PIERRE DE LA HARPE
MAX KAROUBI

Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 41-65
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__41_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 41-65.

PERTURBATIONS COMPACTES DES REPRESENTATIONS D'UN GROUPE DANS UN ESPACE DE HILBERT

par Pierre DE LA HARPE et Max KAROUBI

I. INTRODUCTION ET EXEMPLES.

L'objet de ce travail est l'étude de quelques aspects des représentations de groupes, notamment de la relation entre ce qu'on peut appeler certaines perturbations *locales* et *globales* de telles représentations. Un résumé a paru dans une note aux Comptes Rendus [9].

I.1. - Formulation naïve du problème principal.

Tout au long de cette rédaction, nous désignons par H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, par L(H) l'algèbre stellaire des opérateurs (= opérateurs linéaires bornés) sur H, et par C(H) l'idéal des opérateurs compacts. Le groupe unitaire $U(H) = \{X \in L(H) | XX^* = X^*X = id_H\}$ sera toujours muni de sa topologie *normique*. Sauf mention explicite du contraire, tous les homomorphismes de groupes seront supposés *continus*. Une *représentation unitaire* d'un groupe topologique G dans H sera un homomorphisme $S : G \to U(H)$. A part le cas où G est discret, cette notion n'est donc *pas* la notion usuelle, où S est supposé continu lorsque U(H) est muni de sa topologie forte.

Dans tout ce qui suit, les opérateurs compacts peuvent être considérés comme "petits", et le *problème principal* qui nous intéresse peut se formuler comme suit :

Soit G un groupe topologique et $T : G \to U(H)$ une *application* continue telle que $T(gh) - T(g)T(h)$ soit compact pour tous $g,h \in G$. Quelles sont les obstructions à l'existence d'un *homomorphisme* $S : G \to U(H)$ tel que $S(g) - T(g)$ soit compact pour tout $g \in G$? En d'autres termes : soit T une application qui se présente localement comme une perturbation compacte d'une représentation ; quand peut-on considérer globalement T comme une perturbation d'une représentation S ?

En particulier, quels sont les groupes topologiques pour lesquels il est toujours possible de trouver (au moins) un réel S, quelle que soit l'application T donnée ? De tels groupes seront appelés *relevables*.

I.2. - Formulation à la Calkin.

Il est avantageux d'exprimer le problème principal sous une forme légèrement différente. Soit Cal(H) l'*algèbre de Calkin* de H, c'est-à-dire l'algèbre stellaire quotient de L(H) par C(H), et soit $Cal(H)^u = \{x \in Cal(H)\ xx^* = x^*x = 1\}$ son groupe unitaire, muni de la topologie normique. Nous écrirons $\pi : U(H) \to Cal(H)^u$ l'homomorphisme naturel, et $U(H,C) = \{X \in U(H) | X - id_H \in C(H)\}$ son noyau ; on sait que l'image de π est la composante connexe $Cal(H)^u_o$ de $Cal(H)^u$. (Ce dernier fait résulte de la proposition analogue concernant le groupe des élements inversibles de Cal(H), qui se trouve par exemple dans PALAIS [16], chap. VII , et de la rétraction de ce groupe sur $Cal(H)^u$ fournie par la décomposition polaire, qu'il convient d'écrire comme dans LANG [14], chap. 7, prop. 6). Nous écrirons aussi π la projection canonique de L(H) sur Cal(H).

DEFINITION. - *Soient* G *un groupe topologique et* $\sigma : G \to Cal(H)^u_o$ *un homomorphisme homotope (en tant qu'application continue) à l'application constante de* G *sur* $\{1\}$. *Nous dirons que* σ *est* relevable *s'il existe un homomorphisme* S *(= relèvement de* σ*) tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & U(H) \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "\sigma"] & Cal(H)^u_o \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Nous dirons que G *est* relevable *si tous ses homomorphismes dans* $Cal(H)^u_o$ *homotopes à une constante le sont.*

Le *problème principal* devient alors : *trouver les obstructions à relever un tel* σ. En effet, soit $T : G \to U(H)$ comme dans la formulation naïve ; alors le composé πT est un homomorphisme de G dans $Cal(H)^u_o$ qui est homotope à une constante (puisque T l'est déjà en vertu du théorème de KUIPER [13]). Réciproquement, soit $\sigma : G \to Cal(H)^u_o$ comme dans la définition ci-dessus ; comme $\pi : U(H) \to Cal(H)^u_o$ a la propriété de relèvement des homotopies (puisque c'est un fibré localement trivial par un théorème de Michael - voir PALAIS [17], th. 11), il est toujours possible de trouver une application continue $T : G \to U(H)$ telle que $\pi T = \sigma$. Ces considérations homotopiques sont bien évidemment inutiles lorsque G est discret.

Pour abréger l'écriture, nous convenons désormais qu'un *bon homomorphisme* d'un groupe topologique G dans $Cal(H)^u_o$ [ou dans $Cal(H)^{inv}_o$ - voir section II] est un homomorphisme homotope (en tant qu'application continue) à l'application constante de G sur $\{1\}$. Il est banal que tous les homomorphismes de G dans $Cal(H)^u_o$ ou dans $Cal(H)^{inv}_o$ sont bons lorsque G est discret ou lorsque G est un groupe vectoriel (car alors $G = \mathbb{R}^n$ est contractile) ; c'est aussi vrai, et même facile, lorsque G est un tore ou lorsque $G = SU(2) \sim S^3$ (car les groupes d'homotopie impairs de $Cal(H)^u_o$ et de $Cal(H)^{inv}_o$ sont nuls) ; plus généralement, nous montrons au § II.3 que c'est encore vrai si G est un groupe de Lie. Nous n'avions pas su préciser davantage la classe des groupes dont tous les homomorphismes dans $Cal(H)^u_o$ sont bons, mais L.G. Brown nous a communiqué qu'elle contient les groupes localement compacts.

I.3. - Exemples.

Avant d'énoncer quelques résultats généraux, nous présentons quatre de nos cas particuliers favoris ; les deux premiers sont banals, le troisième est un cas typique de groupe non relevable, et le dernier de groupe qui l'est.

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels est relevable. - En effet, si $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathrm{Cal}(H)_o^u$ est un homomorphisme, il existe $X \in U(H)$ avec $\pi(X) = \sigma(1)$, et

$$S \begin{cases} \mathbb{Z} \to U(H) \\ n \to X^n \end{cases} \quad \text{relève } \sigma.$$

Le groupe additif des nombres réels $\mathbb{R}$ est relevable. - La théorie élémentaire des équations différentielles dans les espaces de Banach montre que tout homomorphisme $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Cal}(H)_o^u$ est de la forme $\sigma : \xi \longmapsto \exp(i\xi a)$ où a est un élément auto-adjoint de $\mathrm{Cal}(H)$. Si A est un opérateur auto-adjoint sur H tel que $\pi(A) = a$ (et il en existe toujours), alors $S(\xi) = \exp(i\xi A)$ définit un relèvement de σ.

Le groupe vectoriel de dimension deux n'est pas relevable. - Soit $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Cal}(H)_o^u$ un homomorphisme. De même que dans l'exemple précédent, il existe deux éléments auto-adjoints permutables a et b dans $\mathrm{Cal}(H)$ tels que $\sigma(\xi,\eta) = \exp(i\xi a)\exp(i\eta b)$ pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $x_\sigma = a + ib$, qui est un élément normal de $\mathrm{Cal}(H)$. Alors σ se relève si et seulement s'il existe un opérateur normal X sur H tel que $\pi(X) = x_\sigma$. En effet, si un tel X existe, soient $A = \frac{1}{2}(X + X^*)$ et $B = \frac{1}{2i}(X - X^*)$; alors $AB - BA = \frac{1}{2i}(X^*X - XX^*) = 0$ et $\sigma = \pi S$ avec

$$S \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow U(H) \\ (\xi,\eta) \longmapsto \exp(i\xi A)\exp(i\eta B) \end{cases} \quad \text{; la réciproque est claire.}$$

Soit alors $\mathrm{Sp}(x_\sigma)$ le spectre de x_σ. Pour tout nombre complexe $\lambda \notin \mathrm{Sp}(x_\sigma)$, l'indice de $x_\sigma - \lambda$ est bien défini : c'est l'indice de Fredholm usuel de tout opérateur sur H dont l'image par π soit $x_\sigma - \lambda$. Soit $\mathcal{O}(\sigma)$ la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{C} - \mathrm{Sp}(x_\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \lambda \longmapsto \mathrm{ind}(x_\sigma - \lambda) \end{cases}$$

. Alors $\mathcal{O}(\sigma)$ est la fonction nulle s'il existe X normal sur H avec $\pi(X) = x_\sigma$, car l'indice de tout opérateur normal est nul. Réciproquement, un résultat fondamental de BROWN, DOUGLAS et FILLMORE [3] affirme qu'il existe X normal sur H avec $\pi(X) = x_\sigma$ dès que $\mathcal{O}(\sigma) = 0$.

En résumé, σ se relève si et seulement si $\mathcal{O}(\sigma) = 0$.

Soit par exemple D un décalage unilatéral sur H, soient $d = \pi(D)$, $a = \frac{1}{2}(d+d^*)$ et $b = \frac{1}{2i}(d-d^*)$, et posons $\sigma : (\xi,\eta) \longmapsto \exp(i\xi a)\exp(i\xi b)$. Alors σ est un homomorphisme (car $D^*D - DD^*$ est de rang fini, de sorte que a et b commutent), $\mathrm{Sp}(d)$ est le cercle unité,

$$\mathcal{O}(\sigma)(\lambda) = \begin{cases} -1 & \text{si } |\lambda| < 1 \\ 0 & \text{si } |\lambda| > 1 \end{cases}$$

, et σ ne se relève pas. (Calcul de $\mathcal{O}(\sigma)$:

1° d est unitaire, donc $Sp(d) \subset S^1$.

2° $\mathrm{Ind}(D) = \mathcal{O}(\sigma)(0) = -1$ et $\mathrm{Ind}(D-\lambda) = \mathcal{O}(\sigma)(\lambda) = 0$ si $|\lambda|$ est grand puisque $D-\lambda$ est alors inversible.

3° L'indice est une fonction continue, donc Sp(d) sépare le plan, de sorte que $Sp(d) = S^1$ et que $\mathcal{O}(\sigma)$ est bien comme ci-dessus).

Le groupe à deux éléments $\mathbb{Z}_2 = \{1,\varepsilon\}$ *est relevable.* - Soient $\sigma : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Cal}(H)^u_o$ un homomorphisme et $j = \sigma(\varepsilon)$. Choisissons $J_1 \in U(H)$ avec $\pi(J_1) = j$, de sorte que $J_1^2 - \mathrm{id}_H$ est compact. Il s'agit de trouver $J \in U(H)$ avec $J^2 = \mathrm{id}_H$ et $J-J_1$ compact ; nous analysons le procédé en détail, car il illustre l'essentiel de la preuve du théorème I ci-dessous.

Premier échelon. - Soit $J_2 = \frac{1}{2}(J_1^* + J_1)$. Alors $\pi(J_2) = j$ et J_2 est auto-adjoint. Par suite $\mathrm{Ker}(J_2) = (\mathrm{Im}(J_2))^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie.

Deuxième échelon. - Soit J_3 l'opérateur défini sur H par $J_3(v) = v$ si $v \in \mathrm{Ker}(J_2)$ et $J_3(v) = J_2(v)$ si $v \in (\mathrm{Ker}(J_2))^{\perp}$. Alors $\pi(J_3) = j$ et J_3 est à la fois auto-adjoint et inversible. Soient Sp_- [resp. Sp_+] la partie du spectre de J_3 contenue dans l'axe réel strictement négatif [resp. strictement positif] ; alors $Sp(J_3) = Sp_- \cup Sp_+$.

Troisième échelon. - Soit f la fonction continue définie sur $Sp(J_3)$ par

$$f(\lambda) = \begin{cases} -1 & \text{si } \lambda < 0 \\ +1 & \text{si } \lambda > 0 \end{cases} \qquad \text{et soit } J = f(J_3).$$

Alors J est auto-adjoint (car $\overline{f(\lambda)} = f(\lambda)$) et $J^2 = \mathrm{id}_H$ (car $(f(\lambda))^2 = 1$), donc J est aussi unitaire. Enfin $\pi(J) = f(\pi(J_3)) = f(j) = j$ car $f(\lambda) = \lambda$ si $\lambda \in Sp(j) \subset \{-1,+1\}$. (Pour le calcul fonctionnel dans les algèbres stellaires, voir par exemple DIXMIER [8], § 1.5).

Cet exemple n'est pas nouveau : c'est sans doute CALKIN [6], th. 2.4 qui a remarqué le premier (quoiqu'en d'autres termes) que Z_2 est relevable ; c'est aussi un cas particulier d'un résultat dû à OLSEN [15], th. 2.4 que tout groupe cyclique est relevable. Mais la preuve indiquée ci-dessus, contrairement à celles de Calkin et Olsen, répond bien aux besoins de la section III.

I.4. - Les résultats principaux.

Les deux premiers résultats résolvent le problème principal et paramétrisent ses solutions pour les groupes compacts. Tout groupe compact est désormais muni de sa mesure de Haar normalisée.

THEOREME 1. - *Tout groupe compact est relevable.*

Soient G un groupe topologique, $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)_0^u$ un homomorphisme et $S : G \to U(H)$ un relèvement donné de σ. Pour tout $X \in U(H)$, désignons par S^X l'*homomorphisme conjugué* de S par X, défini par $S^X(g) = X^{-1}S(g)X$ pour tout $g \in G$. Si $X \in U(H,C) = \mathrm{Ker}(\pi)$, alors S^X est encore un relèvement de σ. On n'épuise toutefois pas tous les relèvements de σ de cette manière, comme BROWN, DOUGLAS et FILLMORE [3], remarque 4.9, l'ont déjà explicitement remarqué dans le cas $G = \mathbb{Z}_2$. Par suite, le problème principal se complète naturellement par la *question d'unicité* : trouver une paramétrisation convenable de l'ensemble de tous les relèvements d'un homomorphisme σ donné, modulo la relation de conjugaison sous $\mathrm{Ker}(\pi)$.

Lorsque G est compact, la question d'unicité se résout comme suit. Soient σ et S comme ci-dessus. A tout relèvement S' de σ, associons l'opérateur sur H

$$\alpha = \int_G S'(g)S(g^{-1})dg.$$

C'est un opérateur de Fredholm d'indice zéro (car $\alpha - \mathrm{id}_H \in C(H)$) qui entrelace les représentations S et S'. Soient $[\mathrm{Ker}(\alpha)]$ la classe d'équivalence de la sous-représentation de S définie par le noyau de α, et $[(\mathrm{Im}(\alpha))^\perp]$ celle de la sous-représentation de S' définie par l'orthogonal de l'image de α. Définissons $\mathrm{Ind}_G(S,S')$ comme la différence $[\mathrm{Ker}(\alpha)] - [(\mathrm{Im}(\alpha))^\perp] \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$, où $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ est l'idéal d'augmentation de l'anneau des représentations de G.

THEOREME 2. - *Soient* G *compact,* σ *et* S *comme ci-dessus. Soit* $S' : G \to U(H)$ *un autre relèvement de* σ *; alors* S *et* S' *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{Ker}(\pi)$ *si et seulement si* $\mathrm{Ind}_G(S,S') = 0$. *Soit* $\mathrm{Rel}(\sigma)$ *l'ensemble des relèvements de* σ *;*

alors l'application

$$\begin{cases} \mathrm{Rel}(\sigma) \times \mathrm{Rel}(\sigma) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{R}}(G) \\ (S,S') \longmapsto \mathrm{Ind}_G(S,S') \end{cases}$$

est surjective.

Le dernier résultat que nous citerons dans cette introduction fournit entre autres un exemple du fait suivant : il existe des groupes non relevables possédant des sous-groupes relevables qui sont distingués d'indice fini.

THEOREME 3. - *Soit* G *un groupe compact possédant au moins deux éléments. Le produit direct* $G\times\mathbb{Z}$ *n'est pas relevable. Tout bon homomorphisme* $\sigma : G\times\mathbb{Z} \to \mathrm{Cal}(H)_0^u$ *définit un élément* $\mathcal{O}(\sigma) \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$, *et* σ *se relève si et seulement si* $\mathcal{O}(\sigma) = 0$ *; de plus, tout élément de* $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ *est de la forme* $\mathcal{O}(\sigma)$.

I.5. - Plan du travail.

La section II est consacrée à des généralités. On y discute en particulier le problème analogue pour le groupe général linéaire à celui décrit dans l'introduction pour le groupe unitaire : trouver les obstructions à réaliser l'homomorphisme pointillé dans un diagramme commutatif du type

$$\begin{tikzcd} & GL(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Cal(H)_o^{inv} \end{tikzcd}$$

La section III présente la preuve du théorème 1. La section IV celle des théorèmes 2 et 3.

Dans les sections II et III, nous indiquons ici et là comment nos résultats sont encore vrais si l'on remplace partout H par un espace de Hilbert *réel*. Dans la section IV, il faudrait alors remplacer l'anneau $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ par l'objet réel correspondant ; nous ne l'avons pas fait pour ne pas alourdir le texte et les notations, mais cette extension au cas réel ne présenterait pas de difficulté.

Nous sommes reconnaissants à L.G. Brown qui nous a signalé des erreurs dans une rédaction préliminaire de ce travail, et à qui nous devons aussi, notamment : La remarque importante qui conclut le § I.2. Une preuve différente de la nôtre du théorème 1, qu'il obtient comme corollaire d'un résultat de THAYER [22]. Le fait que le groupe additif des nombres rationnels et les groupes de torsion dénombrables (munis de leurs topologies discrètes) sont relevables. Une généralisation de notre § IV.2 aux groupes de la forme G×A, où G est compact et A abélien localement compact.

Nous remercions également O. Burlet, J. Dixmier, W. Gfeller et L. Smith pour d'utiles conversations . Le premier auteur tient à remercier le "fonds national suisse de la recherche scientifique" pour son généreux support.

II. GENERALITES.

II.1 - Représentations et représentations unitaires dans les algèbres de Banach et les algèbres stellaires.

Le contenu de ce paragraphe fait sans doute partie du folklore, mais il nous convient de le resservir ici à notre sauce.

Si A est une algèbre de Banach complexe (toujours avec une unité notée 1), nous désignons par A^{inv} le groupe de ses éléments inversibles muni de la topologie normique, et par A_o^{inv} la composante connexe de A^{inv} (nous écrivons toutefois GL(H) au lieu de $L(H)^{inv} = L(H)_o^{inv}$). Si A est de plus une algèbre stellaire, nous désignons par $A^u = \{x \in A \mid xx^* = x^*x = 1\}$ son groupe unitaire muni de la topologie normique, et par A_o^u la composante connexe de A^u (avec de même U(H) au lieu de $L(H)^u = L(H)_o^u$).

Une *représentation* d'un groupe topologique G dans l'algèbre de Banach A est un homomorphisme σ (continu : voir § I.1) de G dans A_o^{inv}. Si $x \in A^{inv}$, le *conjugué de* σ *par* x est alors l'homomorphisme

$$\sigma^x \begin{cases} G \longrightarrow A_o^{inv} \\ g \longmapsto x^{-1}\sigma(g)x \end{cases}$$

Une *représentation unitaire* de G dans l'algèbre stellaire A est un homomorphisme de G dans A_o^u.

Dans de nombreux cas, on ne gagnerait aucune généralité à envisager des homomorphismes dans A^{inv} et A^u, comme nous le rappelons maintenant.

PROPOSITION 1. - *Soit* G *un groupe topologique satisfaisant l'une au moins des propriétés suivantes :*

1. G *est connexe,*

2. G *est engendré par ses sous-groupes compacts.*

(i) Si A *est une algèbre de Banach complexe, l'image de tout homomorphisme* $\sigma : G \to A^{inv}$ *est dans* A_o^{inv}.

(ii) Si A *est une algèbre stellaire, l'image de tout homomorphisme* $\sigma : G \to A^u$ *est dans* A_o^u.

Preuve. - Si G est connexe, il n'y a rien à montrer puisque les homomorphismes considérés sont tous continus.

Montrons (i) lorsque G est abélien compact. Soit B l'algèbre de Banach engendrée par l'image de σ, et soit D le groupe discret B^{inv}/B_o^{inv}. Alors σ induit par composition avec la projection canonique de B^{inv} sur D un homomorphisme $G \to D$ dont l'image est (relativement) compacte puisque G est compact. Mais D est sans torsion par un théorème de Lorch (voir RICKART [19], preuve du th. 14.14), et l'image de σ est contenue dans B_o^{inv}, donc aussi dans A_o^{inv}.

Si G satisfait 2., l'assertion (i) est encore vraie puisqu'alors G est engendré par ses sous-groupes abéliens compacts.

L'assertion (ii) résulte de (i) et de l'égalité $A_o^u = A^u \cap A_o^{inv}$, elle-même conséquence facile de la décomposition polaire des éléments de A.

Exemple. - Il est bien connu que les groupes $SL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geq 2)$ satisfont la condition 2. ci-dessus.

Remarque. - Si $A = \mathrm{Cal}(H)$, alors $\mathrm{Cal}(H)^{inv}/\mathrm{Cal}(H)^{inv}_o = \mathrm{Cal}(H)^u/\mathrm{Cal}(H)^u_o = \mathbb{Z}$, et on peut ajouter 3. : l'abélianisé de G est un groupe compact.

Tant que nous ne nous intéressons qu'aux groupes compacts et aux algèbres stellaires, nous pouvons aussi nous restreindre à l'étude des représentations unitaires, comme l'indique la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - *Soient* G *un groupe compact et* A *une algèbre stellaire. Toute représentation de* G *dans* A *est conjuguée à une représentation unitaire par un élément positif de* A.

Preuve. - Soient $\sigma : G \to A^{inv}_o$ un homomorphisme et $y = \int_G \sigma(g)(\sigma(g))^* dg$. Alors y est positif car les éléments positifs de A contiennent les $\sigma(g)(\sigma(g))^*$ et forment un cône convexe fermé (voir DIXMIER [8], prop. 1.6.1.), et y est inversible car $y-\varepsilon$ est encore positif pour ε suffisamment petit (mêmes raisons). Par invariance de la mesure de Haar : $\sigma(g)y(\sigma(g))^* = y$ pour tout $g \in G$. Soit x la racine carrée positive de y ; alors

$$\sigma^x(g)(\sigma^x(g))^* = (x^{-1}\sigma(g)x)(x(\sigma(g))^* x^{-1}) = x^{-1}(\sigma(g)y(\sigma(g))^*)x^{-1} = 1,$$

ce qui montre que σ^x est un homomorphisme de G dans A^u_o.

La proposition 2 permet d'établir facilement un corollaire du théorème 1, que nous supposons démontré dans la fin de ce paragraphe II.1. Nous désignons encore par π la projection canonique de GL(H) sur $\mathrm{Cal}(H)^{inv}_o$.

THEOREME 1 bis. - *Soient* G *un groupe compact et* $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)^{inv}_o$ *un bon homomorphisme. Alors il existe un homomorphisme* $S : G \to GL(H)$ *tel que* $\pi S = \sigma$.

Preuve. - Soit x comme dans la preuve de la proposition 2. Par le théorème 1, il existe un relèvement $S' : G \to U(H)$ de σ^x. Comme x est auto-adjoint et inversible, il est d'indice de Fredholm zéro et il existe $X \in GL(H)$ avec $\pi(X) = x$. Alors $S = (S')^{X^{-1}} : g \longmapsto XS'(g)X^{-1}$ convient.

II.2. - Relèvements de représentations conjuguées dans l'algèbre de Calkin.

Nous conjecturons que, si G est un groupe topologique arbitraire et σ un homomorphisme de G dans $\mathrm{Cal}(H)^u_o$ [resp. $\mathrm{Cal}(H)^{inv}_o$], alors σ se relève si et seulement si tous ses conjugués σ^x se relèvent lorsque x parcourt $\mathrm{Cal}(H)^u_o$ [resp. $\mathrm{Cal}(H)^{inv}_o$]. Nous ne savons toutefois montrer ceci que dans quelques cas particuliers, qui font l'objet de ce paragraphe.

LEMME 1. - *Soient* G *et* σ *comme ci-dessus.*

(i) Soient x *et* y *deux éléments de la même composante connexe de* $\mathrm{Cal}(H)^u$ *; alors* σ^x *se relève si et seulement si* σ^y *se relève.*

(ii) Soit $x \in \mathrm{Cal}(H)^u_o$ *un élément dont l'indice de Fredholm* ind(x) *est un entier naturel (i.e.* $\geqslant 0$*). Si* σ *se relève, alors* σ^x *se relève.*

Preuve. - Nous supposons dans la preuve, H séparable ; la généralisation aux espaces de dimension (infinie) arbitraire est immédiate.

Soit $\{e_1, e_2, \ldots\}$ une base orthonormale de H. Pour tout entier $n > 0$, nous désignons par P_n le projecteur orthogonal de H sur l'espace engendré par $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et par D_n le décalage unilatéral défini par $D_n e_j = e_{n+j}$ pour tout entier strictement positif j. On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} P_n + D_n D_n^* &= D_n^* D_n = 1 \\ P_n D_n &= D_n^* P_n = 0 \\ \mathrm{Ind}(D_n^*) &= -\mathrm{Ind}(D_n) = n \end{aligned}$$

Soit enfin d_n l'élément $\pi(D_n) \in \mathrm{Cal}(H)^u$.

Soient x et y comme dans (i) ; alors il existe $Z \in U(H)$ avec $y = x\pi(Z)$. Si $S : G \to U(H)$ relève σ^x, alors S^Z relève σ^y.

Soit x comme dans (ii) et $n = \mathrm{ind}(x) \geqslant 0$. En vertu de (i), il suffit pour montrer (ii) de considérer le cas $x = d_n^*$ avec $n > 0$. Soit $S : G \to U(H)$ un relèvement de σ ; alors

$$\left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow U(H) \\ g \longmapsto P_n + D_n S(g) D_n^* \end{array} \right. \quad \text{est un homomorphisme qui relève } \sigma^{d_n^*}$$

LEMME 1 bis. - *L'analogue du lemme 1 pour les homomorphismes de* G *dans* $\mathrm{Cal}(H)^{inv}_o$ *est aussi vrai.*

Preuve. - Analogue.

PROPOSITION 3. - *Soient* G *un groupe topologique abélien séparable et* σ *un homomorphisme de* G *dans* $\mathrm{Cal}(H)^u_o$ *ou dans* $\mathrm{Cal}(H)^{inv}_o$ *. Alors* σ *se relève si et seulement si tous ses conjugués se relèvent. (*H *séparable pour cette proposition.)*

Preuve. - Soit $\{g_j\}_{j \in N}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de G. Soit n un entier strictement positif. La preuve du théorème 4.3. dans BROWN, DOUGLAS et

FILLMORE [3] montre qu'il existe $d \in Cal(H)^u$ avec $ind(d) = n$ et $d\sigma(g_j) = \sigma(g_j)d$ pour tout $j \in N$. Par continuité, $\sigma = \sigma^d$, et la proposition résulte alors du lemme 1 (i).

PROPOSITION 4. - *Soient* G *un groupe compact et* $\sigma : G \to Cal(H)^u_o$ *un homomorphisme. Alors* σ *se relève si et seulement si tous ses conjugués se relèvent.*

Preuve. - Vu le lemme 1, il suffit de montrer que σ relevable implique σ^x relevable lorsque $m = ind(x) < 0$. Soit S un relèvement de σ. Comme S est une somme de représentations de dimensions finies [8], (th. 15 . 1.3.), il existe un sous-espace H_n de H, de dimension finie $n \geqslant |m|$, et invariant par G. Soit $\{e_1,\dots,e_{|m|},\dots,e_n,\dots\}$ une base orthonormale de H telle que $\{e_1,\dots,e_n\}$ engendre H_n ; soient P_n et D_n comme dans la preuve du lemme 2.

Comme P_n et $S(g)$ commutent pour tout $g \in G$ et comme $P_nD_n = 0$, l'application $\begin{cases} G \longrightarrow U(H) \\ g \longmapsto D_n^* S(g) D_n \end{cases}$ est encore un homomorphisme, qui relève σ^{d_n}. Mais $ind(d_n^{-1}x) = n+m \geqslant 0$; et il résulte du lemme 1 que le conjugué de σ par $x = d_n\,(d_n^{-1}x)$ est relevable.

PROPOSITION 4 bis. - *Soient* G *un groupe compact et* $\sigma : G \to Cal(H)^{inv}_o$ *un homomorphisme ; on suppose qu'il existe un homomorphisme* $S : G \to GL(H)$ *tel que* $\pi S = \sigma$. *Alors, pour tout* $x \in Cal(H)^{inv}$, *il existe un homomorphisme* $S(x) : G \to GL(H)$ *tel que* $\pi S(x) = \sigma^x$.

Preuve. - Immédiate à partir des propositions 2 et 4.

Remarques :

(i) Soit G un groupe de Lie réel connexe, presque simple (i.e. son algèbre de Lie est simple) et non compact. Le seul homomorphisme de G dans $Cal(H)^u_o$ ou dans $U(H)$ est l'homomorphisme trivial. (Se rappeler que les homomorphismes sont supposés continus pour la topologie normique sur le but. Le cas de $U(H)$ est alors un résultat de SINGER [20], (cor. 4). La preuve de Singer s'étend facilement au cas de $Cal(H)^u_o$; voir par exemple PUTNAM [18], (§ 1.3)). La conclusion de la proposition 4 est donc banalement vraie pour G.

(ii) Soient maintenant G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe, K un sous-groupe compact maximal de G, et S un homomorphisme de G dans $GL(H)$. Par la proposition 2, il existe $X \in GL(H)$ tel que S^X fournisse par restriction un homomorphisme de K dans $U(H)$.

Supposons de plus que S (donc aussi S^X) soit un homomorphisme de groupes de Lie complexes. En vertu du truc unitaire de Weyl, un sous-espace fermé de H est alors invariant par G si et seulement s'il l'est par K. La proposition 4 implique donc le résultat suivant : soient G comme ci-dessus et σ un homomorphisme de groupes de Lie complexes de G dans $\mathrm{Cal}(H)_o^{inv}$; alors σ se relève si et seulement si tous ses conjugués se relèvent. Est-ce encore vrai pour les homomorphismes de groupes topologiques . Est-ce encore vrai si G est un groupe de Lie réel connexe presque simple et non compact ?

II.3. - Groupes de Lie et bons homomorphismes.

Dans tout ce paragraphe, G est un groupe de Lie et G_o est sa composante connexe.

LEMME 2. - *Si* G *est compact, tout homomorphisme* σ *de* G *dans* $\mathrm{Cal}(H)_o^u$ *est bon.*

Preuve. - Soit σ_o la restriction de σ à G_o ; il suffit de montrer que σ_o est bon. Soit $B\sigma_o : BG_o \to B\mathrm{Cal}(H)_o^u$ l'application induite sur les classifiants. L'espace $B\mathrm{Cal}(H)_o^u$ est homotopiquement équivalent au groupe unitaire stable $U(\infty)$ par périodicité de Bott ; par suite, $B\sigma_o$ définit un élément de $K^1(BG_o)$, où K^1 désigne le foncteur K-théorique représentable $[-, U(\infty)]$. Mais $K^1(BG_o) = 0$ (conjecturé par ATIYAH et HIRZEBRUCH [1], (section 4.8), démontré par BUHSTABER et MISCENKO [5], (cor. 3.12) et $B\sigma_o$ est homotope à l'application constante.

Il existe une équivalence d'homotopie $\varepsilon_{G_o} : G_o \to \Omega BG_o$; elle est obtenue en composant l'application naturelle de G_o dans $\Omega\Sigma G_o$ (Σ dénote la suspension et $\Omega(\ )$ un espace de lacets) avec l'inclusion $\Omega\Sigma G_o \to \Omega BG_o$ fournie explicitement par la construction de Milnor de BG_o (voir par exemple STASHEFF [21], page 17). Par suite, cette équivalence est fonctorielle et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_o & \xrightarrow{\sigma_o} & \mathrm{Cal}(H)_o^u \\ \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ \Omega BG_o & \xrightarrow{\Omega B\sigma_o} & \Omega B\mathrm{Cal}(H)_o^u \end{array}$$

commute. Comme $B\sigma_o$ est homotope à une constante, il en est de même de $\Omega B\sigma_o$, et donc aussi de σ_o.

PROPOSITION 5. - *Tout homomorphisme d'un groupe de Lie réel dans* $\mathrm{Cal}(H)_o^u$ *ou dans* $\mathrm{Cal}(H)_o^{inv}$ *est bon.*

Preuve. - Cela résulte pour $\mathrm{Cal}(H)_o^u$ du lemme 2 et du théorème de Cartan-Malcev-Iwasawa selon lequel un groupe de Lie réel connexe est homotopiquement équivalent à l'un de ses sous-groupes compacts [12], (th. 6). Le cas de $\mathrm{Cal}(H)_o^{inv}$ en résulte, puisque la décomposition polaire fournit une équivalence d'homotopie entre $\mathrm{Cal}(H)_o^u$ et $\mathrm{Cal}(H)_o^{inv}$.

L.G. Brown a bien voulu nous communiquer que la proposition 5 est encore vraie si "groupe de Lie réel" est remplacé par "groupe localement compact". Sa preuve utilise notamment des résultats que nous ignorions sur les représentations unitaires normiquement continues d'un groupe localement compact dans un espace de Hilbert (dans lequel Cal(H) est fidèlement représentée), et un résultat sur les relèvements de morphismes $A \to \mathrm{Cal}(H)$, où A est une algèbre stellaire de dimension finie (voir THAYER [22]).

II.4. - Remarques réelles.

Soit A une algèbre de Banach réelle (avec unité). La proposition 1 n'est plus vraie : considérer le sous-groupe à deux éléments de A^{inv} lorsque $A=\mathbb{R}$. Par contre, la proposition 2 est vraie sans changement ; pour les éléments positifs dans les algèbres stellaires réelles, voir par exemple INGELSTAM [11].

Soit $H_{\mathbb{R}}$ un espace de Hilbert réel de dimension infinie. On démontre comme dans le cas complexe que les composantes connexes de $\mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})^{inv}$ sont indexées par les entiers rationnels, que l'image de $\pi : GL(H_{\mathbb{R}}) \to \mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})^{inv}$ coïncide avec la composante connexe $\mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})_o^{inv}$ de $\mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})^{inv}$, et que celle de $\pi : O(H_{\mathbb{R}}) \to \mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})^{orth}$ coïncide avec $\mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})_o^{orth}$. Par suite, le cas particulier de la proposition 1 qui nous intéresse est vrai : soit G un groupe topologique engendré par ses sous-groupes compacts et soit σ un homomorphisme de G dans $\mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})^{inv}$ ou dans $\mathrm{Cal}(H_{\mathbb{R}})^{orth}$; alors l'image de σ est contenue dans la composante connexe du but.

La preuve du théorème I bis à partir du théorème 1 est identique dans les cas réel et complexe, de même que la proposition 4.

III. LES GROUPES COMPACTS SONT RELEVABLES.

III.1. - Préliminaires.

Pour démontrer le théorème I, nous aurons besoin de quelques lemmes techniques que nous rassemblons dans ce paragraphe. Le lecteur imaginatif peut n'en conserver que le lemme 5 sans perdre l'idée générale de l'exposition.

Soient Ω un espace topologique compact et μ une mesure positive normalisée sur Ω (qui sera plus tard la mesure de Haar sur $\Omega=G$). Soient E un espace de Banach (réel ou complexe) et C(E) l'espace de Banach des opérateurs linéaires compacts sur E. Nous notons $L_E^2(\Omega)$ l'espace de Banach des (classes d'équivalence de) fonctions de carré intégrable de Ω dans E, et $C_E(\Omega)$ celui des fonctions continues de Ω dans E ; on sait que l'injection canonique de $C_E(\Omega)$ dans $L^2_E(\Omega)$ est continue. (Nous écrivons $L^2_E(\Omega)$ ce que BOURBAKI écrit $L^2_E(\Omega,\mu)$ ou $L^2_E(\mu)$; (voir [2], chap. IV). Enfin $\mathscr{E}$ [resp. $\mathscr{F}$] désigne l'espace de Banach des opérateurs compacts de E dans $L^2_E(\Omega)$ [resp. de $L^2_E(\Omega)$ dans E].

LEMME 3. - *Soit* $k_o : \Omega \to C(E)$ *une application continue ; alors l'application linéaire*

$$\underline{\mathbf{k}_o} : \begin{cases} E \to L^2_E(\Omega) \\ v \longmapsto (\omega \longmapsto k_o(\omega)v) \end{cases} \quad \textit{est compacte.}$$

De plus, si

$$K : \begin{cases} \Omega\times\Omega \longrightarrow C(E) \\ (\alpha,\omega) \longmapsto k_\alpha(\omega) \end{cases} \quad \textit{est une application continue,}$$

alors l'application

$$\underline{\mathbb{K}} : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathscr{E} \\ \alpha \longmapsto \underline{k_\alpha} \end{cases} \quad \textit{est continue.}$$

Preuve. - Pour la première assertion, il suffit de vérifier que

$$\mathscr{H} : \begin{cases} E \longrightarrow C_E(\Omega) \\ v \longmapsto (\omega \mapsto k_o(\omega)v) \end{cases} \quad \text{est compacte, ce qui résulte du}$$

théorème d'Ascoli [Bourbaki, *Topologie générale*, chap. X, 2e édit., § 2 n° 5, th. 2, corol. 3] appliqué à l'ensemble équicontinu $\{\mathscr{H}(v)\}_{v \in E, \|v\| \leqslant 1}$ d'applications de Ω dans E.

Pour tous $v \in E$, $\alpha,\beta \in \Omega$: $\left\|(\underline{k_\alpha} - \underline{k_\beta})(v)\right\|^2_{L^2_E(\Omega)} =$

$$= \int_\Omega \left\|(k_\alpha(\omega) - k_\beta(\omega))v\right\|^2_E d\mu(\omega) \leqslant \left\{\int_\Omega \left\|k_\alpha(\omega) - k_\beta(\omega)\right\|^2_{C(E)} d\mu(\omega)\right\}\|v\|^2.$$

Par suite, la norme de $\underline{k_\alpha} - \underline{k_\beta}$ dans $\mathscr{E}$ n'excède pas celle de $k_\alpha - k_\beta$ dans $L^2_{C(E)}(\Omega)$, donc pas non plus celle de $k_\alpha - k_\beta$ dans $C_{C(E)}(\Omega)$. La deuxième assertion en résulte.

LEMME 4. - *Soit* $k_o : \Omega \to C(E)$ *une application continue ;*

alors l'application linéaire

$$\underline{\mathbb{k}_o} : \begin{cases} L^2_E(\Omega) \longrightarrow E \\ \varphi \longmapsto \int_\Omega k_o(\omega)\varphi(\omega)d\mu(\omega) \end{cases}$$

est compacte. De plus, si

$$K : \begin{cases} \Omega\times\Omega \longrightarrow C(E) \\ (\alpha,\omega) \longmapsto k_\alpha(\omega) \end{cases} \quad \textit{est une application}$$

continue, alors l'application

$$\underline{K} : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathcal{F} \\ \alpha \longmapsto k_\alpha \end{cases} \qquad \textit{est continue.}$$

Preuve. - Pour la première assertion, on peut considérer k_o comme un élément de $L^2_{C(E)}(\Omega)$. L'inégalité de Hölder montre alors que $\underline{k_o}$ est bien définie et que $\|\underline{k_o}(\varphi)\|_E \leqslant \|k_o\|_{L^2_{C(E)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2_E(\Omega)}$ (voir BOURBAKI [2], chap. IV, § 6 n° 4). Soit $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $L^2_{C(E)}(\Omega)$ défini par les fonctions k du type suivant : il existe un entier positif n, des opérateurs compacts $k_1,\ldots,k_n$ sur E et des fonctions numériques continues $f_1,\ldots,f_n$ sur Ω tels que $k(\omega) = \sum_{j=1}^{n} k_j f_j(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$; alors $\mathcal{V}$ est dense dans $L^2_{C(E)}(\Omega)$ [Ibid., § 3 n° 5] et l'inégalité de Hölder montre encore qu'il suffit de vérifier la première assertion lorsque $k_o \in \mathcal{V}$.

Mais alors $\underline{k_o}$ est de la forme $\varphi \longmapsto \sum_{j=1}^{n} k_j M_j(\varphi)$ où M_j est l'application linéaire bornée

$$\begin{cases} L^2_E(\Omega) \longrightarrow E \\ \varphi \longmapsto \int_\Omega f_j(\omega)\varphi(\omega)d\mu \end{cases}$$

pour $j = 1,\ldots,n$; la première assertion du lemme résulte donc de la définition des opérateurs compacts.

Pour tous $\varphi \in L^2_E(\Omega)$, $\alpha,\beta \in \Omega$, on a par l'inégalité de Hölder : $\|(\underline{k_\alpha} - \underline{k_\beta})(\varphi)\|_E \leqslant \|k_\alpha - k_\beta\|_{L^2_{C(E)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2_E(\Omega)}$ et on termine la preuve du lemme 4 comme celle du lemme 3.

Rappelons aussi que, si E=H est un espace de Hilbert, alors $L^2_H(\Omega)$ est lui-même naturellement un espace de Hilbert ; (voir BOURBAKI [2], chap. IV, § 6, n° 4).

Le résultat suivant de ce paragraphe est une version équivariante du quatrième exemple du § I.3. Nous désignons par G un groupe compact, par dg la mesure de Haar normalisée sur G, par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe et par $g \longmapsto L_g$.un homomorphisme de G dans $U(\mathcal{H})$. Contrairement à nos habitudes, nous ne supposons *pas* que cet homomorphisme soit continu.

LEMME 5. - *Soit* J' *un opérateur dans* $L(\mathcal{H})$ *tel que*
(i) $(J')^2-1 \in C(\mathcal{H})$
(ii) $J'^*-J' \in C(\mathcal{H})$

(iii) $L_gJ' - J'L_g \in C(\mathcal{H})$ *pour tout* $g \in G$

(iv) l'application $\begin{cases} G \longrightarrow C(\mathcal{H}) \\ g \longmapsto L_gJ' - J'L_g \end{cases}$ *est continue.*

Alors il existe un opérateur J *dans* $L(\mathcal{H})$ *tel que*

(v) $J^2 = 1$

(vi) $J^* = J$

(vii) $L_gJ = JL_g$ *pour tout* $g \in G$

(viii) $J - J' \in C(\mathcal{H})$.

Preuve. – Supposons d'abord $\mathcal{H}$ complexe. Définissons $J_1 = \frac{1}{2}(J'^* + J')$, qui satisfait (i), (vi), (iii), (iv) et (viii).

Montrons que l'application $\lambda : \begin{cases} G \longrightarrow C(\mathcal{H}) \\ g \longmapsto L_g^* J_1L_g - J_1 \end{cases}$ est continue.

Pour tous $g,h \in G$, et si e désigne l'élément neutre de G, on a :

$$\|L_g^*J_1L_g - L_h^*J_1L_h\| = \|\{(L_g^* - L_h^*)J_1 - J_1(L_g^* - L_h^*)\}L_g + L_h^*\{J_1(L_g - L_h) - (L_g - L_h)J_1\} +$$

$$+ \{(L_h^*L_g - L_e)J_1 - J_1(L_h^*L_g - L_e)\}\| \leqslant \|(L_g^*J_1 - J_1L_g^*) - (L_h^*J_1 - J_1L_h^*)\| +$$

$$+ \|(L_gJ_1 - J_1L_g) - (L_hJ_1 - J_1L_h)\| + \|(L_{h^{-1}g}J_1 - J_1L_{h^{-1}g}) - (L_eJ_1 - J_1L_e)\|$$ et

la continuité de λ résulte de (iv). On peut donc définir l'opérateur

$J_2 = \int_G L_g^*J_1L_g dg = J_1 - \int_G (L_g^*J_1L_g - J_1)dg$ qui satisfait (i), (vi), (vii) et (viii).

Si J_3, puis J sont définis exactement comme au § I.3, l'opérateur J satisfait (v) à (viii).

Si $\mathcal{H}$ est réel, il n'y a aucun changement à apporter jusqu'à , et y compris, la définition de J_3. Le spectre de J_3 (= spectre de $J_3 \otimes \mathrm{id}$ dans $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) est symétrique par rapport à l'axe réel ; la fonction f (voir § I.3) est symétrique : $f(\overline{\lambda}) = \overline{f(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in Sp(J_3)$; il en résulte que $f(J_3 \otimes \mathrm{id})$ peut s'écrire d'une et d'une seule manière sous la forme $J \otimes \mathrm{id}$, et que $J \in L(\mathcal{H})$ satisfait (v) à (viii).

Remarque. – Au § III.2, nous appliquerons ce lemme avec $\mathcal{H} = L_H^2(G)$ et $g \longmapsto L_g$ la représentation régulière gauche de G dans $\mathcal{H}$, dont on sait qu'elle n'est pas (normiquement) continue si G est un groupe compact métrisable infini. Dans ce cas, la seule condition (iv) restreint considérablement l'opérateur J'.

LEMME 6. - *Soient* H *un espace de Hilbert et* F *un opérateur de rang fini sur* H. *Soit* $\lambda : \Omega \to L(H)$ *une application continue pour la topologie forte de* L(H), *et telle que*

$$\lambda^* : \begin{cases} \Omega \longrightarrow L(H) \\ \omega \longmapsto \lambda(\omega)^* \end{cases}$$

soit aussi fortement continue. Alors les applications

$$F\lambda : \begin{cases} \Omega \longrightarrow L(H) \\ \omega \longmapsto F\lambda(\omega) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda F : \begin{cases} \Omega \longrightarrow L(H) \\ \omega \longmapsto \lambda(\omega)F \end{cases}$$

sont normiquement continues.

Preuve. - Il existe des vecteurs $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ de H tels que

$$F : \begin{cases} H \longrightarrow H \\ v \longmapsto \sum_{j=1}^{n} < v | a_j > b_j \end{cases}$$

. Soient alors $\alpha,\beta \in \Omega$ et $v \in H$; on a : $\|\{(F\lambda)(\alpha) - (F\lambda)(\beta)\}v\|_H = \|\sum_{j=1}^{n} < \lambda(\alpha)v - \lambda(\beta)v | a_j > b_j\| \leq$

$\leq \|v\| \sum_{j=1}^{n} \|\{\lambda(\alpha)^* - \lambda(\beta)^*\}a_j\| \|b_j\|$. Si α et β sont suffisamment voisins, alors $\|\{\lambda(\alpha)^* - \lambda(\beta)^*\}a_j\|$ est petit par hypothèse pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, donc $\|(F\lambda)(\alpha) - (F\lambda)(\beta)\|_{L(H)}$ l'est aussi, et $F\lambda$ est normiquement continue. La preuve pour λF est semblable.

III.2. - Preuve du théorème 1.

Dans ce paragraphe, nous fixons une fois pour toutes un groupe compact G avec mesure de Haar normalisée dg, un bon homomorphisme $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)^u_o$, et une application continue $T : G \to U(H)$ telle que $\sigma = \pi T$. (Pour l'existence de T et la définition d'un "bon" homomorphisme, voir § I.2 et la fin du § II.3.) L'espace de Hilbert $L^2_H(G)$ est muni de la représentation régulière gauche

$$L : \begin{cases} G \longrightarrow U(L^2_H(G)) \\ g \longmapsto L_g \end{cases}$$

définie par $(L_g\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$ pour tous $g,h \in G$ et pour toute "fonction" $\varphi \in L^2_H(G)$. On prendra garde que L n'est *pas* continu en général. Notre but est de trouver un homomorphisme $S : G \to U(H)$ qui relève σ.

Définissons les applications

$$i_T : \begin{cases} H \longrightarrow L^2_H(G) \\ v \longmapsto (g \mapsto T(g^{-1})v) \end{cases}$$

$$m_T : \begin{cases} L^2_H(G) \longrightarrow H \\ \varphi \longmapsto \int_G T(g^{-1})^{-1} \varphi(g)dg \end{cases}$$

$$P_T = i_T m_T : L^2_H(G) \longrightarrow L^2_H(G)$$

qui sont évidemment toutes linéaires bornées.

LEMME 7 :

(i) *L'opérateur* i_T *est une isométrie de* H *sur un sous-espace fermé* H_P *de* $L^2_H(G)$.

(ii) *L'opérateur* P_T *est le projecteur orthogonal de* $L^2_H(G)$ *sur* H_P.

(iii) $L_gP_T - P_TL_g$ *est compact pour tout* $g \in G$ *et l'application*

$$\begin{cases} G \longrightarrow C(L^2_H(G)) \\ g \longmapsto L_gP_T - P_TL_g \end{cases} \quad \textit{est continue.}$$

(iv) *Si* T *est un bon homomorphisme, alors* $L_gP_T = P_TL_g$ *pour tout* $g \in G$.

Preuve. - L'assertion (i) est banale.

Il résulte des définitions que $m_Ti_T = id_H$, donc que P_T est un projecteur de $L^2_H(G)$ sur H_P. On vérifie à la main et à l'aide de Fubini que P_T est auto-adjoint, d'où (ii).

Soit $g \in G$. Pour tous $v \in H$ et $h \in G$:
$\{L_g(i_T(v)) - i_T(T(g)v)\}(h) = (T(h^{-1}g) - T(h^{-1})T(g))v$. Donc $L_gi_T - i_TT(g)$ est une application linéaire compacte de H dans $L^2_H(G)$ dépendant continûment de g par hypothèse sur T et par le lemme 3 ; cette application est évidemment nulle si T est un homomorphisme. De même

$$T(g)m_T - m_TL_g : \varphi \longmapsto \int_G \{T(g)T(h^{-1})^{-1} - T(h^{-1}g^{-1})^{-1}\}\varphi(h)dh$$

est une application linéaire compacte de $L^2_H(G)$ dans H dépendant continûment de g par le lemme 4 ; elle est aussi nulle si T est un homomorphisme. Ceci montre (iii) et (iv).

L'opérateur $1-2P_T$ sur $L^2_H(G)$ est donc une involution auto-adjointe G-équivariante modulo les compacts, et satisfait la condition (iv) du lemme 5. Il existe donc une involution auto-adjointe G-équivariante J_T sur $L^2_H(G)$ qui en est une perturbation compacte. Posons $Q_T = \frac{1}{2}(1-J_T)$; c'est un projecteur orthogonal de $L^2_H(G)$ sur un sous-espace de $L^2_H(G)$ invariant par G que nous noterons H_Q ; l'opérateur Q_T-P_T est compact. Pour tout $g \in G$, nous écrirons L'_g l'application induite par L_g sur H_Q, de sorte que

$$L' : \begin{cases} G \longrightarrow U(H_Q) \\ g \longmapsto L'_g \end{cases} \quad \text{est un homomorphisme ;}$$

il n'est pas a priori continu (voir toutefois le lemme 9).

Posons alors

$$A_T = 1 - P_T - Q_T + 2Q_TP_T$$

$$B_T = 1 - P_T - Q_T + 2P_TQ_T$$

qui sont des perturbations compactes de l'identité sur $L^2_H(G)$. Elles induisent donc par restriction des opérateurs de Fredholm

$$A'_T : \begin{cases} H_P \longrightarrow H_Q \\ \varphi \longmapsto Q_T\varphi \end{cases} \quad \text{et } B'_T : \begin{cases} H_Q \longrightarrow H_P \\ \varphi \longmapsto P_T\varphi \end{cases} \quad \text{qui sont isométri-}$$

ques et inverses l'un de l'autre modulo les compacts. Soit encore j_T l'inverse de l'isomorphisme isométrique $H \to H_P$ défini par i_T et considérons l'application (pas continue a priori)

$$\hat{T} : \begin{cases} G \longrightarrow U(H) \\ g \longmapsto j_TB'_TL'_gA'_Ti_T \end{cases} .$$

<u>LEMME 8</u>. - *L'opérateur* $\hat{T}(g) - T(g)$ *est compact pour tout* $g \in G$ *;*

en d'autres termes, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{i_T} & H_P & \xrightarrow{A'_T} & H_Q \\ \downarrow{\scriptstyle T(g)} & & & & \downarrow{\scriptstyle L'_g} \\ H & \xleftarrow{j_T} & H_P & \xleftarrow{B'_T} & H_Q \end{array}$$

commute modulo les compacts.

Preuve. - Soit $g \in G$. Pour tout $v \in H$, $i_TT(g) - L_gi_T : H \to L^2_H(G)$ est compact (preuve du lemme 7). Comme $A_{T^{-1}}$ et $B_{T^{-1}}$ sont compacts, il en est de même de $B_TL_gA_T - L_g$; par suite $B'_TL'_gA'_Ti_T - L_gi_T : H \to L^2_H(G)$ est compact. L'un dans l'autre, ceci montre que $\hat{T}(g) - T(g) = j_T(B'_TL'_gA'_Ti_T - i_TT(g))$ est compact.

<u>LEMME 9.</u> - *Les applications* $\hat{T}$ *et* L' *sont continues.*

Preuve. - Soient $v \in H$, et $g,h \in G$. Alors $i_T(v)$ est la fonction $a \mapsto T(a^{-1})v$ dans $H_P \subset L^2_H(H)$, et $A'_Ti_T(v) = Q_Ti_T(v)$. Comme L_g et L_h commutent à Q_T, l'élément

$\{\hat{T}(g) - \hat{T}(h)\}(v) = j_T B'_T(L'_g - L'_h)A'_T i_T v$ est l'image par $j_T B'_T Q_T$ de l'élément $(L_g - L_h)i_T(v) : a \longmapsto (T(a^{-1}g) - T(a^{-1}h))v$ de $L^2_H(G)$. Donc $\|(\hat{T}(g) - \hat{T}(h))(v)\|_H \leqslant$

$\leqslant \|j_T\| \|B'_T\| \|Q_T\| \int_G \|T(a^{-1}g) - T(a^{-1}h)\|_{L(H)} \|v\|_H da \leqslant$

$\leqslant \{\int_G \|T(a^{-1}g) - T(a^{-1}h)\| da\} \|v\|$. On en déduit que $\|\hat{T}(g) - \hat{T}(h)\|_{L(H)}$ tend vers zéro quand g tend vers h, d'où la continuité de $\hat{T}$.

Soient alors $\alpha_T : H_Q \to H_P$ et $\beta_T : H_P \to H_Q$ des inverses de A'_T et B'_T respectivement, modulo les opérateurs de rang fini (ces inverses existent par le théorème d'Atkinson). Pour tout $g \in G$, on a $\hat{T}(g) = j_T B'_T L'_g A'_T i_T$, donc aussi $\beta_T i_T \hat{T}(g) j_T \alpha_T = (1+F_1)L'_g(1+F_2)$ où F_1 et F_2 sont des opérateurs de rang fini sur H_Q. L'application

$$L' : \begin{cases} G \longrightarrow L(H) \\ g \longmapsto \beta_T i_T \hat{T}(g) j_T \alpha_T - F_1 L'_g - L'_g F_2 - F_1 L'_g F_2 \end{cases}$$ est alors

(normiquement) continue par la première affirmation de ce lemme et par le lemme 6.

<u>LEMME 10</u>. - *Il existe un conjugué relevable de* σ.

Preuve. - Soit $\phi : H_P \to H_Q$ un isomorphisme isométrique (qui existe car H_P et H_Q ont la même dimension hilbertienne). Définissons l'homomorphisme

$$L^\phi : \begin{cases} G \longrightarrow U(H) \\ g \longmapsto j_T \phi^{-1} L'_g \phi i_T \end{cases}$$, qui est continu par le lemme 9.

Alors, pour tout $g \in G$: $\hat{T}(g) = (j_T B'_T \phi i_T) L^\phi(g)(j_T \phi^{-1} A'_T i_T)$. Soit $x = \pi(j_T B'_T \phi i_T)$, qui est dans $\mathrm{Cal}(H)^u$; en projetant l'expression précédente de $\hat{T}(g)$ sur Cal(H) et en utilisant le lemme 8 :

$$(\pi L^\phi)(g) = x^{-1}(\pi\hat{T}(g))x = x^{-1}(\pi T(g))x = \sigma^x(g),$$

d'où le résultat.

Le théorème I résulte du lemme 8 et de la proposition 4.

Remarque réelle. - Les résultats et les preuves de la section III s'étendent tous au cas où H est remplacé par un espace de Hilbert réel.

IV. RELEVEMENTS ET ANNEAUX DE REPRESENTATIONS.

IV.1. - Paramétrisation des relèvements dans le cas des groupes compacts.

Soient G un groupe compact, $\mathcal{R}(G)$ son anneau des représentations complexes et $\widetilde{\mathcal{R}}(G) = \{\rho \in \mathcal{R}(G) \mid \dim(\rho) = 0\}$ l'idéal d'augmentation de celui-ci. Soient H_j deux espaces de Hilbert complexes de même dimension (infinie), et $S_j : G \to U(H_j)$ deux homomorphismes ($j = 1,2$). Nous écrirons $\Phi_G(S_1,S_2)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm $\alpha : H_1 \to H_2$ qui sont aussi des opérateurs d'entrelacement des représentations S_1 et S_2 : $\alpha S_1(g) = S_2(g)\alpha$ pour tout $g \in G$. Si $\alpha \in \Phi_G(S_1,S_2)$, nous noterons $[\mathrm{Ker}(\alpha)]_G$ et $[(\mathrm{Im}(\alpha))^{\perp}]_G$ les éléments de $\mathcal{R}(G)$ définis par le noyau (via S_1) et le conoyau (via S_2) de α respectivement. Le *G-indice de* α est alors par définition la différence $\mathrm{Ind}_G(\alpha) = [\mathrm{Ker}(\alpha)]_G - [(\mathrm{Im}(\alpha))^{\perp}]_G$.

LEMME 11. - *Soient* H_j *trois espaces de Hilbert complexes et* $S_j : G \to U(H_j)$ *trois homomorphismes* ($j = 1,2,3$).

(i) = additivité. Soient $\alpha \in \Phi_G(S_1,S_2)$ *et* $\beta \in \Phi_G(S_2,S_3)$ *; alors* $\beta\alpha \in \Phi_G(S_1,S_3)$ *et* $\mathrm{Ind}_G(\beta\alpha) = \mathrm{Ind}_G(\alpha) + \mathrm{Ind}_G(\beta)$.

(ii) = invariance par perturbation. Soient $\alpha,\beta \in \Phi_G(S_1,S_2)$ *avec* $\beta-\alpha$ *compact ; alors* $\mathrm{Ind}_G(\beta) = \mathrm{Ind}_G(\alpha)$.

(iii) = paramétrisation. Supposons $H_1 = H_2 = H$ *et soit* $\alpha \in \Phi_G(S_1,S_2)$ *avec* $\alpha - \mathrm{id}_H$ *compact. Alors* $\mathrm{Ind}_G(\alpha) = 0$ *si et seulement s'il existe* $\beta \in U(H,C)$ *avec* $S_1 = S_2^{\beta}$.

(iv) = fonctorialité. Soient F un groupe compact, $\kappa : F \to G$ *un homomorphisme et* $\kappa^* : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(F)$ *le morphisme induit. Soit* $\alpha \in \Phi_G(S_1,S_2)$ *; on peut aussi considérer que* α *est dans* $\Phi_F(S_1,S_2)$*, et alors* $\mathrm{Ind}_F(\alpha) = \kappa^*(\mathrm{Ind}_G(\alpha))$.

Preuve. - Elle fait partie du folklore, si ce n'est de la littérature (?) ; elle suit certainement pas à pas celle de l'énoncé équivalent pour les opérateurs de Fredholm usuels (i.e. $G = \{1\}$ ci-dessus), et nous ne l'expliciterons pas ici. La notation $U(H,C)$ a été définie au § 1.4.

Soient alors $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)_o^u$ un bon homomorphisme et $S_j : G \to U(H)$ ($j = 1,2$) deux homomorphismes qui relèvent σ. Ecrivons i_1 [resp. $m_1, \dots, P_2$] l'application notée i_{S_1} [resp. $m_{S_1}, \dots, P_{S_2}$] au § III.2. Alors l'opérateur $m_2 i_1 = \int_G S_2(g)S_1(g^{-1})dg : H \to H$ est une perturbation compacte de id_H (car $\pi S_1 = \pi S_2 = \sigma$) qui entrelace S_1 et S_2 (par invariance de la mesure de Haar).

DEFINITION. - *Nous appellerons* indice de S_1 et S_2 *et nous noterons* $\mathrm{Ind}_G(S_1,S_2)$ *l'élément* $\mathrm{Ind}_G(m_2 i_1) \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$.

PROPOSITION 5. - *Les notations sont comme ci-dessus.*
(i) Il existe $\alpha \in U(H,C)$ *tel que* $S_2 = S_1^\alpha$ *si et seulement si* $\mathrm{Ind}_G(S_1,S_2) = 0$.
(ii) Si $S_3 : G \to U(H)$ *est un troisième homomorphisme qui relève* σ, *alors*
$\mathrm{Ind}_G(S_1,S_3) = \mathrm{Ind}_G(S_1,S_2) + \mathrm{Ind}_G(S_2,S_3)$.

Preuve. - L'assertion (i) n'est autre que le lemme 9 (iii). Pour l'assertion (ii) : $(m_3i_2)(m_2i_1) - m_3i_1 = m_3(i_2-i_1)m_2i_1 + m_3i_1(m_2-m_1)i_1$ et il résulte immédiatement des définitions que i_2-i_1 et m_2-m_1 sont compacts ; l'assertion résulte alors du lemme 9, (i) et (ii).

PROPOSITION 6. - *Soit* $\mathrm{Rel}(\sigma)$ *l'ensemble des relèvements d'un bon homomorphisme* σ. *Alors l'application de* $\mathrm{Rel}(\sigma) \times \mathrm{Rel}(\sigma)$ *dans* $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ *donnée par* $(S,T) \longmapsto \mathrm{Ind}_G(S,T)$ *est surjective.*

Preuve. - $\gamma \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$. Il existe deux représentations indépendantes $s : G \to U(n)$ et $t : G \to U(n)$ telles que $\gamma = [s]_G - [t]_G$. (Pour la définition de "indépendant", voir HOCHSCHILD [10], § II.2.)

Soit $R : G \to U(H)$ un relèvement de σ. Soit V un sous-espace de H stable par R, de dimension finie $\dim(V) \geqslant n$. Soient $S,T : G \to U(H)$ deux homomorphismes tels que $S(g)v = T(g)v = R(g)v$ pour tous $g \in G$ et $v \in V^\perp$, et tels que $[V]_G^S = [s]_G + [m]$ $[V]_G^T = [t]_G + [m]$, où $[m]$ désigne la classe de la représentation triviale de G dans un espace de dimension $m = \dim(V) - n$.

Alors m_Ti_S est la projection orthogonale de H sur V (voir HOCHSCHILD [10], th. 2.4) et $\mathrm{Ind}_G(S,T) = \gamma$.

Le théorème 2 résulte des propositions 5 et 6.

IV.2. - Une classe de groupes non relevables.

Dans ce paragraphe, nous désignons par G un groupe compact, par Γ le produit direct $G \times Z$, par $\tau : \Gamma \to \mathrm{Cal}(H)_0^u$ un bon homomorphisme, par σ la restriction de τ à G, et par x l'image de (e,1) par τ(e est l'élément neutre de G et 1 est le générateur de $\mathbb{Z}$).

Choisissons un relèvement S de σ et un opérateur X sur H avec $\pi(X) = x$. Posons $Y = \int_G S(g)XS(g^{-1})dg$, qui est dans $\Phi_G(S,S)$; par suite $\mathrm{Ind}_G(Y)$ est bien défini, et ne dépend pas du choix de X par le lemme 11 (ii) ; nous écrirons donc $\mathrm{Ind}_G(S,x)$ au lieu de $\mathrm{Ind}_G(Y)$.

LEMME 12. - *L'élément* $\mathrm{Ind}_G(S,x)$ *ne dépend pas du choix de* S.

Preuve. - Soient S_1 et S_2 deux relèvements de σ, et soit X comme ci-dessus ; il faut montrer que $\mathrm{Ind}_G(S_1,x) = \mathrm{Ind}_G(S_2,x)$.

Premier cas particulier. - Il existe $\alpha \in U(H,C)$ avec $S_2 = S_1$. Soient $Y_1 = \int S_1(g)XS_1(g^{-1})dg$ et $Y_2 = \int S_2(g)XS_2(g^{-1})dg = \alpha^{-1}Z\alpha$ avec $Z = \int S_1(g)\alpha X\alpha^{-1}S_1(g^{-1})dg$ (les intégrales sont sur G tout entier). Alors Y_1 et Z définissent le même indice dans $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ par le lemme 11 (ii). D'autre part α induit un isomorphisme de G-modules de $\mathrm{Ker}(Y_2)$ (qui est un G-module via S_2) sur Ker(Z) (idem via S_1) et de $(\mathrm{Im}(Y_2))^{\perp}$ (idem via S_2) sur $(\mathrm{Im}(Z))^{\perp}$ (idem via S_1) ; donc Z et Y_2 définissent le même indice dans $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ et $\mathrm{Ind}_G(S_1,x) = \mathrm{Ind}_G(S_2,x)$ dans ce cas.

Deuxième cas particulier. - Il existe un sous-espace H_o de H de dimension finie stable par S_1 et par S_2, et tel que les restrictions de S_1 et S_2 à $H_r = (H_o)^{\perp}$ coïncident. Choisissons un opérateur X sur H dont la restriction à H_o soit nulle, qui laisse H_r invariant et tel que $\pi(X) = x$. Si $Y_j = \int S_j(g)XS_j(g^{-1})dg$ $(j = 1,2)$, alors $Y_1 = Y_2 = Y$. Soit Y_r la restriction de Y à H_r, de sorte que $\mathrm{Ker}(Y) = H_o \oplus \mathrm{Ker}(Y_r)$ et $(\mathrm{Im}(Y))^{\perp} = H_o \oplus (\mathrm{Im}(Y_r))^{\perp}$, où le dernier signe $\perp$ se réfère à H_r. Alors :

$$\mathrm{Ind}_G(S_1,x) = [H_o]_G^{S_1} + [\mathrm{Ker}(Y_r)]_G^{S_1} - [H_o]_G^{S_1} - [(\mathrm{Im}(Y_r))^{\perp}]_G^{S_1}$$

$$\mathrm{Ind}_G(S_2,x) = [H_o]_G^{S_2} + [\mathrm{Ker}(Y_r)]_G^{S_2} - [H_o]_G^{S_2} - [(\mathrm{Im}(Y_r))^{\perp}]_G^{S_2}$$

et $\mathrm{Ind}_G(S_1,x) = \mathrm{Ind}_G(S_2,x)$; nous avons noté $[H_o]_G^{S_1}$ la classe dans $\mathcal{R}(G)$ du G-module H_o défini par S_1.

Cas général. - Soient S_1 et S_2 deux relèvements quelconques de σ. On construit facilement un troisième relèvement S_3 tel que S_1 et S_3 soient comme dans le deuxième cas particulier et tel que $\mathrm{Ind}_G(S_1,S_3) = \mathrm{Ind}_G(S_1,S_2)$. Il résulte alors de la proposition 5 que S_2 et S_3 sont conjugués sous $\mathrm{Ker}(\pi)$, et des deux cas particuliers ci-dessus que $\mathrm{Ind}_G(S_1,x) = \mathrm{Ind}_G(S_2,x)$.

DEFINITION. - *Nous appellerons indice de* τ *et nous noterons* $\mathrm{Ind}_G(\tau)$ *l'élément* $\mathrm{Ind}_G(S,x)$ *du lemme 12.*

PROPOSITION 7. - *Les notations sont comme ci-dessus.*

(i) τ *est relevable si et seulement si* $\mathrm{Ind}_G(\tau) = 0$.

(ii) Pour tout élément $\gamma \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$, *il existe un homomorphisme* τ *tel que* $\mathrm{Ind}_G(\tau) = \gamma$ *; en particulier* Γ *est relevable si et seulement si* $G=\{e\}$, *i.e.* $\Gamma=\mathbf{Z}$.

Preuve. - Si τ est relevable, il est banal que $\mathrm{Ind}_G(\tau) = 0$. Supposons réciproquement que $\mathrm{Ind}_G(\tau) = 0$. Choisissons S et Y comme au début de ce paragraphe. Comme $\mathrm{Ind}_G(Y) = 0$, il existe un G-isomorphisme de Ker(Y) sur $(\mathrm{Im}(Y))^{\perp}$. Comme Y induit un G-isomorphisme de $(\mathrm{Ker}(Y))^{\perp}$ sur Im(Y), il existe un isomorphisme Z' de H sur H tel que $S(g)Z' = Z'S(g)$ pour tout $g \in G$. Soit $P = (Z'^{*}Z')^{-\frac{1}{2}}$, de sorte que $Z = Z'P$ est dans U(H) ; on a encore $S(g)Z = ZS(g)$ pour tout $g \in G$ et l'application

$$T : \begin{cases} \Gamma \longrightarrow U(H) \\ (g,n) \longmapsto S(g)Z^n \end{cases}$$ est un homomorphisme qui relève τ, de sorte que (i) est vrai.

Soient H_1 et H_2 deux G-modules de même dimension finie. Soient $H_I = \bigoplus_{j \in N} H_1^j$ un G-module somme orthogonale d'une infinité de copies de H_1, et de même $H_{II} = \bigoplus_{j \in N} H_2^j$; soit H le G-module $H_I \oplus H_{II}$. Notons D_I une isométrie partielle $H_I \to H_I$ telle que $D_I(H_1^j) = H_1^{j+1}$ pour tout $j \in N$ et $D_I S_I(g) = S_I(g) D_I$ pour tout $g \in G$. ($S_I : G \to U(H_I)$ est l'homomorphisme défini par la structure de G-module sur H_I.) Notons de même D_{II} une isométrie partielle $H_{II} \to H_{II}$ avec des propriétés analogues. Soit enfin Y l'opérateur égal à D_I sur H_I et à D_{II}^{*} sur H_{II}. Alors $x = \pi(Y) \in \mathrm{Cal}(H)_o^u$ et $x\pi(S(g)) = \pi(S(g))x$ pour tout $g \in G$, de sorte que l'application $$\tau : \begin{cases} \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_o^u \\ (g,n) \longmapsto \pi(S(g))x^n \end{cases}$$ est un homomorphisme.

Il est alors évident que $\mathrm{Ind}_G(\tau) = \mathrm{Ind}_G(Y) = [H_2] - [H_1]$, ce qui prouve (ii) puisque $[H_2] - [H_1]$ peut être choisi arbitrairement dans $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$.

Nous avons montré le théorème 3 de l'introduction.

Remarque. - Soient G un groupe compact et Γ le produit direct $G \times R$. Alors G est relevable.

En effet : soient $\tau : \Gamma \to \mathrm{Cal}(H)_o^u$ un bon homomorphisme, $S : G \to U(H)$ un relèvement de la restriction σ de τ à G, et x l'élément auto-adjoint de Cal(H) défini par $\tau(e,\xi) = \exp(i\xi x)$. Soit X un opérateur auto-adjoint sur H tel que $\pi(X) = x$, et posons $Y = \int_G S(g)XS(g^{-1})dg$. Alors

$$T : \begin{cases} \Gamma \longrightarrow U(H) \\ (g,\xi) \longmapsto S(g)\exp(i\xi Y) \end{cases}$$ est un relèvement de τ.

On peut encore montrer que les groupes $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}$ ne sont pas relevables. Il en résulte que parmi les groupes de Lie commutatifs élémentaires (DIEUDONNE [7], XIX.7, ex. 5), seuls les groupes compacts, $\mathbb{Z}$, et les produits de $\mathbb{R}$ par un groupe compact sont relevables. Par contre $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est "stablement" relevable (BROWN [4]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 3, 7-38, Amer. Math. Soc. 1961.

[2] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. I à IV, 2e édit., Hermann 1965.

[3] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS et P.A. FILLMORE, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of* C^**-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 345, 58-128, Springer 1973.

[4] L.G. BROWN, communication privée.

[5] V.M. BUHSTABER et A.S. MISCENKO, *A* K-*theory on the category of infinite cell complexes*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32 (1968), 560-604 = AMS Translations of the same 2 (1968), 515-556.

[6] J.W. CALKIN, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. of Math. 42 (1941), 839-873.

[7] J. DIEUDONNE, *Eléments d'analyse, 4*, Gauthier-Villars 1971.

[8] J. DIXMIER, *Les* C^**-algèbres et leurs représentations, 2e édit.*, Gauthier-Villars 1969.

[9] P. DE LA HARPE et M. KAROUBI, *Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 1975.

[10] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, 1965.

[11] L. INGELSTAM, *Real Banach algebras*, Ark. Mat. 5 (1964), 239-270.

[12] K. IWASAWA, *On some types of topological groups*, Ann. of Math. 30 (1949), 507-558.

[13] N. KUIPER, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3 (1965), 19-30.

[14] S. LANG, *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod 1967.

[15] C.L. OLSEN, *A structure theorem for polynomially compact operators*, Am. J. Math. 93, (1971), 686-698.

[16] R.S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton Univ. Press 1965.

[17] R.S. PALAIS, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology 5, (1966), 1-16.

[18] C.R. PUTNAM, *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, Springer 1967.

[19] C.E. RICKART, *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand 1960.

[20] I.M. SINGER, *Uniformly continuous representations of Lie groups*, Ann. of Math. 56 (1952), 242-247.

[21] J. STASHEFF, H-*spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 161, Springer 1970.

[22] F.J. THAYER-FABREGA, *Obstructions to lifting* **-morphisms into the Calkin algebra*, Tulane University, 1973.

Pierre de la HARPE

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
Dorigny

1015 LAUSANNE (Suisse)

Max KAROUBI

Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
2, place Jussieu

75005 PARIS