MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ROBBA

Quelques propriétés des éléments et fonctions analytiques au sens de Krasner

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 341-349

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__341_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France.
Mémoire 39-40, 1974, p. 341-349

QUELQUES PROPRIETES DES ELEMENTS ET FONCTIONS ANALYTIQUES AU SENS DE KRASNER

P. ROBBA

Nous nous proposons de passer en revue un certain nombre de propriétés des éléments et fonctions analytiques de M. KRASNER et leurs applications au problème du prolongement analytique. On trouvera les démonstrations complètes et quelques prolongements dans [3] et [4] , pour une présentation condensée voir [5] [6] et [7]

1. Notations. K désigne un corps valué ultramétrique complet, non discret et algébriquement clos.

On appelle disque ouvert (resp. fermé) de centre a et de rayon r, et on note $D(a,r^-)$ (resp. $D(a,r^+)$), l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x-a| < r$ (resp. $|x-a| \leqslant r$).

Le sous-ensemble A de K est dit infra-connexe si, quel que soit $a \in K$, l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'image de A par l'application $x \longrightarrow |x-a|$ est un intervalle. Dans [1] A. ESCASSUT a mis en évidence l'importance de cette notion dans l'étude des éléments analytiques.

Notons $\hat{A}$ le plus petit disque fermé contenant A. Le disque ouvert $T = D(a,r^-)$ est appelé trou de A si $T \subset \complement A \cap \hat{A}$ et si, de plus, pour tout $\rho > r$ $A \cap D(a,\rho^-) \neq \emptyset$. Un point de $\complement A$ qui n'est pas point intérieur de $\complement A$ sera aussi appelé trou de A. Enfin nous dirons que l'ensemble $T_0 = \complement \hat{A}$ est le trou de A de centre l'infini. Nous noterons $\mathcal{T}$ la famille des trous de A. On a $\complement A = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$. Ces définitions restent invariantes par homographie.

Soit A un sous-ensemble ouvert de $\bar{K} = K \cup \{\infty\}$. Un élément analytique sur A au sens de Krasner [2] est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A. Nous noterons H(A) l'espace vectoriel des éléments analytiques sur A. On pose pour $f \in H(A)$, $\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Cette dernière quantité peut être infinie, mais ce cas ne peut se produire que si A n'est pas fermé. Dans tous les cas $\| \quad \|_A$ définit une métrique sur H(A) et H(A) est complet pour cette métrique.

2. Théorème d'unicité - Ensembles analytiques.

2.1. Soient A et B deux ouverts de K. Si $A \subset B$ on définit une application linéaire de H(B) dans H(A) : $f \longmapsto f|_A$ où $f|_A$ est la restriction de f à A.

Si cette application est injective on pourra définir sans ambiguité le prolongement analytique sur B, s'il existe, d'un élément analytique sur A. Cette situation se produit dans l'exemple suivant qui nous servira au §.3.

Proposition : Soit A un infra-connexe et T un trou de A. L'application canonique de $H(A \cup T)$ dans H(A) est injective et est même une isométrie. Il en est de même de l'application canonique de $H(\complement T)$ dans H(A). On a donc si $f \in H(A \cup T)$ $\|f\|_{A \cup T} = \|f\|_A$, si $f \in H(\complement T)$ $\|f\|_{\complement T} = \|f\|_A$.

La démonstration utilise essentiellement les propriétés du polygone de valuation.

2.2. Si pour tout disque D contenu dans l'ouvert A l'application canonique de H(A) dans H(D) est injective nous dirons que A est analytique. Alors un élément analytique sur A est connu partout dans A lorsqu'il est connu au voisinage d'un point de A.

C'est M. KRASNER [2] qui a le premier donné des exemples non triviaux d'ensembles analytiques. Plus tard ESCASSUT, MOTZKIN et moi-même [1] [3] avons donné une caractérisation de tous les ensembles analytiques. La condition obtenue exprime une relation entre les distances mutuelles des trous de A et les rayons de ces trous.

Notons d'abord que pour que A soit analytique il faut qu'il soit infra-connexe. Soient x_o et y deux points de A. La famille des trous de A (autrement dit le complémentaire de A) se répartit sur une famille de cercles de centre x_o . Considérons une suite monotone (Γ_n) de ces cercles exceptionnels situés entre x_o et y, c'est-à-dire que, r_n désignant le rayon de Γ_n , r_n est une suite monotone avec $0 < r_n \leq |x_o - y|$ pour tout n. Dans chaque cercle exceptionnel Γ_n on choisit alors une famille finie de trous disjoints $D_{nj} = D(a_{nj}, \rho_{nj})$ $1 \leq j \leq J_n$. On dit qu'une telle suite de trous est convenable relativement à x_o et y. La condition d'analyticité s'exprime de la façon suivante.

Proposition : Pour que A soit analytique il faut et il suffit que :

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\text{pour tous } x_o \text{ et } y \text{ appartenant à } A, \text{ pour toute suite convenable de trous } D_{nj}, \\ \text{relativement à } x_o \text{ et } y \text{ et pour toute suite d'entiers } > 0,\ (p_{nj}) \text{, la suite} \\ \left(\sum_{m=1}^{n-1} p_m \left|\operatorname{Log} \frac{r_n}{r_m}\right|\right) - \sup_{1\leqslant j\leqslant J_n} \left(\operatorname{Log} \frac{r_n}{p_{nj}} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j_n} p_{nk} \operatorname{Log} \frac{r_n}{|a_{nk}-a_{nj}|}\right) \\ \left(\text{où } p_m = \sum_{j=1}^{m} p_{mj}\right) \text{ ne tende pas vers } +\infty \text{ quand } n \longrightarrow \infty.\end{array}\right.$$

Dans [3] on donne de nombreux exemples où n'intervient pas la suite (p_{nj}). La condition (*) exprime essentiellement que les cercles exceptionnels ne sont pas trop rapprochés les uns des autres, les trous d'un même cercle exceptionnel non plus et les rayons des trous ne sont pas trop grands.

Un cas extrême est celui des quasi-connexes de M. Krasner où l'on suppose qu'entre x_o et y il n'y a qu'un nombre fini de cercles exceptionnels.

Alors la position relative des trous d'un même cercle exceptionnel et leurs rayons n'interviennent pas.

Un autre cas extrême est celui où les rayons des trous de A sont assez petits. Alors la position relative des trous n'intervient pas. Par exemple si A a une famille dénombrable de trous T_n de rayons $\rho_n < 1$ et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\operatorname{Log} \rho_n}$ diverge, A est analytique.

3. Le théorème de décomposition de Mittag Löeffler.

Afin d'éviter une ambiguité due aux constantes nous introduisons l'espace $H^o(A)$ formé des éléments analytiques sur A s'annulant à l'infini (cette dernière condition tombe si $\infty \notin A$).

Soit E un espace de Banach ultramétrique sur K et soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E. Nous dirons que E est la somme directe ultramétrique des E_i et on écrira $E = \sum_{i\in I} E_i$ si pour tout $v \in E$ il existe un unique $v_i \in E_i$ tel que $v = \sum_{i\in I} v_i$ et $\|v\| = \sup_{i\in I} \|v_i\|$. La convergence de la série s'entend au sens des familles sommables et est réalisée si et seulement si $v_i \longrightarrow 0$ quand i tend vers l'infini.

Dans le cas qui vous intéresse $H^\circ(A)$ n'est pas toujours un espace de Banach puisque $\|f\|_A$ peut être infini, néanmoins la définition précédente se généralise sans problèmes.

Il résulte du paragraphe 2 que, si T est un trou de A, $H^\circ(\complement T)$ s'envoie injectivement (et même isométriquement) dans $H^\circ(A)$, on identifiera donc $H^\circ(\complement T)$ à un sous-espace vectoriel de $H^\circ(A)$.

<u>Proposition</u> : <u>Soit</u> A <u>un infra-connexe</u>. $H^\circ(A)$ <u>est la somme directe ultramétrique de la famille</u> $H^\circ(\complement T)$ <u>associée aux trous de</u> A. $H^\circ(A) = \sum_{T\in\mathcal{T}} H^\circ(\complement T)$.

Soit $f \in H^\circ(A)$, notons f_T la projection de f sur $H^\circ(\complement T)$. On a donc

$$f = \sum_{T\in\mathcal{T}} f_T ,$$

la série convergeant uniformément sur A et de plus

$$\|f\|_A = \sup_{T\in\mathcal{T}} \|f_T\|_{\complement T} .$$

Il résulte de ces formules que $\sum_{\substack{T' \neq T \\ T' \in \mathcal{T}}} f_{T'}$ est un élément analytique sur $A \cup T$ qui coïncide avec $f - f_T$ sur A. Ce qui montre que $f - f_T$ se prolonge analytiquement sur $A \cup T$ (ceci a un sens en vertu du §.2). Cette dernière condition en fait caractérise f_T : f_T est l'unique élément de $H^\circ(\complement T)$ tel que $f - f_T$ se prolonge analytiquement dans $A \cup T$. C'est pourquoi f_T est appelée <u>la partie singulière de</u> f <u>relative au trou</u> T.

4. <u>Premières applications du théorème de décomposition</u>.

4.1. <u>Problème de Mittag-Lœffler</u>. Pour chaque trou T du infra-connexe A on se donne un élément $f_T \in H^\circ(\complement T)$. Existe-t-il un élément analytique f sur A tel que f_T soit sa partie singulière relative au trou T ? Le théorème précédent nous dit qu'il faut que la famille f_T soit sommable dans $H^\circ(A)$, ce qui équivaut à la condition que $\|f_T\|_A$ tende vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathcal{T}$. On voit que cette condition est suffisante car $f = \sum_{T\in\mathcal{T}} f_T$ répond au problème posé.

4.2. *Théorème de Runge*. Soient A et B deux ensemble infra-connexes, $A \subset B$. Pour que les éléments analytiques sur A puissent être approchés uniformément par des éléments analytiques sur B il faut et il suffit que A ne possède aucun trou contenu dans B.

4.3. *Fonctions analytiques sur les quasi-connexes.*

Lemme : *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *des quasi-connexes tels que* $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. *Soient* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *et soit* f *une fonction définie sur* A *telle que* $f|_{A_i} \in H(A_i)$ *pour tout* i. *Alors* $f \in H(A)$.

Il suffit de le prouver pour n = 2 et alors cela résulte du théorème 3 et du fait que

$$\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \cup \mathcal{T}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{T}(A_1) \cup \mathcal{T}(A_2) ,$$

$$\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \cap \mathcal{T}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2) .$$

Par application de ce lemme et par induction sur n on prouve le *Principe du prolongement uniforme* : *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *comme dans le lemme et soient* $f_j \in H(A_j)$ *tels que* $f_j = f_{j+1}$ *sur* $A_j \cap A_{j+1}$, *alors* $f_1 = f_n$ *sur* $A_1 \cap A_n$.

Remarques : 1) Ces résultats sont valables dans des cas plus généraux, voir par exemple [4] §.8.

2) Ces résultats sont dus à M. Krasner sous l'hypothèse supplémentaire que le corps de restes de K est non dénombrable et que les quasi-connexes sont réguliers. On voit que cette restriction n'est pas nécessaire. Utilisant les mêmes idées on peut montrer en toute généralité que la somme de deux fonctions analytiques sur des quasi-connexes est analytique [4] §.9.

5. *Prolongement analytique*.

Soit un élément analytique f défini au voisinage d'un point de K qu'on supposera être 0 pour simplifier. On dira que f se prolonge analytiquement au point y s'il existe un ensemble analytique A contenant 0 et y et un élément analytique g sur A coïncidant avec f au voisinage de 0. A étant choisi, g, s'il existe, est entièrement déterminé par la donnée de f. Le prolongement g(y), obtenu en y, peut dépendre de l'ensemble analytique choisi ; par contre, si A est pris quasi-connexe, g(y) ne dépendra pas du quasi-connexe choisi (à cause du principe du prolongement uniforme 4.3).

Au voisinage de 0, f se développe en série de Taylor. La somme de cette série définit un prolongement de f dans son disque de convergence D. Par application du théorème de décomposition de Mittag-Löeffler on obtient le critère :

Proposition : Si f se prolonge analytiquement en dehors de son disque de convergence D, f est un élément analytique sur D.

(Dans le cas où on s'intèresse à un prolongement sur un quasi-connexe, ce théorème est du à M. Krasner [23]).

Soit $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$. Notons $r = 1/\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ le rayon de convergence de la série entière. Par application de cette proposition on obtient un critère de non prolongement de f portant sur les a_n.

Définition : Le sous-ensemble J de N est dit lacunaire si, quel que soit $\tau \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \cap [N, N+\tau] = \emptyset$.

Proposition : Supposons que $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n| r^n = \lambda \neq 0$. Soit J (resp. I) l'ensemble des n tels que $|a_n| r^n = \lambda$ (resp. $|a_n| r^n > \lambda$). Si J est lacunaire ou si I est infini, f ne se prolonge pas analytiquement en dehors de D. C'est en particulier le cas si $\lambda = +\infty$ ou si r n'appartient pas au groupe des valeurs.

Exemples : i) $f(x) = \text{Log } x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n/n$. $r = 1$, $\lambda = +\infty$

ii) Pour $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{n^2}$ ou $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{2^n}$, $r = 1$, $\lambda = 1$, J est lacunaire.

iii) Soit K de caractéristique nulle avec un corps de restes de caractéristique p. Pour $f(x) = \exp(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n/n!$, $r = p^{-\frac{1}{p-1}}$, $\lambda = p^{-\frac{1}{p-1}}$ et

$J = \bigcup_{k \geq 0} \{p^k\}$ est lacunaire.

Remarques : a) Si $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n| r^n = 0$, f est un élément analytique sur D. On sait qu'il n'existe alors pas de prolongement analytique de f sur un quasi-connexe [2]. Mais la situation est différente lorsqu'on cherche à prolonger f sur un ensemble analytique comme on le voit sur l'exemple suivant.

Soient $a_n \in K$ tels que $|a_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} r$ en décroissant strictement.

Soient $\rho_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 < \rho_n < |a_n| \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|a_n| - \operatorname{Log} r}{\operatorname{Log}|a_n| - \operatorname{Log} \rho_n} < + \infty \quad .$$

Alors l'ensemble $A = \{x \in K, \ |x - a_n| > \rho_n\}$ est analytique. Soient $b_n \in K$ tels que pour tout n, $|a_n - b_n| \neq 0$ et que $|b_n - a_n| / \rho_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Alors le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (x-b_n) / (x-a_n)$ converge uniformément sur A vers un élément analytique f. On vérifie que r est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0 et que $\lim_{n \to \infty} |a_n| r^n = 0$.

b) Par utilisation répétée du théorème de Mittag-Löeffler on obtient une méthode pour construire pas à pas le prolongement de f. Si le prolongement en y s'obtient à l'aide d'un quasi-connexe, ce prolongement est obtenu en un nombre fini d'étapes. Pour plus de détails cf. [4] §.15 et aussi [6] .

6. Fonctions analytiques.

6.1. Nous dirons que la famille $(B_i)_{i \in I}$ est <u>enchainée</u> si pour tous i et j de I il existe $i_o = i, i_1, \ldots, i_n = j$ de I tels que $B_{i_k} \cap B_{i_{k+1}} \neq \emptyset$, $0 \leq k \leq n-1$.

Notons $\mathcal{A}$ la classe des ensembles analytiques de K. Soit $\mathcal{B}$ une sous-famille de $\mathcal{A}$. Nous dirons que f est une fonction $\mathcal{B}$-<u>analytique de support</u> B s'il existe une famille enchainée $(B_i)_{i \in I}$, telle que $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, f soit définie sur B, et pour tout i, $B_i \in \mathcal{B}$ et $f|_{B_i} \in H(B_i)$. On dira que les B_i forment une <u>base</u> pour f.

Pour toute sous-famille $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, on montre sans peine qu'une fonction $\mathcal{B}$-analytique nulle au voisinage d'un point est identiquement nulle. Cependant la différence de deux fonctions $\mathcal{A}$-analytiques de même support n'est pas nécessairement $\mathcal{A}$-analytique. On ne peut donc pas appliquer le principe précédent pour montrer que deux fonctions $\mathcal{A}$-analytiques de même support qui coïncident au voisinage d'un point coïncident partout, et en fait on peut construire un exemple où deux fonctions $\mathcal{A}$-analytiques de même support coïncident au voisinage d'un point mais pas partout. De ce point de vue la classe des fonctions $\mathcal{A}$-analytiques est trop vaste et si on veut travailler avec les fonctions analytiques au lieu des éléments analytiques il faut se limiter à une classe $\mathcal{B}$ plus petite que $\mathcal{A}$.

La classe $\mathcal{K}$ des quasi-connexes fournit une famille d'un emploi aisé avec laquelle on peut développer une théorie satisfaisante des fonctions analytiques. Nous avons introduit une classe $\mathcal{E}$ d'ensembles analytiques, plus vaste que la classe $\mathcal{K}$, avec laquelle toutes les "bonnes" propriétés des fonctions $\mathcal{K}$-analytiques restent vraies pour les fonctions $\mathcal{E}$-analytiques. Par exemple les propriétés indiquées en 4.3 pour des ensembles quasi-connexes restent vraies pour les éléments de $\mathcal{E}$.

On pourra consulter [7] et [4] §§ 11, 12 pour plus de détails.

6.2. Signalons un autre résultat pathologique qui apparait lorsqu'on utilise des fonctions analytiques au lieu d'éléments analytiques.

Un élément analytique sur une couronne est développable en série de Laurent et la limite uniforme d'éléments analytiques de même support est un élément analytique. Ces propriétés ne sont pas toujours vraies pour les fonctions $\mathcal{B}$-analytiques.

Mais cette fois la faute n'incombe pas à la classe $\mathcal{B}$ mais à la nature topologique de K.

K est dit <u>maximalement complet</u> si l'intersection de toute suite emboitée de disques fermés de K est non vide.

Soit $\mathcal{C}$ la classe des couronnes (c'est la classe la plus restreinte d'ensembles analytiques qu'on puisse considérer). Si K n'est pas maximalement complet il existe une fonction $\mathcal{C}$-analytique de support K tout entier, bornée, tendant vers 0 à l'infini et non identiquement nulle. Cette fonction ne vérifie pas le principe du maximum et n'est donc pas développable en série de Taylor dans K. (Elle a des singularités cachées dans l'extension maximale de K).

Soit $\mathcal{D}$ la classe des intersections finies de couronnes. Si K n'est pas maximalement complet, il existe une suite de fonctions $\mathcal{D}$-analytiques de support K convergeant uniformément sur K vers une fonction qui n'est pas $\mathcal{A}$-analytique.

Par contre si K est maximalement complet, une fonction $\mathcal{E}$-analytique sur un disque (resp. une couronne), y est développable en série de Taylor (resp. de Laurent), et la limite uniforme d'une suite de fonctions $\mathcal{E}$-analytiques de même support est $\mathcal{E}$-analytique, à tout le moins si les fonctions considérées admettent une base dénombrable (nous ne savons pas si l'hypothèse de dénombrabilité est nécessaire).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT, A. Algèbre de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse 1970. Bordeaux (Polycopié).

[2] KRASNER, M. Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque CNRS Clermont-Ferrand 1964.

[3] MOTZKIN, E. et ROBBA, P. Prolongement analytique en analyse p-adique. Séminaire de théorie des nombres. Bordeaux 1968-69 (Polycopié). Un résumé a paru au Bull. Soc. Math. France Mémoire 25, 1971, p. 151 à 158.

[4] ROBBA, P. Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets. Astérisque n°10, 1973.

[5] ROBBA, P. Décomposition en éléments simples d'un élément analytique sur un corps ultramétrique.C.R. Acad. Sci. Paris t. 274, p. 532-535 (1972).

[6] ROBBA, P. Prolongement analytique en analyse ultramétrique C.R. Acad. Sci. Paris, t. 274, p. 830-833 (1972).

[7] ROBBA, P. Fonctions analytiques sur un corps ultramétrique. C.R.Acad. Sci. Paris, t. 274, p. 721-723 (1972).

P. ROBBA
138, rue Nationale
75 - PARIS 13e