

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALBRECHT PFISTER

Quelques problèmes des formes quadratiques sur les corps

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 89-91

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__89_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROBLEMES DES FORMES QUADRATIQUES SUR LES CORPS

par

A. PFISTER

Introduction

Soit K un corps formellement réel. Toutes les formes quadratiques sur K sont supposées régulières et en forme diagonale :

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \quad (a_i \in K^*), \quad \phi = (a_1, \dots, a_n) \quad .$$

On note $\oplus$ la somme orthogonale, $\otimes$ le produit tensoriel des formes quadratiques. Nous écrivons $\phi \sim 0$ si ϕ est une forme hyperbolique (c'est-à-dire l'élément $\bar{\phi}$ induit par ϕ dans le groupe de Witt W de K est 0).

Nous étudions les formes de torsion ϕ où il existe un nombre naturel n tel que $n \times \phi = \underbrace{\phi \oplus \dots \oplus \phi}_n \sim 0$. On sait que les résultats suivants sont vérifiés

[P] :

- a) l'ordre exact de ϕ est une puissance de 2,
- b) ϕ est une forme de torsion si et seulement si la signature totale de ϕ s'annule,
- c) si $2^m \times \phi \sim 0$, alors il existe une forme ψ , $\psi \sim \phi$; tel que

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^r (b_i, -t_i b_i) \quad r \in \mathbb{N}, b_i \in K^*, t_i = \text{somme de } 2^m \text{ carrés} \in K^*.$$

Problème : Est-il vrai que toute forme de torsion ϕ puisse être écrite comme

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^r (b_i, -t_i b_i) \quad \text{où } r \in \mathbb{N}, b_i \in K^*, t_i \in T = \{\text{somme de carrés} \neq 0\} \subset K^* ?$$

(on note la différence entre le problème et le résultat c) !)

Le but principal de cette note est la construction des contre-exemples à cette question.

1. Le théorème de Cassels et une application

Théorème 1 (Cassels)

- a) Soit K_1 un corps (car $K_1 \neq 2$), x une indéterminée sur K_1 , $K = K_1(x)$. Soit ϕ une forme quadratique sur K_1 , $\phi = (a_1, \dots, a_n)$, et soit $p(x) \in K_1[x]$ un polynôme. Alors on a :

Si ϕ représente $p(x)$ sur $K_1(x)$, alors ϕ représente $p(x)$ sur $K_1[x]$.

- b) Le théorème (et sa démonstration) reste vrai si les a_i sont permis dans

$K_1[x]$ avec $\deg(a_1) \leq 1$.

Soit maintenant K_1 un corps réel, $t_1, t_2 \in T_1 = T(K_1)$ et soit ϕ la forme de dimension 4

$$(1) \quad \phi = (1, x) \otimes (1, -(t_1 + t_2 x)) \quad \text{sur } K = K_1(x).$$

Il est évident que ϕ est une forme de torsion. Nous avons :

Proposition 2

Pour que $\phi = (b_1, -u_1 b_1) \oplus (b_2, -u_2 b_2)$ avec $b_1, b_2 \in K^*$, $u_1, u_2 \in T = T(K)$ il est nécessaire et suffisant qu'il existe $t_3 \in T_1$ tel que

$$(2) \quad (1, t_3) \text{ représente } t_1 \text{ et } t_2 \text{ sur } K_1.$$

2. Deuxième réduction

Soit maintenant K_0 un corps réel, $K_1 = K_0(y)$ où y est une indéterminée sur K_0 . Soient $t, u \in T_0 = T(K_0)$ et soit $t_1 = t$, $t_2 = t + u y^2 \in T_1$. Alors

Proposition 3

Pour qu'il existe $t_3 \in T_1$ tel que

$$(1, t_3) \text{ représente } t_1 \text{ et } t_2 \text{ sur } K_1$$

il est nécessaire et suffisant que

$$(3) \quad (t, u, -1) \text{ est isotrope sur } K_0.$$

Pour construire des contre-exemples au Problème, il suffit maintenant d'exhiber un corps K_0 et des éléments $t, u \in T_0$ tel que (3) n'est pas achevé.

Exemples : $K_0 = \mathbb{Q}$, $t = 2$, $u = 3$

$$K_0 = \mathbb{R}(z, w), \quad t = 1 + z^2, \quad u = 1 + w^2.$$

3. Remarques (dues à J. Arason)

Soit K un corps (formellement) réel. On considère les trois propriétés suivantes de K :

A(K) : Toute forme de torsion ϕ sur K est somme des formes binaires de torsion

B(K) : Pour tous $t_1, t_2 \in T(K)$ il y a $t_3 \in T(K)$ tel que

$$(1, t_3) \text{ représente } t_1 \text{ et } t_2$$

C(K) : Pour tous $t, u \in T(K)$ on a $(1, -t) \otimes (1, -u) \sim 0$ sur K

(c'est équivalent à (3) au dessus).

Alors les implications suivantes sont remplies :

$$\begin{array}{ccccc} C(K) & \Rightarrow & B(K) & \Rightarrow & A(K) \\ & \uparrow \text{ prop. 3} & & \uparrow \text{ prop. 2} & \\ C(K(x)) & \Rightarrow & B(K(x)) & \Rightarrow & A(K(x)) \end{array}$$

Malheureusement on ne connaît pas des conditions simples nécessaires et suffisantes pour qu'un corps K ait la propriété A ou B ou C. Par exemple on ne sait pas si $R(x,y)$ ait la propriété B ou si $R(x,y,z)$ ait la propriété A.

REFERENCE

- P A. PFISTER, Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Invent. Math. 1, 116-132 (1966).

Johannes Gutenberg Universität
Fachbereich Mathematik
Postfach 3980

6500 MAINZ
ALLEMAGNE
