PHILIPE NOVERRAZ

Le problème de Levi en dimension infinie

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 73-82
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__73_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 73 - 82.

LE PROBLEME DE LEVI EN DIMENSION INFINIE

par Philipe NOVERRAZ

Bien qu'il soit plus exact de parler de problème d'Oka, nous appelerons, conformément à l'habitude prise, problème de Lévi la comparaison des diverses notions d'holomorphie et de pseudoconvexité d'un ouvert d'un elc (espace vectoriel topologique localement convexe séparé complexe). Cette comparaison est, en dimension finie comme en dimension infinie, un problème fondamental qui se pose naturellement.

En dimension finie, le problème est résolu complètement par l'équivalence de ces diverses notions ; en dimension infinie, par contre, la situation est plus compliquée. Assez vite on a remarqué qu'il existait des espaces de Banach dans lesquels ces notions ne coïncidaient pas, mais que la notion de base de Schauder permettait d'obtenir des résultats intéressants. On a commencé par prouver un résultat plus faible, à savoir que dans un espace de Banach possédant une base de Schauder (ou bien des propriétés d'approximation), tout ouvert polynomialement convexe est un ouvert d'existence [6] et remarqué que le cas des espaces de SILVA ($\mathscr{D}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{S}$) était assez simple [15, 16, 17]. Puis, pour un espace de Banach à base, le problème de Lévi était résolu [9], ce résultat étant généralisé au cas métrisable et souslinien [7]. Dans le cas d'un espace de Banach non séparable, un exemple était donné d'un ouvert polynomialement convexe qui n'est pas un ouvert d'existence [10], puis un exemple d'ouvert pseudoconvexe qui n'est d'holomorphie en aucun sens [11].

Les démonstrations que nous donnons ici sont caractéristiques de l'analyse complexe en dimension infinie en ceci qu'elles utilisent des techniques d'analyse fonctionnelle ainsi que des techniques de fonctions de plusieurs variables complexes.

Dans cet exposé, nous laisserons de côté le cas des espaces étalés ; sur ce sujet le lecteur intéressé pourra consulter [18] par exemple.

I. NOTION DE PSEUDO-CONVEXITE.

Soient E un elc complexe et U un ouvert de E ; une application $v : U \to [-\infty,+\infty[$ est dite *plurisousharmonique* si elle est semi-continue supérieurement et si pour tout point a de U et b de E, l'application $z \to v(a+bz)$ est sousharmonique ou $-\infty$ sur chaque composante connexe de l'ensemble de définition. On notera P(U) l'ensemble des fonctions psh sur U ; voir [12] ou [13] pour les propriétés de ces fonctions.

Si A est un sous-ensemble d'un elc E, pour tout couple (z,z') de A×E, on notera

$d_A(z,z')$ la borne supérieure des $r > 0$ tels que $z + r\Delta z' \subset A$, où $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ |z|<1\}$. Cette fonction est semi-continue inférieurement si A est un ouvert.

THEOREME-DEFINITION [13]. - *Un ouvert* U *d'un elc* E *est dit pseudo-convexe, s'il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1) Pour tout sous-espace F *de dimension finie, l'ouvert* $U \cap F$ *est pseudo-convexe dans* F,

2) L'application $(z,z') \to -\log d_U(z,z')$ *est plurisousharmonique dans* $U\times E$,

3) Pour tout compact K *de* U, *l'ensemble*
$\hat{K}_{P(U)} = \{z \in U,\ v(z) \leqslant \sup_{z' \in K} v(z')\quad \forall v \in P(U)\}$ *est précompact dans* U,

4) Si E *est normé,* $z \to -\log d(z)$ *est une fonction plurisousharmonique continue dans* U, *où la distance* d *est définie par* $d(z) = \inf_{z' \notin U} \|z - z'\|$.

Les ouverts pseudo-convexes possèdent les propriétés de stabilité suivantes dont le lecteur trouvera la démonstration en [13].

1. Toute réunion filtrante croissante d'ouverts pseudo-convexes est pseudo-convexe.
2. Si U est un ouvert pseudo-convexe d'un elc E et si T' est une topologie localement convexe sur E moins fine que la topologie initiale, alors l'intérieur, s'il n'est pas vide, de U dans (E, T') est pseudo-convexe dans (E, T').
3. Soient E et F deux elc, $u : E \to F$ une surjection linéaire continue et ouverte et U un ouvert de E tel qu'il existe un ouvert non vide V de F tel que $U \supset u^{-1}(V)$. Alors si U est un ouvert pseudo-convexe, il en est de même de u(U) et l'on a $U = u^{-1} \circ u(U)$. Dans certains espaces, ce résultat permet de préciser la géométrie des ouverts pseudo-convexes, par exemple dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (produit dénombrable), tout domaine pseudo-convexe est de la forme $U_n \times \mathbb{C}^{\mathbb{N} \setminus [o,n]}$ où U_n est un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$. Cet exemple est un cas particulier de limite surjective ouverte introduite par DINEEN [5].

II. NOTIONS D'OUVERT D'HOLOMORPHIE.

Rappelons qu'une application f d'un ouvert U d'un elc E et à valeurs complexes est dite *analytique* si elle est continue (ou localement bornée) et si sa restriction à tout sous-espace de dimension finie F (ou plus précisément à $U \cap F$) est analytique. Une telle fonction se développe localement uniformément en série d'applications polynomiales homogènes et continues.

Le lecteur trouvera les propriétés élémentaires de ces applications, par exemple en [13].

En dimension finie, les notions suivantes sont bien connues (et équivalentes par le théorème de Cartan-Thullen).

Soit U un ouvert d'un elc E, considérons les propriétés suivantes :

1. Pour tout compact K de U, l'ensemble $\hat{K}_{H(U)} = \{z \in U, |f(z)| \leqslant |f|_K, \ \forall f \in H(U)\}$ est précompact dans U.

2. Pour toute suite (x_n) de U convergeant vers un point $x_\circ$ de la frontière ∂U, il existe f dans $H(U)$ telle que $\sup\limits_n |f(x_n)| = +\infty$.

3. Il n'existe pas deux ouverts connexes U_1 et U_2 tels que

a) $\emptyset \neq U_2 \subset U \cap U_1$, $U_1 \not\subset U$,
b) $\forall f \in H(U) \quad \exists \tilde{f} \in H(U_1)$ tel que f et $\tilde{f}$ coïncident sur U_2.

4. Il existe f dans $H(U)$ tel qu'il n'existe pas deux ouverts connexes U_1 et U_2 et $\tilde{f}$ dans $H(U_1)$ tels que

a) $\emptyset \neq U_2 \subset U \cap U_1$, $U_1 \not\subset U$,
b) $f = \tilde{f}$ sur U_2.

Trivialement, $4 \Longrightarrow 3$ et $2 \Longrightarrow 3$ car dans tout elc, l'ensemble des points de ∂U séquentiellement accessibles (i.e. limite d'une suite de points de U) est dense dans ∂U : en effet, si V est un ouvert convexe tel que $V \cap \partial U \neq \emptyset$, il existe x_1 dans $U \cap V$ et x_2 dans $\complement U \cap V$, le segment $[x_1,x_2]$ est contenu dans V ; il existe alors un point x de $[x_1,x_2] \cap \partial U$ tel que $[x_1,x[$ soit dans $U \cap V$. Le point x est un point de $V \cap \partial U$ séquentiellement accessible.

En utilisant l'intégrale de Cauchy, on montre [4] que $3 \Longrightarrow 1$. D'où, pour tout elc E

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[d, Rightarrow] \\ 4 \arrow[r, Rightarrow] & 3 \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Dans tout elc, chacune de ces conditions entraîne la pseudo-convexité de l'ouvert.

Notons $T_\circ$ la topologie de la convergence compacte sur $H(U)$ et T_ω la topologie de Nachbin engendrée par les semi-normes portées par les compacts de U (une semi-norme p sur $H(E)$ est portée par un compact K de U si pour tout ouvert V, $K \subset V \subset U$, il existe une constante C_V telle que $p(f) \leqslant C_V |f|_V$ pour tout f de $H(U)$). On voit sans peine que toute semi-norme T_ω-continue et multiplicative est $T_\circ$-continue.

<u>PROPOSITION 1</u>. - *Si sur* $H(U)$ *la topologie* T_ω *ou* $T_\circ$ *est tonnelée, alors* $1 \Longrightarrow 2$.

En effet, supposons T_ω tonnelée. Si 2. n'est pas vérifié, il existe une suite $(x_n) \subset U$, $x_n \to x_0 \in \partial U$ telle que $\sup_n |f(x_n)| < +\infty$ pour tout f de H(U). L'application $f \to p(f) = \sup_n |f(x_n)|$ définit une semi-norme multiplicative, comme l'ensemble $\{p(f) \leqslant 1\}$ est un tonneau pour T_ω, cette semi-norme est T_0-continue. Il existe donc un compact K tel que $p(f) \leqslant |f|_K$ pour tout f de H(U). Ceci entraîne que la suite (x_n) est contenue dans l'ensemble $\hat{K}_H(U)$ qui, de ce fait, ne peut être précompact dans U. La condition 1 n'est donc pas vérifiée.

Malheureusement, cette proposition est peu exploitable, car il y a peu de cas où, soit T_ω, soit T_0, est tonnelée. Par exemple :

1. Si E est un espace de Banach, la topologie T_0 de la convergence compacte est tonnelée si et seulement si E est de dimension finie [1].

2. Si E est un espace $\mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{S}$ (dual fort de Fréchet-Schwartz), ou plus généralement $\mathcal{D}\mathcal{F}\mathcal{M}$ (dual de Fréchet-Montel), les topologies T_0 et T_ω coïncident et sont des topologies de Fréchet [5], [14] ; dans ce cas, $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3 \Longleftrightarrow 4$ (théorème de Cartan-Thullen).

3. Si E est un espace de Banach, on a peu d'exemples où $H(E)T_\omega$ est un espace tonnelé. C'est le cas [2] si $E = c_0$ où ℓ^1. Par contre, pour $E = \ell^\infty$, la topologie T_ω n'est pas tonnelée [3].

HIRSCHOWITZ [10] et JOSEFSON [11] ont donné des exemples d'espaces de Banach non séparables tels que $3 \not\Longrightarrow 4$.

En mettant une hypothèse supplémentaire sur E - avoir une base de Schauder - on sait prouver dans le cas d'un espace de Banach ou de Fréchet, l'équivalence des 4 notions d'ouverts d'holomorphie. Mais avec cette hypothèse, on sait faire mieux : dans de nombreux espaces possédant une base de Schauder équicontinue, tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'existence, c'est-à-dire satisfait à la condition 4. La même démonstration prouvera que tout ouvert pseudo-convexe satisfait à la condition 2. Dans ce cas, les conditions 1, 2, 3 et 4 équivalent à la pseudo-convexité (solution du problème de Lévi).

Rappelons que GRUMAN [8] a montré que dans un elc quelconque, tout ouvert pseudo-convexe est le domaine d'existence d'une fonction G-analytique (i.e. d'une fonction non nécessairement continue, mais dont la restriction aux sous-espaces de dimension finie est analytique).

III. RESOLUTION DU PROBLEME DE LEVI DANS LES ESPACES DE BANACH A BASE.

Si E est un elc, on appelle *base de Schauder* une suite $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de E telle que pour tout x de E, il existe une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ unique de scalaires tels que $x = \sum_1^{\infty} x_n e_n$ et telle que les applications $x_n : x \to \sum_1^n x_i e_i$ soient continues pour tout n. Si on note E_n le sous-espace engendré par $e_1,\dots,e_n$, les applications u_n sont des projections de E sur E_n et l'on a : $u_m \circ u_n = u_{\inf(n,m)}$. Si la famille (u_n) est équicontinue, on dit que la base est équicontinue ; c'est toujours le cas si l'espace est tonnelé.

Le théorème suivant est dû à GRUMAN et KISELMAN [9] ; la démonstration que nous donnons diffère légèrement de la démonstration originale.

THEOREME 1. - *Dans un espace de Banach à base de Schauder, tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'existence d'une fonction analytique.*

On en déduit immédiatement que pour un ouvert d'un espace de Banach à base, les conditions 1, 2, 3 et 4 équivalent à la pseudo-convexité.

Soit donc U un ouvert pseudo -convexe d'un espace de Banach à base, on peut, au besoin, en remplaçant la norme initiale par une norme équivalente, supposer que $\|u_n\| \leqslant 1$ pour tout n. Notons $E_\infty = \cup E_n$ où E_n est le sous-espace engendré par $e_1,\dots,e_n$.

Fixons une suite $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dense dans ∂U ; pour tout n, il existe une suite $(y_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ de U qui converge vers y_n et il 'nest pas difficile de montrer que l'on peut choisir cette suite dans $U \cap E_\infty$. On va prouver le théorème en construisant une fonction f analytique dans U telle que $\lim\limits_{m\to\infty} |f(y_{n,m})| = +\infty$ pour tout n.

Posons $U_n = \{x \in U,\ \|x\| \leqslant n \text{ et } d(x, \complement U) \geqslant \frac{1}{n}\}$

et $L_n = \{x \in U,\ \|u_n(x) - x\| \leqslant \frac{1}{2} d(x, \complement U)\}$.

Soit Φ une surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\Phi^{-1}(n)$ soit un ensemble infini pour tout n de $\mathbb{N}$.

Posons $n_1=1$, puis choisissons $n_2 > n_1$ tel que $y_{\phi(1),n_2} \notin U_{n_1}$ et $y_{\phi(1),n_1} \in E_{n_2} \setminus E_{n_1}$. L'entier n_2 étant choisi, prendre $n_3 > n_2$ tel que :

$$y_{\phi(2),n_3} \notin U_{n_2},\ y_{\phi(2),n_3} \in E_{n_3} \setminus E_{n_2} \quad \text{et} \quad U_{n_2} \cap L_{n_1} \cap E_{n_2} \subset U_{n_3}.$$

Notons $a_{i+1} = y_{\phi(i),n_{i+1}}$ et $K_i = U_{n_i} \cap L_{n_{i-1}} \cap E_{n_i}$ qui est un compact de Runge de $U \cap E_n$. Par récurrence, on peut choisir une suite $(n_i)_{i=1}^{\infty}$, $n_{i+1} > n_i > i$ telle que pour tout i, l'on ait $a_i \in U \cap E_{n_i} \cap \complement K_i$.

LEMME 1. - *Pour tout compact* K *de* U *il existe* i_K *tel que* $\widehat{u_{n_i}(K)}_{H(U \cap E_{n_i})} \subset K_i$ *pour tout* $i \geq i_K$.

En effet, comme u_n tend uniformément sur K vers l'identité, il existe $n_\circ$ tel que $n \geq n_\circ$ entraîne $u_n(K) \subset U_n$ et $\|u_n(x) - x\| \leq \frac{1}{5}\, d(K, \complement U)$ pour tout x de K.

Soit $y = u_{n_i}(x)$ avec $x \in K$ et $i \geq n_\circ + 1$:

$$\begin{aligned}\|u_{n_{i-1}}(x) - x\| &= \|u_{n_{i-1}}(x) - u_{n_i}(x)\| \\ &\leq \|u_{n_{i-1}}(x) - x\| + \|u_{n_i}(x) - x\| \\ &\leq \frac{2}{5}\, d(K).\end{aligned}$$

D'autre part, $d(y) \geq d(x) - \|y-x\| \geq d(K) - \|u_{n_i}(x) - x\| \geq \frac{4}{5}\, d(K)$, d'où $\|u_{n_{i-1}}(y) - y\| \leq \frac{1}{2}\, d(y, \complement U)$, c'est-à-dire $u_{n_i}(K) \subset L_{n_{i-1}}$. Il s'ensuit que $u_{n_i}(K) \subset L_{n_{i-1}} \cap U_{n_i} \cap E_{n_i} = K_i$ et le résultat puisque $\hat{K}_{i\,H(U \cap E_{n_i})} = K_i$.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 2. - *Soit* f_1 *une fonction analytique dans* $U \cap E_{n_1}$, *il existe une suite* $(f_i)_{i \geq 1}$ *telle que :*

1) $f_i \in H(U \cap E_{n_i})$, $\forall i \geq 1$,

2) $\left|f_i - f_{i-1} \circ u_{n_{i-1}}\right|_{K_i} \leq 2^{-i}$

3) $|f_i(a_i)| \geq i$.

Le lemme se démontre par récurrence : soit f_{i-1} dans $H(U \cap E_{n_{i-1}})$, la fonction $f_{i-1} \circ u_{n_{i-1}}$ est analytique au voisinage de K_i car $u_{n_{i-1}}(K_i) \subset u_{n_{i-1}}(L_{i-1}) = U \cap E_{n_{i-1}}$. Soit h la restriction de cette fonction à $U \cap E_{n_i}$. Comme la fonction h est analytique au voisinage du compact de Runge K_i de

$U \cap E_{n_i}$, il existe une fonction h_1 analytique dans $U \cap E_{n_i}$ telle que

$$|h-h_1|_{K_i} \leqslant 2^{-(i+1)}.$$

Comme a_i appartient à $(U \cap E_{n_i}) \setminus A_n$, il existe une fonction h_2 analytique dans $U \cap E_{n_i}$ telle que $|h_2(a_i)| \geqslant |h_1(a_i)| + i$ et $|h_2|_{K_i} \leqslant 2^{-(i+1)}$.

La fonction $f_i = h_1 + h_2$ est analytique dans $U \cap E_{n_i}$; de plus,

1. $|f_i(a_i)| \geqslant |h_1(a_i)| - |h_2(a_i)| \geqslant i$,
2. Si x appartient à K_i,

$$\begin{aligned}|f_i(x) - f_{i-1} \circ u_{n_{i-1}}(x)| &= |h_1(x) + h_2(x) - f_{i-1} \circ u_{n_{i-1}}(x)| \\ &= |h_1(x) + h_2(x) - h(x)| \\ &\leqslant |h_1(x) - h(x)| + |h_2(x)| \\ &\leqslant 2^{-i}.\end{aligned}$$

On peut maintenant construire la fonction f dont U est le domaine d'existence : à partir de la suite (f_i) introduite dans le lemme précédent, considérons la suite des fonctions $\varphi_i = f_i \circ u_{n_i}$. Le lemme 1 entraîne que pour tout compact K de U, les fonctions φ_i sont définies sur K à partir d'un certain indice ; de plus

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{i+j} - \varphi_i\right|_K &= \sum_{s=1}^{j} \left|\varphi_{i+s} - \varphi_{i+s-1}\right|_K \\ &= \sum_{s=1}^{j} \left|f_{i+s} - f_{i+s-1} \circ u_{n_{i+s-1}}\right|_{u_{n_{i+s}}(K)} \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{j} \left|f_{i+s} - f_{i+s-1} \circ u_{n_{i+s-1}}\right|_{K_{i+s}} \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{j} 2^{-(i+s)} \leqslant 2^{-i}.\end{aligned}$$

Sur tout compact K de U, la suite (φ_n) tend donc uniformément vers une limite f qui est G-analytique (prendre les compacts de dimension finie) et continue, donc analytique dans U. De plus, en prenant $K = \{a_i\}$ et en faisant tendre j vers l'infini, il vient $|f(a_i) - f_i(a_i)| \leqslant 2^{-i}$, d'où $\lim\limits_{i \to \infty} |f(a_i)| = +\infty$ puisque $|f_i(a_i)| \geqslant i$. Le théorème 1 est démontré.

IV. RESOLUTION DU PROBLEME DE LEVI DANS UN ESPACE NON NORME.

Le cas non normé est plus délicat à traiter. On montre d'abord [5] que tout elc à base de Schauder équicontinue est une limite surjective ouverte d'espaces E_i, chaque E_i possédant une base de Schauder équicontinue et admettant une norme continue non nulle. Ceci permet de supposer que la topologie est définie par une famille de normes.

Etudions d'abord le cas métrisable :

THEOREME 2. - *Si* E *est un espace métrisable possédant une base de Schauder équicontinue, tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'existence.*

Esquisse de la démonstration. - Si l'on pose $\delta_n(x) = \inf\limits_{m \geqslant n} d_U(x, u_m(x) - x)$, la fonction $-\log \delta_n$ est plurisousharmonique dans U. Les ouverts $V_n = \{x \in U,\ \delta_n(x) > 1\}$ sont pseudo-convexes et finiment de Runge dans U, c'est-à-dire que pour tout sous-espace F de dimension finie $(V_n \cap F, U \cap F)$ est un couple de Runge dans F. De plus, $V_n \subset V_{n+1}$, $V = \cup V_n$, $U \cap E_n = V_n \cap E_n$ et $u_n(V_n) = U \cap E_n$.

Ensuite on pose

$$K_{n,\alpha} = \{x \in V_n,\ \|x\|_\circ \leqslant \alpha \text{ et } d_n(x, \complement U) \geqslant \frac{1}{\alpha}\},$$

c'est une suite croissante en n et α. Soit $\emptyset : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\emptyset^{-1}(n)$ soit infini pour tout n de $\mathbb{N}$. On peut alors choisir des suites $m_i \geqslant i$, $n_i \geqslant \sup(i, m_{i-1})$ et $\alpha_i > \alpha_{i-1}$ telles que

1. $z_i = y_{\emptyset(i)m_i} \in K(n_{i+1}, \alpha_{i+1}) \cap E_{n_{i+1}} \setminus K(n_i, \alpha_i) \cap E_{n_i}$,

2. $K(n_i, \alpha_i) \supset \bigcup\limits_{j < i} K(n_j, n_i - \alpha_j)$,

3. $u_{n_i}[K(n_i, \alpha_i)] \subset u_{n_i}(v_{n_i}) \subset U$.

Posons $K_i = E_{n_{i+1}} \cap K(n_i, \alpha_i)$.

On montre alors que pour tout compact K de U, il existe un entier $i_\circ$ tel que $u_{n_i}(K) \subset K_{i+1}$ pour tout $i \geqslant i_\circ$.

La démonstration se termine alors comme dans le cas des espaces de Banach en construisant la suite (f_i) du lemme 2, puis la fonction f dont U est le domaine d'existence.

Le cas non métrisable se résout partiellement en remarquant qu'il existe des elc tels que tout domaine pseudo-convexe est ouvert pour une topologie métrisable plus faible que la topologie initiale (ces espaces sont appelés *σ-convexes* dans [7]).

Exemples de tels espaces :

1. Toute limite projective d'espaces de Fréchet, de Banach ou de Silva ($\mathcal{D}$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{S}$) par des applications surjectives,

2. Tout espace souslinien (i.e. il existe un espace (non vectoriel) topologique métrisable complet séparable Y et une application continue surjective de Y sur E) comme les espaces $\mathcal{L}\mathcal{F}$ séquentiellement séparables, les espaces duaux de Fréchet séparables que l'on munit de la topologie de la convergence compacte, etc...

Dans de tels espaces, tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'holomorphie (i.e. satisfait à la condition 3).

Si de plus il existe sur la frontière de tout ouvert une suite dense de points séquentiellement accessibles (de tels espaces sont appelés *fortement séparables* dans [7]), tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'existence.

Dans ces derniers exemples, on suppose toujours que l'espace possède une base de Schauder équicontinue.

Rappelons pour terminer qu'il existe un ouvert pseudo-convexe d'un espace de Banach non séparable qui n'est un ouvert d'holomorphie en aucun sens [11].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ALEXANDER, *Analytic functions on Banach spaces*, Thèse, Berkeley 1968.

[2] S. DINEEN, *Holomorphic functions on* (c_o, X_b)*-modules*, Math. Ann. 196, 1972, p. 106-116.

[3] S. DINEEN, *Bounding subsets of a Banach space*, Math. Ann. 192, 1971, p. 61-70.

[4] S. DINEEN, *Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces II, pseudo-convex domains*, Ann. Inst. Fourier, t. 23, 1973, p. 155-185.

[5] S. DINEEN, *Surjective limits of locally convex spaces and their application to infinite dimensional holomorphy*, Bull. SMF (à paraître).

[6] S. DINEEN et A. HIRSCHOWITZ, *Sur le théorème de Lévi banachique*, C. R. Acad. Sc. t. 272, 1971, p. 1245-47.

[7] S. DINEEN, Ph. NOVERRAZ et M. SCHOTTENLOHER, *Le problème de Lévi dans certains espaces vectoriels topologiques*, Bull. SMF (à paraître).

[8] L. GRUMAN, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces*, Illinois J. of Math., t. 18, 1974, p. 20-26.

[9] L. GRUMAN et C.O. KISELMAN, *Le problème de Lévi dans les espaces de Banach à base*, C.R. Acad. Sc., t. 274, 1972, p. 1296-98.

[10] A. HIRSCHOWITZ, *Sur le non-prolongement des variétés analytiques banachiques réelles*, C.R. Acad. Sc., t. 269, 1969, p. 844-46.

[11] B. JOSEFSON, *A counterexample in the Levi problem*, Springer Lecture Notes, 364, p. 168-177.

[12] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques*, Springer Lecture Notes 71, p. 167-189.

[13] Ph. NOVERRAZ, *Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie*, North-Holland 1973.

[14] Ph. NOVERRAZ, *Sur le théorème de Cartan-Thullen Oka en dimension infinie*, Ann. Acad. Brasil, Cienc. (1973), 45, p. 5-11 et C.R. Acad. Sc., t. 274, 1972, p. 313-315.

[15] Ph. NOVERRAZ, *Pseudo-convexité et base de Schauder dans les elc*, Sém. P. LELONG 1973-1974, Springer Lecture Notes 474.

[16] R. POMES, *Le problème de Lévi dans les espaces de Silva*, C.R. Acad. Sc., t. 278, 1974, p. 707-710.

[17] N. POPA, *Sur le problème de Lévi*, C.R. Acad. Sc., t. 277, 1973, p. 211-214.

[18] M. SCHOTTENLOHER, *The Levi problem in unendlichdimensionalen Räumen mit Schauderzerlegung, Habilitationschrift*, Münich 1974.

Philipe NOVERRAZ
Université de NANCY I
U.E.R. Sciences Mathématiques
Case officielle 140

54037 NANCY CEDEX