MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRETTE CASSOU-NOGUES

Formes linéaires *p*-adiques et prolongement analytique

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 23-26
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__23_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 39-40, 1974, p. 23-26

FORMES LINEAIRES p-ADIQUES ET PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Pierrette CASSOU-NOGUES

Soit $\mathbf{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, O_p son anneau de valuation et $\mathfrak{m}_p$ son idéal de valuation.

On considère une extension abélienne réelle finie de $\mathbf{Q}$, K, et les fonctions L p-adiques de K qui sont définies (lorsque $p \neq 2$) par :

$$L_p(1-m,\chi) = (1-\chi(p)p^{m-1})\, L(1-m,\chi)$$

pour m entier positif, $m \equiv 0 \bmod(p-1)$, où $L(.,\chi)$ désigne la fonction L de Dirichlet relative au caractère primitif χ du corps K. Soit ε_p la fonction continue multiplicative définie par :

$$\varepsilon_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in p\,\mathbf{Z}_p \\ 1 & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p - p\,\mathbf{Z}_p \ ; \end{cases}$$

alors :

$$L_p(1-m,\chi) = L(1-m,\chi\,\varepsilon_p)$$

pour m entier positif $m \equiv 0 \bmod(p-1)$.

On peut montrer [2], [3] le lien qui existe entre deux méthodes d'étude des fonctions L_p, celle de T. Kubota et H.W. Leopoldt [4] et celle de Y. Amice et J. Fresnel [2].

Soit f_m <u>la fonction définie par</u> $f_m(x) = x^m$, <u>posons</u> :

$$J_{\chi\varepsilon_p}(f_m) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{n=1}^{p^r f_1} \chi(n)\,\varepsilon_p(n) n^m$$

$f_1 = \text{ppcm}\,(p, f(\chi))$, $f(\chi)$ étant le conducteur de χ.

T. Kubota et H.W. Leopoldt ont montré que :

$$J_{\chi\varepsilon_p}\left(\frac{f_m}{m}\right) = \frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m} = -\,L_p(1-m,\chi)$$

où $B^m(\chi\varepsilon_p)$ est le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli relatif au caractère $\chi\varepsilon_p$.

Y. Amice et J. Fresnel ont étudié les fonctions L_p comme les analogues p-adiques des séries complexes $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\,\varepsilon_p(n) n^{m-1}$. Ils considèrent la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\,\varepsilon_p(n) n^{m-1} T^n$, convergente dans le disque de centre 0 et de rayon 1^- et montrent qu'elle est prolongeable dans un quasi-connexe qui contient 0 et 1, en une fonction analytique $I_{\chi\varepsilon_p}(f_{m-1})(.)$ et que l'on a :

$$I_{\chi\varepsilon_p}(f_{m-1})(1) = -\frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m} = L_p(1-m,\chi).$$

Donc on obtient l'égalité :

$$I_{\chi\varepsilon_p}(f_{m-1})(1) = -\,J_{\chi\varepsilon_p}\left(\frac{f_m}{m}\right) = -\frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m}\,.$$

Nous allons montrer comment on peut obtenir directement cette égalité sans faire intervenir les nombres de Bernoulli. En utilisant les sommes de Gauss et :

$$\chi(n) = \chi(-1)\,\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a)\, Z_f^{an} \quad ,$$

on peut se ramener au problème suivant.

Etant donné la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) n^{m-1} T^n$ peut-on la prolonger en une fonction analytique $I_\chi(\varepsilon_p . f_{m-1})(.)$ dans un quasi-connexe qui contient 0 et les racines $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité et a-t-on :

$$I(\varepsilon_p . f_{m-1})(Z_f^a) = -\,J(\varepsilon_p . \frac{f_m}{m})(Z_f^a)$$

pour toutes les racines $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité, où :

$$J(\varepsilon_p \frac{f_m}{m})(T) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{n=1}^{p^r f_1} \varepsilon_p(n) \frac{n^m}{m} T^n \ ?$$

On traite ce problème en utilisant des fonctions f uniformément dérivables. On montre d'une part que

$$J(f)(T) = \lim \frac{1}{p^r \lambda} \sum_{n=1}^{p^r \lambda} f(n)\ T^n$$

se développe en série de Taylor en $(1-T)$ convergente dans $1+\mathfrak{M}_p$ pour λ entier naturel quelconque. D'autre part on considère les séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\ T^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)\ T^n$; f et f' étant continues on sait d'après [2] que l'on peut les prolonger en des fonctions analytiques dans $O_p - (1+\mathfrak{M}_p)$, $I(f)(.)$ et $I(f')(.)$. Ces fonctions analytiques sont définies par des séries de Laurent en $(1-T)$. On montre que l'on peut faire le produit des séries de Laurent en $(1-T)$ qui définissent dans leur domaine de convergence $I(f)(T)$ et $\mathrm{Log}\ T$ et que la série de Laurent en $1-T$

$$I(f')(T) + I(f)(T)\ \mathrm{Log}\ T$$

est en fait une série de Taylor en $1-T$ convergente dans $1+\mathfrak{M}_p$. On a de plus dans $1+\mathfrak{M}_p$:

$$J(f)(T) = -\ I(f')(T) - I(f)(T)\ \mathrm{Log}\ T.$$

On retrouve bien la formule cherchée dans le cas où T est une racine de l'unité et où $f = \varepsilon_p f_m$. Pour les unités de O_p qui ne sont pas dans $1+\mathfrak{M}_p$, on peut définir un prolongement fonctionnel de $J(f)(.)$ et l'on a encore la même formule où Log désigne le prolongement fonctionnel du logarithme à $O_p - (1+\mathfrak{M}_p)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE, Y. et FRESNEL, J. — Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica 20 n°4 pp. 353-384.

[2] CASSOU-NOGUES, P. — Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique. Thèse 3ème cycle (polycopié), Université de Bordeaux 1, 1971.

[3] CASSOU-NOGUES, P. — Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique. C.R.A.S. Paris, t. 254, (3 janvier 1972), p. 5-8.

[4] KUBOTA, T. et LEOPOLDT, H.W. — Eine p-adishe theorie der Zetawerte. Journal für die reine und ang. Math. t. 214/215, 1964, p. 328-339.

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
351, cours de la Libération
33405 TALENCE