens précis à cette expression on pose pour $\varepsilon>o$:

$$(6.4) \qquad \tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\} \;;\; \Omega_\varepsilon = \Omega\cap\tilde{\Omega}_\varepsilon .$$

et nous ferons l'une des deux hypothèses suivantes :

$$(H.1) \qquad V = H_o^m(\Omega) \text{ et } \limsup_{\varepsilon \overset{>}{\to} o} \varepsilon^{-1} \,\mathrm{mes}\, \Omega_\varepsilon < +\infty$$

(H.2) Ω possède la propriété (C') du §III et

$$\limsup_{\varepsilon \overset{>}{\to} 0} \varepsilon^{-1} \text{ mes } \tilde{\Omega}_\varepsilon < +\infty.$$

Nous avons alors le théorème suivant (voir aussi [24] pour le cas s=1) :

Théorème 6.1 : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit V un sous espace fermé de $H^m(\Omega)$ contenant $H_0^m(\Omega)$; nous supposons que l'une des hypothèses (H.1) ou (H.2) est satisfaite.

Soit a une forme de $\mathcal{a}_s(V)$ pour un $s \in]0,1]$. Notant $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ, de l'opérateur associé au triplet $(V, L^2(\Omega), a)$, on a :

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\, \lambda^{n/2m} + O(\lambda^{(n-\theta)/2m})$$

avec $\theta = \frac{s}{s+1}$.

Si, de plus, les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ pour $|\alpha|=|\beta|=m$, de a, sont constants sur chaque composante connexe de Ω, alors :

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\, \lambda^{n/2m} + O(\lambda^{(n-1)/2m} \operatorname{Log} \lambda)$$

Remarque : Dans le cas où Ω est un pavé et où les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ pour $|\alpha|=|\beta|=m$ sont constants, il résulte de la proposition 4.1 (voir aussi le § V.3) que l'on a l'estimation optimale :

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega)\, \lambda^{n/2m} + O(\lambda^{(n-1)/2m})$$

VI - 2 Coefficients Hölderiens

Avant de commencer la démonstration proprement dite, nous faisons quelques remarques ; d'abord sans nuire à la généralité nous pouvons supposer que a est fortement coercive sur V et :

$$(6.5) \qquad \exists c_2' > 0\ \forall u \in V : c_2' \|u\|^2_{m,\Omega} \leq a(u,u).$$

Posons aussi :

(6.6) $$M' = \sup_{0\leq|\alpha|,|\beta|\leq m} \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

On a :

<u>Lemme 6.2</u> : sous l'une des hypothèses (H.1) ou (H.2) il existe des constantes λ_o, ε_o et L telles que :

$$\forall\varepsilon < \varepsilon_o \ , \ \forall\lambda \geq \lambda_o \ \varepsilon^{-2m} : N(\lambda;V,L^2(\Omega_\varepsilon)) \leq L.\varepsilon.\ \lambda^{n/2m}$$

<u>Démonstration</u> : ce lemme résulte immédiatement des propositions 3.4 et 3.8 et des hypothèses sur mes Ω_ε ou mes $\tilde{\Omega}_\varepsilon$.

Considérons pour $\rho>o$ donné , et pour $\nu \in \mathbb{Z}^n$ le pavé J_ν de centre $\rho\nu$ et de côté ρ ; soit A l'ensemble des indices ν tels que $\overline{J}_\nu \subset \Omega$; on pose $\Omega' = \bigcup_{\nu\in A} J_\nu$ et $\omega = \Omega\setminus\overline{\Omega}'$.

On a alors : $\omega \subset \Omega_\varepsilon$ pour $\varepsilon = (\sqrt{n}+1)\rho$.

Nous reprenons les notations du § V.2 ; on peut minorer la constante c_2 de (5.15) par c_2' de (6.5). Pour $a \in \mathcal{a}_s(V)$ on a alors :

(6.7) $$\eta \leq \frac{K}{c_2'}(\sqrt{n}\ \rho)^s$$

(η défini en (5.18)).

On définit $\tilde{a}$ par (5.21). Pour appliquer le lemme 6.2 nous supposerons que $\lambda \geq \lambda_1\ \rho^{-2m}$ avec $\lambda_1 = \lambda_o(\sqrt{n}+1)^{-2m}$. On remarque alors que la constante τ de (5.22) est majorée par $C_1'.\lambda$ et on déduit alors des estimations des lemmes 5.7, 5.8 et 6.2 qu'il existe des constantes ρ_o λ_1 et C_5, ne dépendant que de c_2' , M',L et λ_o, telles que :

(6.8) $$\begin{cases} \forall\rho < \rho_o \ , \ \forall\lambda \geq \lambda_1\ \rho^{-2m} : \\ |N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega')\ \lambda^{n/2m}| \leq C_5\{\rho\ \lambda^{n/2m} + \mathrm{Card}\ A\ \rho^{n-1}\ \lambda^{(n-1)/2m}\}. \end{cases}$$

On a aussi :

(6.9) $$|\mu_{\tilde{a}}(\Omega') - \mu_{\tilde{a}}(\Omega)| \leq C_6 \text{ mes}(\Omega_\varepsilon) \leq C_7 \rho .$$

Nous appliquons le lemme 5.4 avec $\delta = \rho$ et on en déduit avec (6.8) et le lemme 5.5 qu'il existe une constante C_8 indépendante de ρ telle que :

(6.10) $$\begin{cases} \forall \rho < \rho_o \quad \forall \lambda \geq \lambda_1 \ \rho^{-2m} \\ |N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\ \lambda^{n/2m}| \leq C_8\{(\eta+\rho)\ \lambda^{n/2m} + \text{Card } A\ \rho^{(n-1)}\lambda^{n-1/2m}\} \end{cases}$$

Or on remarque maitenant que ρ^n Card A $\leq$ mes Ω, et par conséquent on en déduit avec (6.7), qu'il existe C_9, indépendante de λ et ρ telle que :

(6.11) $$\begin{cases} \forall \rho < \rho_o \quad \forall \lambda \geq \lambda_1 \ \rho^{-2m} \\ |N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\lambda^{n/2m}| \leq C_9[\rho^s\ \lambda^{n/2m} + \rho^{-1}\ \lambda^{(n-1)/2m}]. \end{cases}$$

λ étant donné assez grand, on choisit $\rho = \lambda^{-1/2m(s+1)}$ de sorte que $\rho < \rho_o$ et $\rho^{-2m} = \lambda^{1/s+1} \leq \lambda/\lambda_1$. On peut donc appliquer (6.11) et on obtient

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\ \lambda^{n/2m}| \leq 2\ C_9\ \lambda^{(n-\frac{s}{s+1})/2m}$$

c'est à dire l'estimation du théorème.

VI - 3 Coefficients constants

On construit pour ce cas, des partitions particulières. (Voir aussi [13]).

Pour $p = o,1,\ldots$ on pose $\rho_p = 2^{-p}$. On définit par recurrence sur p les ouverts Ω'_p, Ω''_p et ω_p.

Pour p=o, soient J^o_ν $(\nu\in\mathbb{Z}^n)$ les pavés de côté $\rho_o=1$,

$$J^o_\nu = \{\ x \in \mathbb{R}^n \ /\ |x_i-\nu_i| < 1/2 \text{ pour } i=1,\ldots,n\}$$

Soit $A_o = \{\nu\in\mathbb{Z}^n \ /\ \overline{J^o_\nu} \subset \Omega\}$. On pose alors :

$$\Omega'_o = \bigcup_{\nu\in A_o} J^o_\nu \ ; \ \omega_o = \Omega\backslash\overline{\Omega}'_o$$

Ω''_o est alors l'intérieur de $\overline{\Omega}'_o$.

Ensuite si Ω'_j , Ω''_j et ω_j ont été définis pour $j < p$, on considère les pavés J^p_ν $(\nu \in \mathbb{Z}^n)$ de centre $\rho_p.\nu$ et de côté ρ_p. Soit alors A_p l'ensemble des $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\overline{J^p_\nu} \subset \Omega$ et tels que $J^p_\nu \cap \Omega'_{p-1} = \emptyset$.

On pose alors :

$$\Omega'_p = \Omega'_{p-1} \cup \Big(\bigcup_{\nu\in A_p} J^p_\nu\Big) \ ; \ \omega_p = \Omega\backslash\overline{\Omega}'_p$$

Ω''_p est l'intérieur de $\overline{\Omega}'_p$.

Pour p fixé on applique les résultats du § V.2 pour la partition Ω'_p. On pose :

$$R_p = \sum_{j=o}^{p} \rho_j^{n-1} \text{ Card } A_j$$

et on obtient qu'il existe ρ_o , λ_1 et C_{10} tels que pour $\rho_p < \rho_o$, $\lambda \geq \lambda_1 \rho_p^{-2m}$:

$$|N(\lambda;V,L^2(\Omega),\tilde{a}) - \mu_a(\Omega)\,\lambda^{n/2m}| \leq C_{10}\,\{\rho_p\lambda^{n/2m} + R_p\,\lambda^{(n-1)/2m}\}. \tag{6.12}$$

ou nous avons utilisés (6.9) et le fait que $\mu_a = \mu_{\tilde{a}}$ puisque les $a_{\alpha,\beta}$ sont constants sur chaque J^p_ν pour $\nu \in A_p$ et pour $|\alpha|=|\beta|=m$.

Nous appliquons à nouveau le lemme 5.4 avec $\delta = \rho_p$, et on obtient qu'il existe p_o , λ_1 et C_{11} tels que :

$$(6.13)\left\{\begin{array}{l} \forall p \geq p_o \ , \ \forall\lambda \geq \lambda_1\,\rho_p^{-2m} \ : \\ |N(\lambda;V,L^2(\Omega),a) - \mu_a(\Omega)\lambda^{n/2m}| \leq C_{11}\{\rho_p\lambda^{n/2m} + R_p\,\lambda^{(n-1)/2m}\}. \end{array}\right.$$

Pour évaluer R_p nous remarquons que :

$$\omega_p \subset \Omega_{\varepsilon_p} \text{ pour } \varepsilon_p = (\sqrt{n}+1)\ \rho_p.$$

et donc pour p assez grand on a :

$$\rho_p^n \text{ Card } A_p \leq \text{mes } \omega_{p-1} \leq \text{Cte } \rho_{p-1} \leq K'\ \rho_p.$$

On en déduit qu'il existe K_o et K_1 tels que :

$$R_p \leq K_o + p\ K_1.$$

λ étant donné assez grand on choisit p tel que :

$$\lambda_1\ 2^{-2pm} \leq \lambda < \lambda_1\ 2^{-2(p+1)m}$$

de sorte que $p \geq p_o$ et $p \leq$ Cte Log λ.

Appliquant (6.13) on achève la démonstration du théorème.

VII EXEMPLES DE COMPORTEMENTS IRREGULIERS

Si Ω est un ouvert borné possédant une infinité de composantes connexes, l'injection de $H^{\ell}(\Omega)$ dans $H^{k}(\Omega)$ n'est jamais compacte ($\ell>k$) : pour le voir il suffit de considérer l'espace de dimension infinie des fonctions localement constantes, sur lequel les normes $\|.\|_{k,\Omega}$ et $\|.\|_{\ell,\Omega}$ coincident.

Nous reprenons maintenant, en le précisant, les exemples de [16] et [23] d'ouverts connexes de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels le comportement asymptotique des valeurs propres du problème de Neumann pour le Laplacien est irrégulier c.à.d. différent du comportement habituel.

VII - 1 Description des résultats

Soit I_o l'intervalle $]o,1[$. On se donne pour toute la suite des intervalles ouverts I_p $(p=1,2,\ldots)$, inclus dans I_o et deux à deux disjoints. Etant donnée une suite $\delta_p \in]o,1]$, on considère l'ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times I_o \ / \ -\sum_{p=1}^{\infty} \delta_p \, 1_{I_p}(y) < x < 1\}$$

où 1_{I_p} désigne la fonction caractéristique de l'intervalle I_p.

On notera : $\Omega_o = I_o \times I_o$

$$\Omega_p =]-\delta_p,o[\times I_p \qquad \text{pour } p\geq 1$$

$$\tilde{\Omega}_p =]-\delta_p,o] \times I_p \qquad \text{pour } p\geq 1$$

de sorte que :

$$\bigcup_{p=o}^{\infty} \Omega_p \subset \Omega = (\bigcup_{p=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_p) \cup \Omega_o$$

On considère le problème de Neumann pour le Laplacien, i.e. le problème variationnel $(H^1(\Omega)\ ,\ L^2(\Omega),\ a)$ avec :

$$(7.1) \qquad a(u,v) = \int_{\Omega} \text{grad } u.\ \text{grad } \overline{v}\ dx$$

On notera pour simplifier : $N(\lambda) = N(\lambda;H^1(\Omega),L^2(\Omega),a)$; Nous aurons besoin de considérer la fonction de $]0,\infty[$ dans $[0,\infty]$:

$$M(\lambda) = \sum_{p=1}^{\infty} [\sqrt{\lambda}\,\frac{\delta_p}{\pi} + \frac{1}{2}] \tag{7.2}$$

où l'on a noté pour $\xi \in \mathbb{R}$, $[\xi]$ la partie entière de ξ. i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à ξ.

On désigne encore par $\mathfrak{F}$ la classe de fonctions de comparaison introduite au § V.1 et suivant (5.8) on notera pour $\varphi \in \mathfrak{F}$:

$$\begin{cases} N_\varphi^+ = \limsup\limits_{\lambda\to+\infty} N(\lambda) \,/\, \varphi(\lambda) \\ \\ N_\varphi^- = \liminf\limits_{\lambda\to+\infty} N(\lambda) \,/\, \varphi(\lambda) \end{cases} \tag{7.3}$$

On notera de même :

$$\begin{cases} M_\varphi^+ = \limsup\limits_{\lambda\to+\infty} M(\lambda) \,/\, \varphi(\lambda) \\ \\ M_\varphi^- = \liminf\limits_{\lambda\to+\infty} M(\lambda) \,/\, \varphi(\lambda) \end{cases} \tag{7.4}$$

Avec ces notation nous avons alors le

<u>Théorème 7.1</u> : i) l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte si et seulement si : $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_p = 0$

ii) Pour $\varphi(\lambda) = \lambda$ on a :

$$N_\varphi^{\pm} = \frac{\text{mes }\Omega}{4\pi} + M_\varphi^{\pm}$$

iii) Si $\varphi \in \mathfrak{F}$ est telle que $\lambda = o(\varphi(\lambda))$, alors :

$$N_\varphi^{\pm} = M_\varphi^{\pm}$$

Ce théorème est à rapprocher du théorème 5.1 et comme pour ce théorème chaque égalité ii) ou iii) en contient en fait deux : l'une pour les signes + , l'autre pour les signes - .

Avant de démontrer ce théorème, nous allons préciser le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ en particularisant la suite δ_p.

Corollaire 7.2 :

i) Si $\sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^2 < +\infty$ alors $N(\lambda) \sim \frac{\text{mes}\ \Omega}{4\pi} \cdot \lambda$

ii) Si $\delta_p = p^{-\beta}$ avec $o<\beta<1/2$ alors

$$N(\lambda) \sim \{\pi^{-1/\beta} \int_o^\infty [x^{-\beta} + 1/2]\ dx\}\ \lambda^{1/2\beta}$$

iii) Si $\delta_p = \frac{1}{\sqrt{p}}$ alors

$$N(\lambda) \sim \{\frac{\text{mes}\ \Omega}{4\pi} + \frac{1}{\pi^2} \int_o^\infty [\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}]\ dx\}.\lambda$$

iv) Si $\delta_p = 2^{-k\beta}$ pour $2^k \leq p \leq 2^{k+1}$ $(k=o,1,\dots)$ avec $o<\beta\leq 1/2$,

alors :

$$N(\lambda) \approx \lambda^{1/2\beta}$$

mais

$$o < \liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1/2\beta}\ N(\lambda) < \limsup_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1/2\beta}\ N(\lambda) < +\infty$$

Classiquement on a noté $f(\lambda) \approx g(\lambda)$ pour signifier qu'il existe $o<c\leq c' < +\infty$ tels que

$$c\ f(\lambda) \leq g(\lambda) \leq c'\ f(\lambda)$$

Dans le cas i) nous avons le comportement usuel, quant à la croissance de $N(\lambda)$ en λ et quant à la constante $\frac{\text{mes}\ \Omega}{4\pi}$ dans l'équivalence. Dans le cas iii) nous avons cette même croissance en λ, mais avec une constante différente. Dans le cas ii) nous avons une croissance "irrégulière" en λ^α avec $\alpha = 1/2\beta > 1$. Enfin dans le cas iv) nous avons un ordre de grandeur de $N(\lambda)$ en λ^α avec $\alpha = 1/2\beta \geq 1$ mais dans ce cas $N(\lambda)$ n'admet pas d'équivalent de la forme cte λ^α.

Démonstration du corollaire 7.2 : Il suffit d'étudier le comportement asymptotique de $M(\lambda)$.

Dans le cas i) , posant $\Phi(t) = \sum_{t\delta_p \geq 1} 1$, on déduit de l'hypothèse $\sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^2 < +\infty$ que $\Phi(t) = o(t^2)$ lorsque $t \to +\infty$. Or on a :

$$M(\lambda) \leq \sum_{\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\,\delta_p \geq 1} \left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\delta_p}{\pi} + 1/2\right) \leq \frac{2}{\pi} \sum_{\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\,\delta_p \geq 1} \sqrt{\lambda}\,\delta_p$$

et

$$M(\lambda) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\left(\sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\,\delta_p \geq 1} 1\right)^{1/2}$$

soit :

$$M(\lambda) \leq \text{Cte}\,\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\right)}$$

D'où l'on tire que $M(\lambda) = o(\lambda)$. Dans les cass ii) et iii) on a les encadrements :

$$\int_1^{\infty} \left[\sqrt{\lambda}\,\frac{x^{-\beta}}{\pi} + 1/2\right] dx \leq M(\lambda) \leq \left[\sqrt{\lambda}\,\frac{\delta_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right] + \int_1^{\infty} \left[\sqrt{\lambda}\,\frac{x^{-\beta}}{\pi} + \frac{1}{2}\right] dx$$

Posant $x = \lambda^{1/2\beta} \,.\, \pi^{-1/\beta}\, t$ et notant que l'intégrale

$$\int_o^{\infty} \left[x^{-\beta} + \frac{1}{2}\right] dx \text{ est convergente pour } \beta<1$$

on en déduit que :

$$M(\lambda) \sim \left(\pi^{-1/\beta} \int_o^{\infty} [x^{-\beta} + 1/2]\, dx\right) \lambda^{1/2\beta}$$

Dans le cas iv) on a : $p^{-\beta} \leq \delta_p \leq (p/2)^{-\beta}$ et d'après l'étude du cas précédent on a :

$$M(\lambda) \approx \lambda^{1/2\beta}$$

D'autre part $M(\lambda)$ a un saut en $\lambda_k = \pi^2\, 2^{2k\beta}$ et ce saut vaut 2^k. Posant comme d'habitude

$$M(\lambda-o) = \lim_{\mu \overset{<}{\to} \lambda} M(\mu)$$

on a donc

$$M(\lambda_k) - M(\lambda_k - o) = 2^k = \pi^{-1/\beta}\, \lambda_k^{+1/2\beta}$$

Le saut de M en λ_k étant de l'ordre de $M(\lambda_k)$ il en résulte que

$$M_\varphi^+ - M_\varphi^- > 0 \qquad \text{pour } \varphi(\lambda) = \lambda^{1/2\beta}$$

VII - 2 Etude d'un problème voisin

Pour démontrer le théorème 7.1 nous commençons par changer le problème en un problème aux limites voisin plus facile à étudier.

Pour p=o,1,... on définit l'espace

(7.5) $$V_o(\Omega_p) = \{u \in H^1(\Omega_p) \;/\; u(o,.) = 0 \quad \text{dans } H^{1/2}(I_p)\}$$

On identifie $V_o(\Omega_p)$ à l'espace :

$$V_o(\Omega_p) = \{u \in H^1(\Omega) \;/\; u_{|\Omega \setminus \Omega_p} = o\}.$$

Posant

$$V_o = \{u \in H^1(\Omega) \;/\; u(o,.) = 0 \text{ dans } H^{1/2}(I_o)\}$$

On a alors :

$$V_o = \bigoplus_{p=o}^{\infty} V_o(\Omega_p)$$

La somme étant orthogonale pour le produit scalaire L^2 et pour la forme a (7.1). On simplifie les notations en posant

$$N_o(\lambda) = N(\lambda;V_o,L^2(\Omega),a)$$

et

$$N(\lambda;\Omega_p) = N(\lambda;V_o(\Omega_p),L^2(\Omega_p),a)$$

pour p=o,1,...

On a alors :

$$N_o(\lambda) = \sum_{p=o}^{\infty} N(\lambda;\Omega_p)$$

Or l'exemple a été construit de sorte que l'on connait explicitement les valeurs propres du problème variationnel $(V_o(\Omega_p),L^2(\Omega_p),a)$: notant ε_p la longueur de l'intervalle I_p ($\varepsilon_o=1$ et on convient que $\delta_o=1$), ces valeurs propres sont les réels :

(7.7) $$\lambda_{k,\ell}(\Omega_p) = (k+\tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{\delta_p^2} + \ell^2 \frac{\pi^2}{\varepsilon_p^2} \qquad \begin{array}{l} k=o,1,\dots \\ \ell=o,1,\dots \end{array}$$

associées à des fonctions propres du type :

$$\sin\{(k+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{\delta_p}\} \;.\; \cos\{\ell\frac{\pi}{\varepsilon_p}(y-y_p)\}$$

Par conséquent $N(\lambda,\Omega_p)$ est le nombre de points à coordonnées entières situés dans la partie de l'ellipse

$$\mathcal{E} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \xi>o,\ \eta>o \text{ et } (\xi+\tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{\delta_p^2} + \eta^2 \frac{\pi^2}{\varepsilon_p^2} \le \lambda\}$$

Notons $\mathcal{E}'$ le quart d'ellipse :

$$\mathcal{E}' = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \xi>-1/2\ ,\ \eta>o \text{ et } (\xi+\tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{\delta_p^2} + \eta^2 \frac{\pi^2}{\varepsilon_p^2} \le \lambda\}.$$

On décompose $N(\lambda;\Omega_p)$ en $N_1+N_2+N_3$, où N_1 est le nombre de points à coordonnées entières situés dans $\mathcal{E}$ et sur l'axe $\eta=o$, où N_2 est le nombre de points distincts de (o,o) situés sur l'axe $\xi=o$ et où N_3 est le nombre de points à coordonnées entières situés dans $\mathcal{E}$ et tels que $\xi>o$ et $\eta>o$.

On a :

$$N_1 = [\sqrt{\lambda}\,\frac{\delta_p}{\pi} + \frac{1}{2}]$$

$$N_2 = [(\lambda\,\frac{\varepsilon_p^2}{\pi^2} - \frac{\varepsilon_p^2}{4\delta_p^2})^{1/2}] \leq \sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon_p}{\pi}$$

D'autre part si $(k,\ell) \in \mathcal{E}$ avec $k>o$ et $\ell>o$, le pavé $]k-1,k[\times]\ell-1,\ell[$ est inclus dans $\mathcal{E}$ et par conséquent :

$$N_3 \leq \text{mes}\ \mathcal{E} \leq \text{mes}\ \mathcal{E}' = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\varepsilon_p\sqrt{\lambda}}{\pi}\right)\left(\frac{\delta_p\sqrt{\lambda}}{\pi}\right) = \frac{\text{mes}\ \Omega_p}{4\pi}\,\lambda$$

Inversement $\mathcal{E}$ est recouvert par les pavés $[k,k+1]\times[\ell,\ell+1]$ pour $(k,\ell) \in \mathcal{E}$, $k\geq o$ et $\ell\geq o$. On a donc :

$$N(\lambda;\Omega_p) \geq \text{mes}\ \mathcal{E}.$$

Notant enfin que $\text{mes}\ \mathcal{E}' - \text{mes}\ \mathcal{E} \leq \frac{1}{2}(N_2+1)$, on a :

(7.8) $$N(\lambda;\Omega_p) \geq \frac{\text{mes}\ \Omega_p}{4\pi}\,\lambda - \frac{\sqrt{\lambda}\,\varepsilon_p}{\pi} - 1/2$$

On a aussi :

(7.9) $$N(\lambda;\Omega_p) \geq N_3 = [\sqrt{\lambda}\,\frac{\delta_p}{\pi} + \frac{1}{2}]$$

et

(7.10) $$N(\lambda;\Omega_p) = N_1+N_2+N_3 \leq \frac{\text{mes}\ \Omega_p}{4\pi}\,\lambda + [\sqrt{\lambda}\,\frac{\delta_p}{\pi} + \frac{1}{2}] + \sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon_p}{\pi}$$

Remarquant que $\sum_{p=o}^{\infty} \varepsilon_p \leq 2$, on déduit alors de (7.10) et (7.6) que :

(7.11) $$N_o(\lambda) \leq \frac{\text{mes}\ \Omega}{4\pi}\,\lambda + M(\lambda) + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} + [\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} + \frac{1}{2}]$$

Par (7.8) et (7.9) on en déduit aussi que pour tout entier q fixé on a :

$$N_o(\lambda) \geq \mathrm{mes}\Big(\bigcup_{p=o}^{q} \Omega_p\Big) \frac{\lambda}{4\pi} + M(\lambda) - O(\sqrt{\lambda}) \tag{7.12}$$

(Noter que le $o(\sqrt{\lambda})$ dépend du choix de q).

Il résulte d'abord de (7.11) et (7.12) que $N_o(\lambda)$ est fini pour tout λ si et seulement si $M(\lambda)$ est fini pour tout λ et par conséquent (cf proposition 2.10) l'injection de V_o dans $L^2(\Omega)$ est compacte si et seulement si la suite δ_p tend vers 0.

Passant ensuite à la limite dans (7.11) et (7.12) on en déduit :

Proposition 7.3 : Pour que l'injection de V_o dans $L^2(\Omega)$ soit compacte il faut et il suffit que $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_p = 0$.

De plus pour $\varphi \in \mathcal{F}$ on a :

$$\begin{aligned} N_\varphi^{\pm}(V_o, L^2(\Omega), a) &= \frac{\mathrm{mes}\,\Omega}{4\pi} + M_\varphi^{\pm} && \text{si } \varphi(\lambda) = \lambda \\ &= M_\varphi^{\pm} && \text{si } \lambda = o(\varphi(\lambda)) \end{aligned}$$

VII - 3 Comparaison des problèmes

Pour effectuer cette comparaison nous introduisons l'espace :

$$Z = \{u \in H^1(\Omega) \;/\; \forall v \in V_o \quad a(u,v) = 0\}.$$

et nous démontrerons la

Proposition 7.4 : L'injection de Z dans $L^2(\Omega)$ est compacte et si $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_p = 0$ alors :

$$N(\lambda; Z, L^2(\Omega), a) = o(\lambda) \qquad (\lambda \to +\infty)$$

Vérifions d'abord que cette proposition jointe à la proposition précédente donne le théorème 7.1. On remarque d'abord que

$$H^1(\Omega) = V_o \oplus Z$$

et puisque l'injection de Z dans L^2 est compacte, celle de $H^1(\Omega)$ est compacte, si et seulement si celle de V_o l'est.

Supposons maintenant que $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_p = 0$

Nous avons d'abord :

(7.13) $$N_o(\lambda) \leq N(\lambda)$$

Nous avons aussi pour tout $\varepsilon > o$:

(7.14) $$N(\lambda) \leq N_o((1+\varepsilon)\lambda) + N((1+1/\varepsilon)\lambda;Z,L^2(\Omega),a)$$

En effet soient E et F de codimension respective $n = N_o((1+\varepsilon)\lambda)$ dans V_o et $m = N((1+1/\varepsilon)\lambda;Z,L^2(\Omega),a)$ dans Z et tels que :

$$\forall u \in E \ \lambda(1+\varepsilon) \ \|u\|_o^2 \leq a(u,u)$$

$$\forall v \in F \ \lambda(1+1/\varepsilon) \ \|v\|_o^2 \leq a(v,v)$$

Il résulte alors de l'orthogonalité de V_o et Z pour o que

$$\forall (u+v) \in E\oplus F : \quad \lambda\|u+v\|_o^2 \leq \lambda((1+\varepsilon) \ \|u\|_o^2 + (1+1/\varepsilon) \ \|v\|_o^2) \leq$$
$$\leq a(u,u) + a(v,v) = a(u+v,u+v)$$

On obtient alors (7.14) en notant que $E \oplus F$ est de codimension n+m dans $H^1(\Omega)$.

Pour $\varphi \in \mathcal{F}$ telle que soit $\varphi(\lambda) = \lambda$, soit $\lambda = o(\varphi(\lambda))$ on déduit de (7.13) que :

$$N_\varphi^{\pm}(V_o,L^2(\Omega),a) \leq N_\varphi^{\pm}$$

et de (7.14) que pour tout $\varepsilon > o$

$$N_\varphi^{\pm} \leq \varphi^*(1+\varepsilon) \ N_\varphi^{\pm}(V_o,L^2(\Omega),a)$$

puisque d'après la proposition 7.4 $N_\varphi^+(Z;L^2(\Omega),a) = 0$.

Le choix de ε étant arbitraire on a donc :

$$N_\varphi^{\pm}(V_o, L^2(\Omega), a) = N_\varphi^{\pm}$$

et le théorème 7.1 résulte alors de la proposition 7.3.

Nous passons maintenant à la démonstration de la proposition 7.4, qui est à rapprocher de la démonstration de la proposition 4.1.

Notons $(A_o, D(A_o))$ l'opérateur associé au problème variationnel $(V_o, L^2(\Omega), a)$. On introduit aussi l'opérateur de trace γ de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(I_o)$ défini par :

$$(\gamma u)(.) = u(0,.)$$

Nous avons alors la formule de Green suivante :

<u>Lemme 7.5</u> : il existe un espace de Hilbert X inclus dans $L^2(I_o)$ et un opérateur τ continu de $D(A_o)$ dans X, tels que :

$\forall u \in D(A_o)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$:

(7.15) $$a(u,v) - (A_o u, v)_{L^2(\Omega)} = (\tau u, \gamma v)_{L^2(I_o)}$$

De plus si $\lim\limits_{p\to\infty} \delta_p = o$ on peut choisir X de sorte que l'injection de X dans $L^2(I_o)$ soit compacte

<u>Démonstration</u> : nous construisons d'abord τ, puis X. Considérons d'abord le pavé "modèle" $J =]o,\delta[\times]o,\varepsilon[$, l'espace $W = \{u \in H^1(J) \ / \ u(o,.) = o$ dans $H^{1/2}(]o,\varepsilon[)\}$, et la forme $a(u,v) = \int_J \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \bar{v} \, dx$.

Notons (B, D(B)) l'opérateur associe au problème variationnel $(W, L^2(J), a)$.

B est la réalisation de $-\Delta$ associées aux conditions aux limites de Diechlet sur le côté x=o, et de Neumann sur les trois autres côtés. On a en fait $D(B) \subset H^2(J)$ (la seule difficulté est aux sommets, et aux sommets on obtient la régularité H^2 par les méthodes de Réflexions).

On en déduit la formule de Green suivante :

$$(7.16)\begin{cases}\forall u \in D(B)\ ,\ \forall v \in H^1(J) \quad a(u,v)-(Bu,v)_{L^2(J)} = (\tau u,\gamma v)_{L^2(o,\varepsilon)} \\ \text{si } (\gamma v)(.) = v(o,.) \quad \text{et} \quad (\tau u)(.) = -\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,.)\end{cases}$$

Comme déjà indiqué en (7.7) les valeurs propres de B sont :

$$\lambda_{k,\ell} = (k+1/2)^2 \frac{\pi^2}{\delta^2} + \ell^2 \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \qquad \begin{matrix} k=o,1,\dots \\ \ell=o,1,\dots \end{matrix}$$

et on considère une base orthonormée de $L^2(J)$ de fonctions propres de B, $\varphi_{k,\ell}$ de la forme :

$$\varphi_{k,\ell}(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\delta}} \sin(k+1/2)\frac{\pi x}{\delta} \cdot \frac{c_\ell}{\sqrt{\varepsilon}} \cos\frac{\ell\pi y}{\varepsilon}$$

On notera $\psi_\ell(y) = \dfrac{c_\ell}{\sqrt{\varepsilon}} \cos\dfrac{\ell\pi y}{\varepsilon}$, base orthonormée de $L^2(o,\varepsilon)$.

Pour $u \in D(B)$ on a

$$u = \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}\, \varphi_{k,\ell}$$

avec

$$\|u\|^2_{L^2(J)} = \sum_{k,\ell} |u_{k,\ell}|^2 < +\infty$$

$$\|Bu\|^2_{L^2(J)} = \sum_{k,\ell} \lambda^2_{k,\ell} |u_{k,\ell}|^2 < +\infty.$$

D'autre part on a :

$$\tau u = -\sum_{k,\ell} \sqrt{2}\, \delta^{-3/2} (k+1/2)\pi\, u_{k,\ell}\, \psi_\ell$$

et :

$$\|\tau u\|^2_{L^2(o,\varepsilon)} = 2\pi^2 \delta^{-3} \sum_{\ell} \Big| \sum_{k} (k+1/2)\, u_{k,\ell}\Big|^2$$

Or on a :

$$\Big|\sum_k (k+1/2)\ u_{k,\ell}\Big|^2 \leq \{\sum_k (k+1/2)^{-2}\}\ \{\sum_k (k+1/2)^4\ |u_{k,\ell}|^2\}.$$

Notant que

$$(k+1/2)^4 \leq \frac{\delta^4}{\pi^4}\ \lambda^2_{k,\ell}$$

et posant $K = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=o}^{\infty} (k+1/2)^{-2}$

on a donc démontré que :

(7.17) $$\forall u \in D(B)\ \|\tau u\|^2_{L^2(o,\varepsilon)} \leq K\delta\ \|Bu\|^2_{L^2(J)}$$

D'autre part, puisque $D(B) \subsetneq H^2(J)$, on a bien sûr $\tau u \in H^{1/2}(o,\varepsilon)$ et :

$$\|\tau u\|_{H^{1/2}(o,\varepsilon)} \leq Cte\ \|Bu\|^2_{L^2(J)}$$

la constante dépendant de manière non précisée de ε et δ.

Suivant cette étude on introduit $(B_p, D(B_p))$ $(p=o,1,\dots)$ l'opérateur associé au problème variationnel $(V_o(\Omega_p),\ L^2(\Omega_p), a)$ et on a, avec les identifications déjà utilisées au §VII.2 :

$$D(A_o) = \bigoplus_{p=o}^{\infty} D(B_p)$$

$$A_o = \bigoplus_{p=o}^{\infty} B_p$$

D'autre part, d'après (7.16) il existe un opérateur τp linéaire continu de $D(B_p)$ dans $H^{1/2}(I_p)$, tel que :

(7.18) $$\forall u \in D(B_p)\ ,\ \forall v \in H^1(\Omega_p) \qquad a(u,v)-(B_p u,v) = (\tau_p u, \gamma_p v)_{L^2(I_p)}$$

et de plus d'après (7.17) :

(7.19) $$\forall u \in D(B_p) \quad \|\tau_p u\|^2_{L^2(I_p)} \leq K\delta_p \|Bu\|^2_{L^2(\Omega_p)}$$

On définit $\tilde{\tau}_p$ opérant de $D(B_p)$ dans $L^2(I_o)$ obtenu en prolongeant $\tau_p u$ par 0 sur $I_o \backslash I_p$.

On remarque que pour $v \in H^1(\Omega)$ on a :

(7.20) $$\gamma_p(v|_{\Omega_p}) = (\gamma v)|_{I_p}$$

D'autre part les I_p sont deux à deux disjoints pour $p>o$ on peut donc définir l'opérateur :

$$\tau u = \sum_{p=o}^{\infty} \tilde{\tau}_p(u|_{\Omega_p})$$

opérant de $D(A_o)$ dans $L^2(I_o)$, puisque pour $u \in D(A_o)$, $u|_{\Omega_p} \in D(B_p)$. On a de plus :

(7.21) $$\forall u \in D(A_o) \ : \ \|\tau u\|^2_{L^2(I_o)} \leq 2 \operatorname*{Max}_p \delta_p \ K \ \|Bu\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Il résulte d'autre part de (7.18) et (7.20) que

$$\forall u \in D(A_o) \ , \ \forall v \in H^1(\Omega) \qquad a(u,v) - (A_o u,v) = (\tau u,\gamma v)_{L^2(I_o)}$$

c'est à dire (7.15).

On définit l'espace X comme étant l'espace image par τ de $D(A_o)$. On munit X de la norme quotient et X est isomorphe à un supplémentaire de Ker τ dans $D(A_o)$; X est alors un Hilbert et on déduit de (7.21) que X s'injecte continuement dans $L^2(I_o)$.

Il nous reste à vérifier que si $\lim_{p\to+\infty} \delta_p = o$, l'injection de X dans $L^2(I_o)$ est compacte. Nous montrons alors que la boule unité SX de X est pré-compacte.

Soit $\varepsilon>o$; soit q tel que pour $p>q$: $\delta_p<\varepsilon$. D'après (7.19) pour $u \in D(A_o)$, notant $u_p = u|_{\Omega_p}$ on a :

$$\|\tau u - \sum_{p=o}^{q} \tilde{\tau}_p u_p\|^2_{L^2(I_o)} \leq K.\varepsilon \sum_{p>q} \|B_p u_p\|^2_{L^2(\Omega_p)}$$

et encore

$$\|\tau u - \sum_{p=o}^{q} \tilde{\tau}_p u_p\|^2_{L^2(I_o)} \leq K.\varepsilon \ \|Bu\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{7.22}$$

Pour $\tau u \in SX$ on peut supposer que $\|Bu\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$; Alors on a aussi $\|B_p u_p\|_{L^2(\Omega_p)} \leq 1$. Puisque τ_p est continu de $D(B_p)$ dans $H^{1/2}(I_p)$, on en déduit que $\tau_p u_p$ est dans un compact de $L^2(I_p)$ et donc que $\tilde{\tau}_p u_p$ est dans un compact de $L^2(I_o)$. Par conséquent, d'après (7.22), pour tout $\varepsilon>o$, il existe un compact , tel que tout élément τ_u de SX est distant d'au plus $K.\varepsilon$ de ce compact. Il en résulte que SX est précompacte ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Démonstration de la proposition 7.4

Nous commençons par quelques remarques ; tout d'abord l'opérateur A_o est un isomorphisme de $D(A_o)$ sur $L^2(\Omega)$: en effet la plus petite valeur propre de B_p est (cf (7.7)) :

$$\frac{\pi^2}{4\delta_p^2} \geq 1$$

et donc pour $u \in D(A_o)$, notant $u_p = u|_{\Omega_p}$, on a :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_p \|u_p\|^2_{L^2(\Omega_p)} \leq \sum_p \|B_p u_p\|^2_{L^2(\Omega_p)} = \|A_o u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{7.23}$$

ce qui prouve que A_o est un opérateur strictement positif.

D'autre part l'application γ de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(I_o)$ est surjective: si $\zeta \in H^{1/2}(I_o)$ est donné, on peut prolonger ζ en $\tilde{\zeta} \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, puis relever $\tilde{\zeta}$ en $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tel que $u(o,.) = \tilde{\zeta}(.)$; on pose alors $v = u|_{\Omega} \in H^1(\Omega)$ et on a $\gamma v = \zeta$. Il en résulte que l'application γ est un isomorphisme de Z sur $H^{1/2}(I_o)$. On note R l'application (continue) de $H^{1/2}(I_o)$ dans Z telle que $\gamma \circ R = Id$.

Puisque $D(A_o) \subset V_o$, on a d'après (7.15) et la définition de Z :

$$\forall z \in Z \ , \ \forall u \in D(A_o) \ : \ -(A_o u, z)_{L^2(\Omega)} = (\tau u, \gamma z)_{L^2(I_o)}$$

et donc :

(7.24)

$$\forall \zeta \in H^{1/2}(I_o) \ , \ \forall f \in L^2(\Omega) \ : \ (f, R\zeta)_{L^2(\Omega)} = (\tau A_o^{-1} f \ , \ \zeta)_{L^2(I_o)}$$

Comme au paragraphe IV.5 nous utilisons maintenant la formule de Green (7.15) et (7.24) pour prolonger R. On introduit l'espace X' dual de X. identifiant comme d'habitude $L^2(I_o)$ avec son dual on déduit de l'injection $X \hookrightarrow L^2(I_o)$ une projection $\bar{\omega}$ de $L^2(I_o)$ sur X' définie par :

(7.25) $$\forall \varphi \in L^2(I_o) \ \forall x \in X \qquad \langle \bar{\omega}\varphi \ , \ x \rangle_{X' \times X} = (\varphi, x)_{L^2(I_o)}$$

Notons que si l'injection de X dans $L^2(I_o)$ est compacte, alors $\bar{\omega}$ est un opérateur compact de $L^2(I_o)$ dans X'.

Remarquons encore que, si l'on note i l'injection de $H^{1/2}(I_o)$ dans $L^2(I_o)$ alors $\bar{\omega} \circ i$ est une injection de $H^{1/2}(I_o)$ dans X' : en effet, dire que $\bar{\omega} \circ i(\xi) = o$ équivaut à dire, d'après (7.25), que $(\varphi, \xi)_{L^2(I_o)} = o$ pour tout $\varphi \in X$, et par (7.24) on a alors $R\xi = o$; d'où $\xi = \gamma \circ R(\xi) = o$.

Nous définissons maintenant un opérateur S de X' dans $L^2(\Omega)$ en définissant $S\xi$ pour $\xi \in X'$ comme étant l'unique élément de $L^2(\Omega)$ tel que :

(7.26) $$\forall f \in L^2(\Omega) \qquad (f, S\xi) = -\langle \tau A_o^{-1} f, \xi \rangle_{X \times X'}$$

Il résulte alors de (7.24) et (7.25) que :

$$\text{(7.27)} \qquad R = S \circ \overline{\omega} \circ i$$

D'autre part, d'après (7.21) on a :

$$\|\tau\, A_o^{-1} f\|_X \leq C\|A_o(A_o^{-1}\, f)\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et par suite :

$$\text{(7.28)} \qquad \forall \xi \in X' \quad \|S\xi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\xi\|_{X'}$$

Notant C_1 la norme de γ opérant de Z dans $H^{1/2}(I_o)$, notant SZ la boule unité de Z. $SH^{1/2}(I_o)$ la boule unité de $H^{1/2}(I_o)$ et $\Sigma = \overline{\omega}\circ i(SH^{1/2}(I_o))$, on a :

$$\text{(7.29)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} : d_n(SZ, L^2(\Omega)) \leq C.C_1\; d_n(\Sigma, X')$$

En effet, si E est un sous espace (de dimension n) de X' tel que :

$$\forall \zeta \in \Sigma \;,\; \exists \xi \in E \;/\; \|\zeta - \xi\|_{X'} \leq d$$

alors, pour $z \in SZ$, $\widetilde{\omega}\circ i(\gamma z) \in C_1\, \Sigma$ et

$$\forall z \in SZ \;,\; \exists \xi \in E \;/\; \|\widetilde{\omega} \circ i \circ \gamma(z) - \xi\|_{X'} \leq C_1\, d$$

Appliquant l'opérateur S, et tenant compte du fait que :

$$S(\widetilde{\omega} \circ i \circ \gamma(z)) = R \circ \gamma(z) = z$$

on en déduit avec (7.28)

$$\forall z \in SZ \;,\; \exists f \in S(E) \;\; \|z-f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1.C\; d$$

et (7.29) suit.

L'injection de $H^{1/2}(I_o)$ dans $L^2(I_o)$ est compacte, par conséquent Σ est relativement compact dans X' ; par suite SZ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ et l'injection de Z dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Si de plus, $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_p = o$, on déduit d'un lemme de [14] (voir aussi le lemme 2.3) que :

(7.30) $$d_{n_1+n_2}(\Sigma,X') \leq d_{n_1}(SH^{1/2}(I_o),L^2(I_o)) \;.\; d_{n_2}(\tilde{\Sigma},X')$$

où $\tilde{\Sigma}$ est l'image par $\overline{\omega}$ de la boule unité de $L^2(I_o)$.

La compacité de $\overline{\omega}$ se traduit par le fait que :

(7.31) $$\lim_{\nu\to+\infty} d_\nu(\tilde{\Sigma},X') = 0$$

Les estimations de EL KOLLI [14] montrent que :

(7.32) $$d_\nu(SH^{1/2}(I_o),L^2(I_o)) = O(\nu^{-1/2})$$

Regroupant les estimations (7.30) à (7.32) on en déduit, avec (7.29) que :

$$d_n(SZ,L^2(\Omega)) = o(n^{-1/2})$$

On en déduit alors, avec la proposition 2.2 que :

$$N(\lambda;Z,L^2(\Omega),a) = o(\lambda)$$

ce que nous voulions démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON : Elliptic boundary value problems ; Van Nostrand (1965).

[2] S. AGMON : On Kernels, Eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems ; Comm. Pure. Appl. Math, 18,(1965).

[3] S. AGMON : Asymptotic Formulas with Remainder Estimates for Eigenvalues of Elliptic Operators ; Arch. Rat. Mech. Anal, 28, (1968).

[4] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - B. HANOUZET : Caractérisation de classes de fonctions C^∞ et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel ; J. Math. Pures et Appl., 52, (1973).

[5] R. BEALS : Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators ; Amer. J. Math, 89, (1967).

[6] R. BEALS : On eigenvalues distributions for elliptic operators without smooth coefficients II ; Bull. Amer Math. Soc., 74, (1968).

[7] R. BEALS : Asymptotic behaviour of the Green's function and spectral function of an elliptic operator ; J. of Func. Anal, 5, (1970).

[8] M. BIRMAN - M.Z. SOLOMJAK : Approximation polynomiale par morceaux des fonctions de classe $W^{\alpha,p}$; Math. Sbornik, 73(115), 1967.

[9] M. BIRMAN - M.Z. SOLOMJAK : Spectral asymptotics....
Soviet Math Dokl, 13, (1972).

[10] L. BOUTET DE MONVEL - P. GRISVARD : Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un problème aux limites ; Séminaire LERAY, collège de France, (1972). Symp. Math. 7 (1971).

[11] F.E. BROWDER : Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self-adjoint et du type elliptique à coefficients variables ; C.R. Ac. Sc. Paris, 236, 1953.

[12] J. BRUNNING : Zur Abschätzung der Spectralfunction elliptischer Operatoren ; Math. Zeit. 137, (1974).

[13] R. COURANT - D. HILBERT : Methods of Mathematical Physics, Interscience, 1953.

[14] A. EL KOLLI : n-ième épaisseur dans les espaces de Sobolev ; J. of Approximation Theory, 10, (1974).

[15] G. ESKIN : Asymptotics near the boundary of spectral functions of elliptic selfadjoint boundary problems ; Israel J. of Math, 22, (1975).

[16] J. FLECKINGER - G. METIVIER : Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers ; C. R. Ac. Sc. Paris, t 276, (1973).

[17] L. GARDING : The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic operators ; Math. Scand, 1, (1953).

[18] L. HORMANDER : On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators ; Recent Advances in the Basic Sciences, Yeshiva Univerty, (1966).

[19] L. HORMANDER : The spectral function of an elliptic operator ; Acta. Math, 121, (1968).

[20] A.N. KOLMOGOROV : Uber die Beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse ; Ann of Math., 37, (1936).

[21] G.G. LORENTZ : Approximation of Functions ; Holt and Rinehart and Winston, 1966.

[22] K. MARUO - H. TANABE :On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms; Osaka J. of Math, 8, (1971).

[23] G. METIVIER : Theorie Spectrale d'opérateurs elliptiques sur des ouverts irréguliers ; Séminaire Goulaouic - Schwartz, Ecole Polytechnique, (1973).

[24] G. METIVIER : Formule asymptotique avec estimation du reste pour les valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques ; Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, (1974).

[25] G. METIVIER : Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Soc. Math. de France, Astérisque 34.35, (1976).

[26] G. METIVIER : Valeurs propres d'opérateurs définis par la restriction de systèmes variationnels à des sous espaces ; à paraitre au J. de Math. pures et Appliquées ; et note aux C. R. Ac. Sc., t 282 (1976).

[27] C. NORDIN : The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate elliptic operator ; Arkiv för Matematik, 10, (1972).

[28] PHAM THE LAI : Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Israel J. of Math.

[29] M.Z. SOLOMJACK - I. L. VULIS : Spectral asymptotics of degenerate elliptic operators ; Soviet Math Dokl, 13, (1972).

[30] H. TRIEBEL : Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ durch einer elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung ; Math Ann., 177, (1968).

[31] H. WEYL : Das asymptotishe Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partialler Differentialgleichungen..., Math Ann., 71, (1911).

Guy MÉTIVIER
Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06034 NICE CEDEX