MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARC KRASNER

Rapport sur le prolongement analytique dans les corps values complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 131-254
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__131_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 39-40, 1974, 131-254

RAPPORT SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DANS LES CORPS VALUES COMPLETS PAR LA METHODE DES ELEMENTS ANALYTIQUES QUASI-CONNEXES.

M. KRASNER

On sait, depuis la thèse de W. Schöbe (1930), que la méthode de prolongement analytique des séries de Taylor due à Weierstrass est inefficace pour les séries de Taylor f(X) d'une variable X quand les coefficients de la série et les valeurs de la variable sont supposés appartenir à un corps valué (1) complet k. En effet, a étant un point arbitraire du cercle de convergence de f(X), si l'on développe f(X) "autour de a", on obtient une série des puissances de X-a, qui converge sur le même cercle et nulle part en dehors. Ainsi, cette méthode ne permet jamais de sortir du domaine de convergence. Il se trouve que la situation est presque la même pour les séries de Taylor de plusieurs variables. Il n'est pas possible, non plus, si les fonctions analytiques qu'on veut obtenir doivent satisfaire au "principe d'unicité" (autrement dit, que la fonction soit complètement déterminée dans tout domaine (2), où elle existe comme fonction uniforme, par ses valeurs sur un ouvert quelconque de ce domaine aussi petit qu'il soit), de définir ces fonctions par leurs propriétés purement locales, comme leur développabilité, en tout point, en séries de Taylor, car un corps valué k est anti-connexe par rapport à sa topologie (et k^n l'est par rapport à la topologie produit correspondante). Dans ces conditions, on est obligé, pour réaliser le prolongement analytique non trivial, de chercher d'autres méthodes, où les "éléments analytiques", c'est-à-dire les "briques" de prolongement, ne soient pas forcément les séries de Taylor, considérées sur des cercles non-ponctuels (c'est-à-dire non réduits à un seul point), où elles convergent. Mon attention a été attirée, dés 1946, par la méthode de Runge (équivalente, dans le corps complexe, à celle de Weierstrass), où les "éléments analytiques" en question sont des fonctions, partout définies sur certains ouverts connexes caractérisés par Runge (et qui portent son nom), et qui sont les limites uniformes, sur ces domaines, des fractions rationnelles n'y ayant aucun pôle. Bien entendu, les domaines que j'ai défini, dans le même but, dans les corps valués, ne

---

(1) J'appelle <u>corps valués</u> les corps valués ultramétriques, c'est-à-dire ce que certains appellent corps valués non-archimédiens ;

(2) Dans les corps valués, "domaine" sera synonyme d'"ensemble ouvert".

peuvent pas être connexes, car le corps lui-même ne l'est pas, mais ont, tout de même, certaines propriétés des domaines connexes du corps complexe. C'est pourquoi je les ai appelés ensembles (ou domaines) quasi-connexes. Déjà, en 1946, l'avais envisagé une forme particulière de ces ensembles(3) (cercle ou complément de cercle avec un ensemble au plus dénombrable de trous circulaires circonférenciés satisfaisant à certaines conditions), qui s'expliquait à la fois par la méthode de démonstration (jamais publiée, elle était basée sur le I^ier^ théorème Mittag-Lefflerien, dont je ne connaissais alors qu'une partie assez faible) et par certaines lacunes de mes connaissances d'alors (ignorant la thèse de Schöbe, je ne savais pas démontrer les inégalités de Cauchy pour une série de Laurent, dont le domaine de convergence était réduit à une seule circonférence). C'est en 1952, pendant mon séjour aux Etats-Unis, que j'ai eu l'idée générale des ensembles quasi-connexes et la démonstration correspondante de l'unicité (que j'avais montré, à l'époque, à MM.S.Mac Lane et Wapples, à l'occasion d'une rencontre), publiée en 1954 dans mes Notes (4) des Comptes Rendus En 1957, j'ai publié 4 Notes (5) développant cette théorie, où j'ai prouvé la préservation de l'analyticité quasi-connexe par les opérations rationnelles et par la dérivation. Ces démonstrations m'ont amené à définir certaines classes particulières d'ensembles quasi-connexes, les $D_{a,b}$, les $D^*_{a,b}$ et, surtout, les ensembles quasi-connexes <u>réguliers</u>. Les éléments analytiques <u>réguliers</u>, c'est-à-dire ayant leur support régulier, suffisent, comme j'ai montré, à faire tout prolongement analytique, ce qui permet de prouver que le prolongement quasi-connexe considéré ne fournit que les fonctions globalement uniformes. Ceci permet de parler du domaine maximal d'existence d'une fonction analytique uniforme d'une variable ultramétrique. M.E.Motzkin a donné à ces domaines maximaux d'existence le nom de "domaines d'analyticité". Or, j'ai vu en 1969 que ces domaines d'analyticité coïncident avec les ensembles quasi-connexes réguliers (démonstration esquissée dans(6) ;quelques mois plus tôt, MM.E.Motzkin et P.Robba prouvé(7),mais sans que je le sache, que, dans le complété $\mathcal{K}_p$ de la clôture algébrique du corps p-adique rationnel $\tilde{Q}_p$, où tout quasi-connexe est régulier, tout ensemble quasi-connexe est un domaine d'analyticité, ce qui est le même résultat pour ce cas particulier). Dans les Notes (5) citées j'ai prouvé, également, deux théorèmes "Mittag-Leffleriens" qui permettent, dans une large mesure, de décrire les formes possibles des singularités des éléments analytiques quasi-connexes et des fonctions analytiques uniformes auxquelles le prolongement quasi-connexe conduit. Cette dernière description

(3) voir M. Krasner [1]

(4) voir M. Krasner [2] ,[3],[4]

(5) voir M. Krasner [5] ,[6],[7],[8],[9]

(6) voir M. Krasner [11]

(7) voir E. Motzkin et P. Robba [15]

(publiée plus tard) est basée, également, sur le "théorème des singularités au bord", se trouvant dans les mêmes Notes, qui affirme qu'il n'existe pas de surcercle propre du cercle de convergence d'une série de Taylor dans un corps maximalement complet k tel que cette série puisse être prolongée par la méthode quasi-connexe partout sur ce surcercle. M.Ph. Robba a démontré (en 1969 ou 1970, mais ce résultat n'est publié sous forme non-polycopiée qu'en 1972 dans (8)) un théorème "Mittag-Lefflerien" plus général, qui, basé sur une partie de mon premier théorème, englobe mes deux théorèmes comme cas particuliers (et, d'ailleurs, est valable pour les éléments analytiques plus généraux que les quasi-connexes). Ce théorème permet de décrire complètement les singularités possibles des éléments analytiques, mais ne semble guère plus efficace (sauf cas particuliers) que mes deux théorèmes quand il s'agit de décrire celles des fonctions analytiques. La difficulté de ce dernier problème est rendue particulièrement visible par le résultat suivant de M.M.Lazard(9): le corps valué k étant algébriquement clos et maximalement complet et C étant un cercle non circonférencié de k (pouvant être le corps k tout entier), une fonction méromorphe dans C (c'est-à-dire le quotient de deux séries de Taylor convergeant sur C) peut avoir comme singularités un ensemble au plus dénombrable arbitraire $P = \{p_i \ ; \ i < n \leqslant +\infty\}$ de pôles p_i satisfaisant à la seule condition que tout sous-cercle circonférencié de C ne doit contenir qu'un nombre fini des p_i, et, en plus, on peut assigner arbitrairement à chaque p_i la partie principale

$$a_{i,1}\,(X-p_i)^{-1} + a_{i,2}\,(X-p_i)^{-2} + \ldots + a_{i,n_i}\,(X-p_i)^{-n_i}$$

du développement de Laurent de la fonction considérée autour de p_i .

Un exposé plus systématique de cette théorie, complétant sur certains points (mais quelquefois sans démonstration) mes Notes de 1954 et de 1957, a été publié, à l'occasion du Colloque du CNRS "Tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres", Clermont-F^{d}, 2-9 avril 1964, dans le receuil de ce Colloque (10), où j'ai fait une analyse, mentionnée plus haut, des singularités possibles des fonctions analytiques uniformes d'une variable au sens quasi-connexe, énoncé (avec quelques indications sur la démonstration) que la convergence uniforme sur un quasi-connexe préserve l'analyticité (résultat déjà prouvé pour les éléments analytiques en 1957) et indiqué l'influence sur l'analyticité de la composition des fonctions. Dans le

(8) voir P. Robba [17] , p. 122-124.

(9) voir M. Lazard [13]

(10) voir M. Krasner [10], p.47, pp. 127-133.

même travail, j'ai développé une méthode de prolongement multiforme des fonctions d'une variable ultramétrique (qui date, en fait, de 1963), dont les éléments analytiques peuvent être décrits comme éléments algébriques par rapport au corps des fractions de l'anneau des fonctions analytiques sur quelque ensemble quasi-connexe arbitraire. Enfin, vers 1971, j'ai trouvé une généralisation des ensembles quasi-connexes au cas de plusieurs variables (j'en ai parlé au cours de l'année scolaire 1970-1971 dans une conférence, donnée à la Faculté des Sciences de Clermont, mais cette théorie est exposée par écrit pour la première fois dans le présent rapport; d'ailleurs, sa partie au-delà du théorème d'unicité n'a été trouvée qu'en juin 1972, lors de mon voyage en Norvège). Vers la même époque, une autre généralisation de la même notion au cas de plusieurs variables a été trouvée indépendamment par M.Ph. Robba et a été publiée dans sa thèse [(8)]. Bien que, dans le cas de dimension 1, les deux notions coïncident, celle de M. Robba est plus générale, mais semble moins maniable que la mienne. La méthode de M. Robba est exposée dans le complément de ce rapport.

Deux autres théories, liées avec le prolongement analytique, sont apparues plus tard. Vers 1960, est apparue la théorie de Tate, développée ensuite par Grauert, Remmert, Kiehl etc... et vers 1969 celle de Motzkin et Robba (au développement de laquelle a participé aussi Escassut).

La théorie de Tate n'est pas directement une théorie de prolongement analytique, mais une théorie des variétés analytiques, et elle est basée sur les méthodes proches de celles de géométrie algégrique. Elle permet de voir ce qu'on peut obtenir par de telles méthodes. Envisagée du point de vue de prolongement analytique elle apparait, par contre, comme moins générale que la méthode quasi-connexe. Ainsi, dans le cas de dimension 1, elle ne donne que la partie du prolongement qu'on peut obtenir à l'aide des éléments analytiques, qui sont les sommes finies de séries de Laurent de différents centres (en considérant les séries de Taylor comme les séries de Laurent de centre ∞). Par contre, les éléments analytiques les plus simples nécessaires pour effectuer le prolongement analytique quasi-connexe sont ceux de support $D^*_{a,b}$, c'est-à-dire les sommes uniformément convergentes sur le support d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de séries de Laurent de différents centres, ces centres étant repartis sur un nombre fini de circonférences. Au moment de son apparition, la théorie de Tate avait l'avantage d'être la seule théorie connue pour la dimension > 1, mais actuellement il en est de même pour la théorie quasi-connexe.

Or, il se trouve que le prolongement analytique des fonctions L p-adiques rentre dans la méthode quasi-connexe, mais pas dans celle de Tate. Ainsi, malgré son intérêt de certains points de vue, la méthode de Tate semble insuffisamment générale pour tous les besoins analytiques.

La théorie de Motzkin et Robba part de l'idée suivante, qui a déjà été envisagée, mais sans la développer, par C. Chabauty dans une conversation que j'ai eu avec lui vers 1954 : l'essence de l'analyticité étant l'unicité, il faut, si l'on définit les "briques" servant au prolongement analytique (les "éléments analytiques") comme limites uniformes de fractions rationnelles sur des ouverts convenables, que les ouverts qu'on emploie satisfassent au "principe d'unicité fort": f,f' étant deux éléments analytiques de support non disjoints D,D' , l'égalité f = f' sur quelque ouvert de D ∩ D' doit entraîner la même égalité partout sur D ∩ D'. En particulier, si l'on pose D = D' et f' = 0, on obtient, comme cas particulier, le "principe d'unicité faible" qu'on peut formuler ainsi : si une suite de fractions rationnelles tend uniformément vers 0 sur un ouvert de D elle tend vers 0 partout sur D. Un tel ensemble est dit <u>analytique</u>. Si D et D ∩ D' sont analytiques, visiblement D et D' satisfont au principe d'unicité fort, et, par contre, si D ∩ D' n'est pas analytique ils n'y satisfont pas. Les ensembles quasi-connexes et les éléments analytiques correspondants sont déjà d'une grande généralité et forment une famille d'ensembles analytiques fermée par rapport à l'intersection non vide. Ils ont aussi l'avantage d'avoir une caractérisation géométrique relativement simple et d'être, à cause de cela, assez maniables. Mais on peut chercher la généralité maximale, et chercher à construire la théorie de prolongement analytique basée sur l'emploi de toute la famille des ensembles analytiques, ou, du moins, de ses sous-familles aussi grandes que possible. C'était cela l'idée de Chabauty et, ensuite, de Motzkin et de Robba. Pour la réaliser, il fallait, pour commencer, caractériser géométriquement cette famille. MM. Motzkin et Robba ont trouvé une condition, d'ailleurs très compliquée, d'analyticité, dont ils ont prouvé la suffisance et, dans le cas hétérotypique,[11] la nécéssité, sa nécessité dans les cas homotypique ayant été prouvée plus tard par M. Escassut. Il se trouve que l'intersection non vide de deux ensembles analytiques n'est pas toujours analytique. Ainsi, si l'on veut développer une théorie "localement uniforme" de prolongement analytique, il faut se servir de certaines sous-familles convenables de cette famille, telles que l'intersection non vide de deux ensembles de la famille soit analytique. C'est sur cette base que Robba a construit sa théorie de prolongement analytique. Il a, d'ailleurs, défini explicitement une certaine famille d'ensembles analytiques (famille E), qui a la propriétés voulues et

(11) Un corps valué est dit homotypique ou hétérotypique selon que sa caractéristique et sa caractéristique résiduelle sont égales ou différentes.

est plus grande que celle des ensembles quasi-connexes, mais il n'a donné aucune caractérisation explicite de toutes les familles maximales ayant ces propriétés. Il semble plutôt pessimiste quant à la possibilité de trouver une caractérisation géométrique des ensembles analytiques de dimension > 1.

Si l'on compare la théorie de Motzkin-Robba et la théorie quasi-connexe, on constate que la première a l'avantage d'une plus grande généralité, mais que la seconde est plus simple et plus maniable, en restant encore très générale et en restant suffisante pour toutes les applications actuellement connues. Grace à cela, elle a, pour le moment, un avantage (peut-être durable) qu'on peut y caractériser géométriquement les ensembles d'analyticité (c'est-à-dire les domaines maximaux d'existence des fonctions analytiques uniformes) et généraliser la théorie aux dimensions > 1.

§.1. Le rappel de certains résultats :

Dans tout ce qui suit, les nombres semi-réels constituent une écriture très utile. R^o étant la droite réelle fermée (c'est-à-dire comprenant $\pm\infty$) ordonnée par son ordre naturel, et Σ étant l'ensemble $\{-,0,+\}$ ordonné par l'ordre $-<0<+$, on appelle droite semi-réelle le produit cartésien $R^o \times \Sigma$, d'où l'on exclut, toutefois, les éléments extrêmes $(-\infty,-)$ et $(+\infty,+)$, ordonné par l'ordre lexicographique. On plonge la droite réelle R^o dans la droite semi-réelle S par application $r \longrightarrow (r,0)$. S'il n'y a pas de danger de confusion, on écrira r^-, r, r^+ au lieu de $(r,-)$, $(r,0)$, $(r,+)$. Les éléments $\rho = (r, \xi) = r^{\xi}$ de la droite semi-réelle seront dits nombres semi-réels et $r(\rho) = r$, $\xi(\rho) = \xi$ seront dits respectivement la valeur réelle et l'espèce de ρ. Si A est un sous-ensemble de R^o et si a est Inf A ou $\underline{\lim}$ A (resp. Sup A ou $\overline{\lim}$ A) sur R^o, les mêmes fonctions (ou fonctionnelles) de A sur S sont a ou a^+ (resp. a^-) selon que ces extrémums ou limites sont ou ne sont pas atteints.

Etant donné un espace métrique (et, en particulier ultramétrique, c'est-à-dire tel, que sa distance satisfait à l'inégalité "ultramétrique" $d(x,z) \leqslant \operatorname{Max}[d(x,y),\ d(y,z)]$) E, un $A \subseteq E$ et un $a \in E$, on va appeler respectivement rayon intérieur semi-réel de A par rapport à a, rayon extérieur (ou rayon tout court) semi-réel de A par rapport à a, diamètre semi-réel de A les extrémums, pris sur la droite semi-réelle S, Inf $d(a,x)$, Sup $d(a,x)$, Sup $d(x,y)$, où x, resp. (x,y), parcourt A, resp. $A \times A$. On les désigne respectivement $r_i(a,A)$, $r_e(a,A)$ (ou simplement $r(a,A)$) et $d(A)$. Si E est ultramétrique et si $a \in A$, on a $r(a,A) = d(A)$ et si (E étant ultramétrique) $d(a,a') < r_i(a,A)$, on a

$r_i(a',A) = r_i(a,A)$.

Si ρ_i, ρ_e sont deux nombres semi-réels tels que $0 \leqslant \rho_i \leqslant \rho_e \leqslant +\infty^-$ (si l'on "projectivise" E en y ajoutant le "point à l'infini" ∞ tel que $d(a,\infty) = d(\infty,a) = +\infty$ pour tout $a \neq \infty$ (évidemment, on pose $d(\infty,\infty) = 0$) , on remplacera $+\infty^-$ par $+\infty$), où ρ_i est un nombre semi-réel d'espèce 0 ou + et ρ_e en est un d'espèce 0 ou − , l'ensemble $C(a;\rho_i,\rho_e)$ des $x \in E$ tels que $\rho_i \leqslant d(a,x) \leqslant \rho_e$ sera dit la <u>couronne circulaire</u> de centre a et de rayons ρ_i, ρ_e de E. En particulier, $C(a;\rho) = C(a;0,\rho)$ sera dit le <u>cercle</u> de E de centre a et de rayon ρ et, si $r \in R^o$ est > 0, $S(a;r) = C(a,r,r)$ sera dite la <u>circonférence</u> de E de centre a et de rayon r. Quand on parlera des rayons intérieurs ou extérieurs des couronnes non vides par rapport à leur centre a ou de leur diamètre, on accompagnera ces termes d'adjectif <u>propre</u>.

On connait les propriétés élémentaires des figures dans les espaces ultramétriques, dont certaines serviront dans la suite : si $d(x,y) < d(x,z)$, on a $d(y,z) = d(x,z)$; si $a' \in C(a;\rho)$, on a $C(a';\rho) = C(a;\rho)$; deux cercles non disjoints sont concentriques et un d'eux contient l'autre. Il existe le plus petit cercle C(A) contenant un ensemble non vide A de l'espace et son diamètre propre est d(A). Si C,C' sont deux cercles disjoints, $d(x,x')$, où $x \in C$ et $x' \in C'$ ne dépend pas du choix des c,c'. Si $d(a,a') < r$, on a $S(a,r) = S(a',r)$. Une circonférence S(a;r) de rayon r est une réunion de cercles de rayon r^- , etc...

Soit k un corps valué complet, dont soit $|..|$ la valuation et $\omega(..) = - \mathrm{Log}\ |..|$ l'ordre valuatif (rappelons que k est un espace ultramétrique par rapport à sa distance $d(x,y) = |x-y|$), et soit K une clôture algébrique valuée de k. Considérons une série de Laurent

$$f(X) = \sum a_i X^i \quad (-\infty < i < +\infty ;\ a_i \in k)$$

à coefficients dans k.

On va, d'ailleurs, "projectiviser" k (et K) en leur adjoingnant l'élément à l'infini ∞ et on posera $k' = k \cup \{\infty\}$ et $K' = K \cup \{\infty\}$. Le domaine de convergence de f(X) dans K' est une couronne circulaire $C(0;\rho,\mathcal{P})$. Si $\rho \leqslant r \leqslant \mathcal{P}$, à cause de convergence de f(x) quand $|x| = r$, exite

$$M_f(r) = \mathrm{Max}_i\ |a_i|\ r^i ,$$

qui est, ainsi, une fonction définie sur l'intersection, $[\rho, \mathcal{P}]_{R^\circ}$ avec R° du segment semi-réel $[\rho, \mathcal{P}]$. On a toujours $|f(x)| \leqslant M_f(|x|)$ et, si k n'est pas localement compact (en particulier, si $K = k$), on a les inégalités de Cauchy

$$M_f(r) = \operatorname{Sup} |f(x)| ,$$

où $\rho \leqslant r \leqslant \mathcal{P}$ et x parcourt toutes les valeurs $\in$ k telles que $|x| = r$. Si $\pi(f)$ est le polygone de Newton de f(X), on sait que, si $v = -\operatorname{Log} r$,

$$\varphi_f(v) = \operatorname{Min}_i \left[\omega(a_i) + iv \right] = -\operatorname{Log} M_f(r)$$

est l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des ordonnées de la tangente L_v de pente $-v$ au polygone de Newton $\pi(f)$ de f(X). De lors, les propriétés bien connues de $\pi(f)$ montrent que si les L_i sont les côtés de $\pi(f)$ (numérotées convenablement) et si $-v_i$ est la pente de L_i , $\varphi_f(v)$ est continue et linéaire par morceaux, les morceaux étant précisément les segments compris entre deux valeurs v_i consécutives. D'autre part, le lemme de Hensel pour les séries de Laurent montre que les v_i sont les seules valeurs possibles de l'ordre valuatif $\omega(z)$ des zéros z de f(X) dans K (par ailleurs, tout zéro de f dans quelque surcorps de K est déjà contenu dans K), et que les zéros de ces ordres valuatifs existent sauf, quelquefois quand L_i est le premier ou le dernier côté infini de $\pi(f)$. Ainsi, si $v_i = -\operatorname{Log} r_i$, les valeurs r_i , qui forment une suite discrète (finie ou infinie dans une seule direction ou dans les deux) sont les rayons des circonférences de K, où se trouvent (sauf, peut-être, quand ils coïncident avec $r(\rho)$ ou $r(\mathcal{P})$) des zéros de f(X). Ces valeurs r_i , dites exceptionnelles pour f, partagent l'intervalle de convergence

$$[\rho, \mathcal{P}]_{R^\circ}$$

de f en sous-segments $[r_i , r_{i+1}]$, où $M_f(r)$ se représente par un certain monome fixé en r (qui est la valuation du terme de f(X), qui prédomine dans ce segment), ce monôme étant remplacé par un d'exposant plus grand quand on passe, dans le sens des r croissants, une valeur exceptionnelle, ces deux monômes étant égaux pour cette valeur. Si, dans quelque intervalle non-ponctuel I de $[\rho, \mathcal{P}]_{R^\circ}$, $M_f(r) = cr^q$, ce monôme représente dans I, donc partout, la valuation d'un terme de f(X), donc, partout sur $[\rho, \mathcal{P}]_{R^\circ}$ est $\leqslant M_f(r)$. Si f(X) est un polynôme, le nombre des valeurs exceptionnelles, donc "segments de monômialité", est fini. Si a et x sont deux points d'espace ultramétrique, et si y est un point du même espace, y est dit <u>proche de</u> x <u>par rapport à</u> a si $d(x;y) < d(x,a)$. Alors, on montre qu'on a, pour un $x \in k$, $|f(x)| < M_f(|x|)$ si, et seulement s'il existe dans K un zéro z de f, qui est <u>proche de</u> x par rapport à 0 (auquel cas, on dira, par abus de langage, que z est proche de x).

Si $r \in [\rho, \mathcal{P}]_{R^\circ}$ est fixé, $|f|_r = M_f(r)$ est, sauf si $r = 0$ ou $= +\infty$, une valuation de l'anneau Λ_r des séries de Laurent, qui convergent sur la circonférence $S(0,r)$. Elle se prolonge en une valuation

$$|f|_r = M_f(r) = M_g(r) : M_h(r))$$

du corps des fractions μ_r de Λ_r, c'est-à-dire du corps des fonctions, méromorphes sur $S(0,r)$ (on dit qu'une fonction est <u>méromorphe</u> sur une couronne circulaire si elle y est représentable comme quotient de deux séries de Laurent, qui y convergent), $f = g/h$, où g et h sont $\in \Lambda$. Si l'on considère cette fonction à la fois sur le corps $\mu_{\rho,\mathcal{P}}$ des fonctions f méromorphes sur $C(0;\rho,\mathcal{P})$ et pour tous les r tels que $\rho \leqslant r \leqslant \mathcal{P}$ elle satisfait, en plus des axiomes de valuation pour r fixe ($r \neq 0$, $r \neq +\infty$) :

1°) Si $r \neq 0$, $r \neq +\infty$, $M_f(r) = 0$ implique $f = 0$.

2°) $M_{f+g}(r) \leqslant \operatorname{Max}\,[M_f(r), M_g(r)]$.

3°) $M_{fg}(r) = M_f(r)\, M_g(r)$,

les axiomes suivants qu'on déduit facilement des propriétés énumérées de fonction quand f est une série de Laurent, qui converge sur $C(0;\rho,\mathcal{P})$:

4°) $M_f(r)$, en tant que fonction de r sur $[\rho,\mathcal{P}]_{R^\circ}$, est continue et monomiale par intervalles, les valeurs de r séparant deux intervalles de monomialité contigus étant forcément des rayons des circonférences (de centre 0) de K, où il y a des zéros ou des pôles de f. Si f est une fraction rationnelle, le nombre des intervalles de monomialité est fini.

5°) Soit $]r_1, r_2[$ un sous-intervalle ouvert de $[\rho,\mathcal{P}]_{R^\circ}$ tel qu'il n'existe aucun pôle p de f(X), dont la valuation $|p|$ appartienne à cet intervalle. Alors si I est un sous-intervalle non-ponctuel de $]r_1, r_2[$, où $M_f(r)$ se représente par un monôme cr^q ($c \in R, c > 0, q$ entier), on a, partout sur le segment $[r_1, r_2]$, $M_f(r) \geqslant cr^q$;

6°) Si k n'est pas localement compact et si $r \in [\rho', \rho]_{R^o}$ est tel qu'il n'existe dans K aucun pôle p de f(X) tel que $|p| = r$, on a, sur k,

$$M_f(r) = \operatorname{Sup}_{|x|=r} |f(X)| \quad ;$$

7°) Si $x \in k$ est tel qu'il n'existe aucun pôle p de f(X) dans K, qui soit proche de x par rapport à 0, on a $|f(x)| = M_f(|x|)$.

8°) Soit f(X) une fonction méromorphe sur un cercle $C = C(0; \rho)$ et soit $a \in C$. Alors, $g(X) = f(a+X)$ est méromorphe sur le même cercle et si l'on pose

$$M_f^{(a)}(r) = M_g(r) \quad ,$$

$r \geqslant |a|$ implique $\qquad M_f^{(a)}(r) = M_f(r)$.

Je doit rappeler encore trois résultats.

<u>Théorème de Weierstrass complexiforme</u>. C étant un cercle (resp. une couronne circulaire) d'un corps k, qui n'est pas localement compact et $f_1(X), f_2(X), .., f_i(X), ..$ étant une suite de séries de Taylor (resp. de Laurent), toutes définies sur C, qui converge uniformément sur C, sa limite est représentable sur C par une telle série, qui y converge partout.

<u>Existence d'inverse d'une fraction rationnelle</u>. Si une fraction rationnelle f(X) n'a aucun pôle sur un cercle C, elle s'y représente comme somme d'une série de Taylor, qui y converge.

<u>Théorème d'unicité pour les séries de Taylor d'une variable</u>. Si une série de Taylor d'une variable s'annule sur un ensemble ayant un point limite, elle est identiquement nulle.

§.2 - Ensembles quasi-connexes et éléments analytiques.

Soit k un corps valué complet, et soit $k' = k \cup \{\infty\}$ son "projectivisé", obtenu en lui adjoignant l'élément ∞ à l'infini avec les règles habituelles pour les opérations et la distance ($a + \infty = \infty + a = \infty$ si $a \in k$; $\infty + \infty$ n'est pas défini ; $-\infty = \infty$; $a\,\infty = \infty\,a = \infty$ si $a \in k'$ n'est pas 0 ; $\infty\,0$ et $0\,\infty$ ne sont pas définis ; $\infty^{-1} = 0$; $0^{-1} = \infty$; $d(\infty,a) = d(a,\infty) = +\infty$ pour tout $a \in k$; $d(\infty,\infty) = 0$).

Soient E un sous-ensemble de k' et $d = d(E)$. Si $a \in E$, $a \neq \infty$ et si r est réel, soit $c(a,E;r) = \{ d(a,x) \ ; \ x \in C(a,r) \mathbin{..} E \}$ (où $A \mathbin{..} B$ désigne le complémentaire de l'ensemble B dans l'ensemble A, ceci sans supposer $B \subseteq A$) l'ensemble des distances de a aux points de $C(a;r)$ n'appartenant pas à E. L'ensemble E est dit <u>ultra-ouvert</u> en a si, pour tout $r \leq d$, $c(a,E;r)$ est fini. Cette condition peut se formuler aussi de deux autres manières suivantes : 1) pour tout $r \leq d$ réel, l'ensemble des $x \notin E$ tels que $d(a,x) \leq r$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de circonférences de centre a ; 2) pour tout $b \in E$, l'ensemble des $x \notin E$ tels que $d(a,x) \leq d(a,b)$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de circonférences de centre a.

On va appeler <u>valeurs exceptionnelles</u> d'un $E \subseteq k'$ par rapport à un $a \in E$, $a \neq \infty$, les nombres réels positifs (y compris, éventuellement, $+\infty$) r tels que la circonférence $S(a;r)$ de k' ne soit pas disjointe avec le complémentaire de E. On peut encore dire que E est ultra-ouvert en $a \in E$, $a \neq \infty$, si, et seulement si ou bien l'ensemble des valeurs exceptionnelles de E par rapport à a, qui sont $\leq d = d(E)$, est fini (et ceci obligatoirement si d est réel), ou bien des valeurs forment une suite croissante, qui tend vers d sur la droite semi-réelle (donc vers $r(d)$, mais sans atteindre cette limite, sur la droite réelle). On peut donc, dans ce cas, numéroter comme suit la suite croissante (finie ou infinie) de ces valeurs : $r_1^{(a)} < r_2^{(a)} < \ldots \quad \ldots < r_n^{(a)} < \ldots$ ($n < N \leq +\infty$). Si $d > 0$, autrement dit si E contient au moins deux points, on a $E \supseteq C(a;r_1^{(a)}{}^-)$, et a est un point intérieur de E.

E est dit <u>quasi-connexe</u> s'il contient au moins deux points et est ultra-ouvert en tout $a \in E$ tel que $a \neq \infty$. En vertu de la remarque qui précède, tout ensemble quasi-connexe est ouvert. Si k est discrètemebt valué l'inverse est aussi vrai, mais si k est à valuation dense, les ensembles quasi-connexes ne forment qu'une classe très particulière d'ensembles ouverts.

On démontre [12] que la famille des ensembles quasi-connexes d'un corps k possède les propriétés suivantes : 1) L'intersection de deux (et, par suite, d'un nombre fini) d'ensembles quasi-connexes l'est encore ; 2) La réunion d'une famille enchaînée [13] d'ensembles quasi-connexes l'est encore; 3) La transformée $\sigma.E$ d'un ensemble quasi-connexe $E \subset k'$ par une homographie non singulière σ : $x \longrightarrow \sigma.x = (ax+b)/(cx+d)$ $\left(\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0\right)$ est quasi-connexe.

Si $E \subsetneq k'$ est quasi-connexe, <u>et si</u> k <u>est algébriquement clos</u>, une fonction $f : E \longrightarrow k$ est dite un <u>élément analytique</u> de k de support E s'il existe une suite

$$f_1 , f_2 , \dots \dots , f_i , \dots$$

de fractions rationnelles (d'une variable X) $f_i \in k(X)$ sans pôles dans E, qui converge vers f uniformément sur E. Toute suite de cette sorte sera dite une suite approximante de f sur E.

§.3 - <u>Fonctions</u> $M_f(r)$ <u>d'un élément analytique</u> f. <u>Théorème d'unicité</u>.

Supposant k complet et algébriquement clos, soient f un élément analytique de support $E \subsetneq k'$ tel que $0 \in E$ et $f_1 , f_2 , \dots , f_i , \dots$ une suite approximante de f sur E. Comme chaque f_i est une fraction rationnelle, $M(r)_i = M_{f_i}(r)$ est définie sur toute la demi-droite réelle non-négative $R_+ = [0,+\infty^-]_{R^o}$ (et même pour $r = +\infty$ si ∞ n'est pas un pôle de f_i), et il n'y a, pour cette fonction , qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles. C'est donc une fonction continue et n'ayant qu'un nombre fini d'intervalles de monomialité. En plus, pour tout $r \in R_+$ fixé $|f|_r = M_f(r)$ est une valuation du corps k(X) des fractions rationnelles de X sur k. Donc, en considérant le triangle $(0,f_i , f_j)$ de ce corps, et en posant $M(r)_{i,j} = M_{f_i - f_j}(r)$, on a $|M(r)_i - M(r)_j| \leq M(r)_{i,j}$ et $M(r)_i = M(r)_j$ si $M(r)_{i,j} < M(r)_i$.

---

(12) Voir M. Krasner [2] .

(13) Une suite d'ensembles $E = E_o , E_1 , \dots , E_s = E'$ est dite une <u>chaîne</u> entre E et E' (ou <u>reliant</u> E à E') si ses deux termes consécutifs quelconques sont non disjoints : $E_{i-1} \cap E_i \neq \emptyset$. Une famille F d'ensembles est dite <u>enchaînée</u> si, pour tous couple des $E, E' \in F$, existe une sous-famille de F, qui, convenablement ordonnée, constitue une chaîne reliant E à E'.

Soit $d = d(E)$. Les $M(r)_i$ (et aussi les $M(r)_{i,j}$) sont toutes définies sur $[0,d]_{R^o}$. Puisque les f_i convergent uniformément vers f sur E, il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un indice $i(\varepsilon)$ tel que $i \geqslant i(\varepsilon)$ et $j \geqslant i(\varepsilon)$ impliquent, pour tout $x \in E$, $|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \varepsilon$. Si $r \in [0,d]_{R^o}$ n'est pas une valeur exceptionnelle de E par rapport à 0, on a $S(0;r) \subseteq E$, donc il n'y a aucun pôle de $f_i - f_j$ sur cette circonférence et, sous l'hypothèse précédente, cette fonction est $\leqslant \varepsilon$ en tout son point x. Donc, en vertu de la propriété 6°) de $M_f(r)$, on a $M(r)_{i,j} = \mathrm{Sup}_{x \in S(0;r)} |f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \varepsilon$. Comme cette fonction de r est continue et comme les valeurs exceptionnelles de E par rapport à 0 sont dans l'adhérence de l'ensemble des valeurs non exceptionnelles, cette inégalité est vraie pour tout $r \in [0,d]_{R^o}$. Donc, la suite des $M(r)_i$, converge uniformément sur cet intervalle de la droite réelle complète R^o, et sa limite, qui sera notée $M_f(r)$, y est une fonction continue. Cette fonction ne dépend pas du choix de la suite approximante.

Soit $r \in [0,d]_{R^o}$ tel que $M_f(r) > \varepsilon > 0$. Il existe un $j \geqslant i(\varepsilon)$ tel que $M(r)_j > \varepsilon$. De lors, si $i \geqslant i(\varepsilon)$, on a $M(r)_{i,j} \leqslant \varepsilon < M(r)_j$, d'où résulte, pour tout $i \geqslant i(\varepsilon)$, $M(r)_i = M(r)_j = \lim_i M(r)_i = M(r)$. Ainsi, <u>si</u> $M_f(r) > \varepsilon > 0$, <u>on a</u>, <u>pour tout</u> $i \geqslant i(\varepsilon)$, $M(r)_i = M_f(r)$.

Si f est un élément analytique quelconque de k et si E est son support, soit a un point arbitraire de E ; le changement des variables $X = X' + a$ transforme $f(X)$ en un élément analytique $f'(X') = f(X' + a)$ (il suffit, en effet pour obtenir une suite approximante de $f'(X')$ d'appliquer la même transformation aux termes, de celle de $f(X)$) de support $E' = E - a$ tel que $0 = a - a \in E'$. Posons $M^{(a)}(r) = M_{f'}(r)$.

Démontrons que la fonction $M_f(r)$ d'un élément analytique f (dont le support contient 0) a les propriétés analogues à celles de la fonction de même nom quand f est une fonction méromorphe sur une couronne circulaire. Autrement dit montrons :

1°) Si $M_f(r)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,d]_{R^o}$, $M_f(r) = 0$ implique que $r = 0$ ou $r = +\infty$.

2°) Si f,g et f+g sont des éléments analytiques d'un support E, on a $M_{f+g}(r) \leqslant \mathrm{Max}\,[M_f(r), M_g(r)]$.

3°) Si f,g et fg sont des éléments analytiques d'un support E, on a

$$M_{fg}(r) = M_f(r)\, M_g(r).$$

4°) $M_f(r)$ est continue et monomiale par intervalles sur $[0,d]_{R^o}$. L'ensemble des $r \in [0,d]_{R^o}$ tels que $M_f(r) > \varepsilon > 0$, où ε est fixé, est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'intervalles de monomialité.

5°) Si r_1 , $r_2 \in [0,d]_{R^o}$ sont tels que $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ et qu'il n'y ait aucune valeur exceptionnelle du support E de f par rapport à 0 dans l'intervalle ouvert $]r_1 , r_2[$, et si I est un sous-intervalle non-ponctuel de $]r_1 , r_2[$ tel que, pour tout $r \in I$, on ait $M_f(r) = cr^q$ ($c \in R$, $c > 0$, $q \in Z$), on a, pour tout $r \in [r_1 , r_2]$, $M_f(r) \geqslant cr^q$.

6°) Si $r \in [0,d]_{R^o}$ n'est pas une valeur exceptionnelle par rapport à 0, on a $M_f(r) = \mathrm{Sup}_{|x|=r}|f(x)|$.

7°) Si $x \in E$ n'admet aucun point $p \notin E$, qui en soit proche par rapport à 0, on a $|f(x)| \leqslant M_f(|x|)$.

8°) Si a,b sont $\in$ E et si $d(a,b) \leqslant r \leqslant d$, on a $M_f^{(a)}(r) = M_f^{(b)}(r)$ (en particulier, si $0 \in E$ et si $|a| \leqslant r \leqslant d$, on a $M_f^{(a)}(r) = M_f(r)$).

<u>Remarque</u> : En appliquant 6°, 7° et 8° à f(X+a), on trouve :

7°') Si $r \in [0,d]_{R^o}$ n'est pas une valeur exceptionnelle par rapport à a, on a $M_f^{(a)}(r) = \mathrm{Sup}_{d(x,a) = r} |f(x)|$.

8°') Si $x \in E$ n'admet aucun $p \notin E$, qui lui soit proche par rapport à a (un tel x sera dit <u>bien situé</u> par rapport à a), on a $|f(x)| \leqslant M_f^{(a)}(d(x,a))$.

<u>Démonstration</u>. Si f_i , g_i sont des suites approximantes de resp. f,g,$f_i + g_i$ et $f_i\, g_i$ convergent respectivement vers f+g, fg, dont $f_i + g_i$ uniformément. Bien que la convergence de $f_i\, g_i$ vers fg peut ne pas être uniforme sur E, on peut montrer assez

facilement qu'elle l'est sur $S(0;r)$ quand $r \in [0,d]_{R^o}$ n'est pas une valeur exceptionnelle par rapport à 0. Par passage à la limite il en résulte la propriété 2°) et, pour r non exceptionnels, la propriété 3°). On étend 3°) aux valeurs exceptionnelles en se servant de la continuité de $M_f(r)$ des fractions rationnelles et des éléments analytiques, et de ce que, pour tout élément analytique f et pour tout r, $M_f(r) > 0$ implique son égalité à partir d'un certain rang, avec la fonction $M(r)_i$ de terme f_i d'une suite approximante (fixée) de f.

De $M_f(r) = M(r)_i$ pour $i \geqslant i(\varepsilon')$ si $M_f(r) \geqslant \varepsilon > \varepsilon' > 0$ résulte que $[0,d]_{R^o}(\varepsilon) = \{r \in [0,d]_{R^o} ; M_f(r) \geqslant \varepsilon\}$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles de monomialité. Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots \longrightarrow 0^+$, $[0,d]^o_{R^o} = \{r \in [0,d]_{R^o} ; M_f(r) \neq 0\}$ est la réunion des $[0,d]_{R^o}(\varepsilon_n)$ où $n \longrightarrow +\infty^-$. Donc, $[0,d]_{R^o}$ est la réunion au plus dénombrable d'intervalles de monomialité. Pour achever la démonstration de 4°), il suffit de prouver 1°, car ou bien on a alors que $M_f(r) = 0$ pour tout $r \in [0,d]_{R^o}$, ou bien $[0,d]^o_{R^o} \supseteq [0,d]_{R^o} \cdot\cdot \{0,+\infty\} = [0^+ , \mathrm{Min}(d,+\infty^-)]_{R^o}$.

Pour démontrer 5°), remarquons d'abord que, pour tout $r \in [r_1 , r_2]$, on a $cr^q \geqslant \mathrm{Min}\,[cr_1^{\,q}\ cr_2^{\,q}] > 0$, donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $cr^q > \varepsilon$ pour tout $r \in [r_1 , r_2]$. En particulier, si $r \in \mathbf{I}$, on a $M_f(r) > \varepsilon$, donc, pour tout $i \geqslant i(\varepsilon)$, on a $M(r)_i = M_f(r) = cr^q$. Mais puisque $]r_1 , r_2[$ ne contient aucune valeur exceptionnelle par rapport à 0, aucun pôle de f_i ne peut avoir sa valuation dans cet intervalle ouvert. Par suite, on a $M(r)_i \geqslant cr^q$ pour tout $i \geqslant i(\varepsilon)$ et pour tout $r \in [r_1 , r_2]$, d'où, par passage à la limite, résulte 5°).

Prouvons maintenant 1°). Supposons que $M_f(r)$ n'est pas identiquement nul, et supposons que $M_f(r_o) = 0$, où $0 < r_o \leqslant d$ et $r_o \neq +\infty$. Alors, il doit exister un $r'_o \in [0,d]_{R^o}$ tel que $M_f(r'_o) \neq 0$, et ou bien $0 \leqslant r'_o < r_o$, ou bien $r_o < r'_o \leqslant d$. Démontrons l'énoncé dans le second cas, la démonstration dans le premier s'en obtenant par des modifications évidentes. Soit ρ l'infimum (sur la droite réelle) des r' tels que $r_o < r' \leqslant d$ et que $M_f(r') \neq 0$. Visiblement, on a $M_f(\rho) = 0$, car ou bien $\rho = r_o$, ou bien $M_f(r') = 0$ pour tout r' tel que $r_o \leqslant r' < \rho$ et $M_f(r)$ est continue. Donc $\rho < r'_o \leqslant d$, et il existe des nombres réels $s > \rho$ aussi proches que l'on veut de ρ tels que $M_f(s) \neq 0$. En particulier, si $\bar{r}$ est la plus petite valeur exceptionnelle, qui est $>\rho$ ou, en cas où une telle valeur n'existe pas, $\bar{r} = d$, il existe un tel $s < \bar{r}$. Si $\varepsilon > 0$ est $< M_f(s)$, il existe un sous-intervalle non-ponctuel I' de $]\rho,\bar{r}[$ tel que $s \in I'$ et que $M_f(r) > \varepsilon$ partout sur I'. Par suite, I' se décompose en un nombre fini d'intervalles de monomialité ; Soit I un de ces intervalles, et supposons que le monôme en r, qui y représente $M_f(r)$, soit cr^q ($c > 0, q \in Z$). Il existe (du moins si l'on choisit I assez petit) une valeur réelle $\rho' < \bar{r}$ telle que $I \subsetneq]\rho,\rho'[$. Dès lors, en appliquant la propriété déjà prouvée 5°), on trouve $M_f(r) \geq cr^q$ pour tout $r \in [\rho, \rho']$ et, en particulier, $M_f(\rho) \geq c\rho^q > 0$, ce qui est absurde.

Soit $r \in [0,d]_{R^o}$ une valeur non exceptionnelle par rapport à 0. Alors, quel que soit i, S(0;r) ne contient aucun pôle de f_i et, par suite, $M(r)_i = \mathrm{Sup}_{|x|=r} |f_i(x)|$. Comme $|f_i(x)|$ converge uniformément vers $|f(x)|$ sur S(0;r), Sup et lim y commutent pour cette fonction, et on a $M_f(r) = \lim_i M(r)_i = \mathrm{Sup}_{|x|=r} \lim_i |f_i(x)| =$ $= \mathrm{Sup}_{|x|=r} |f(x)|$, ce qui prouve 6°). Si $x \in E$ n'admet aucun point $p \notin E$, qui en soit proche par rapport à 0, il n'admet pas, non plus, aucun pôle d'aucun f_i , d'où 7°) résulte par passage à la limite. Si a,b sont $\in E$ et si $r \geq d(a,b)$, comme les fractions rationnelles f_i sont méromorphes dans k' tout entier, on a, pour tout i, $M_{f_i}^{(a)}(r) = M_{f_i}^{(b)}(r)$ ce qui, quand $r \leq d$, donne 8°) par passage à la limite.

<u>Théorème d'unicité</u>. <u>Soient</u> f,f' <u>des éléments analytiques de</u> k <u>de supports respectifs non-disjoints</u> E,E'. <u>Alors</u>, <u>s'il existe un ensemble</u> $\Delta \subseteq E \cap E'$, <u>ayant au moins un point limite</u> a <u>dans</u> $E \cap E'$ <u>et tel que</u> $f(x) = f'(x)$ <u>pour tout</u> $x \in \Delta$, <u>on a</u> $f(x) = f'(x)$ <u>pour tout</u> $x \in E \cap E'$.

<u>Démonstration</u>. On peut se ramener au cas $E' = E, f' = 0$, autrement dit, il suffit de prouver que si un élément analytique f de k s'annule sur un ensemble Δ de son support E, qui y a au moins un point limite a, il est identiquement nul (cette proposition est dite le "théorème d'unicité faible"). En effet, si f_i , f'_i sont respectivement des suites approximantes des f,f', $f_i - f'_i$ converge vers $f - f'$ sur $E \cap E'$, qui est quasi-connexe, et, ainsi, $f - f'$ est un élément analytique sur $E \cap E'$. On a, partout sur Δ , $(f-f')(x) = f(x) - f'(x) = 0$, et, si l'on applique à $f - f'$ le théorème d'unicité faible, on a $f(x) - f'(x) = 0$ pour tout $x \in E \cap E$, c'est-à-dire le théorème d'unicité fort.

Supposons donc que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \Delta$, où Δ a un point limite $a \in E$. Montrons, d'abord, que $M_f^{(a)}(r)$ est identiquement nulle. Ramenons-nous au cas $a = 0$ par le changement de variable $X = X' + a$. Puisque E est quasi-connexe et puisque $0 \in E$, il existe la plus petite valeur exceptionnelle $r_1 = r_1^{(0)}$ de E par rapport à 0, et on a $r_1 > 0$. Le cercle $C(0;r_1^-)$ est $\subseteq E$, et aucune des f_i n'a de pôles dans ce cercle. Donc, chaque f_i est développable en une série de Taylor $\sum c_{i,n}X^n$ $(0 \leq n < +\infty)$, qui converge partout sur ce cercle, et, en plus, la suite des sommes f_i de ces séries y converge uniformément vers f. Donc, en vertu du théorème de Weierstrass compléxiforme, f se représente par une série de Taylor $\sum c_n X^n$ $(0 \leq n < +\infty)$, qui converge sur $C(0;r_1^-)$. Cette série de Taylor s'annulle sur l'ensemble $\Delta \cap C(0;r_1^-)$ ayant 0 comme point limite, donc est identiquement nulle, donc $f(x) = 0$ si $x \in C(0;r_1^-)$. Mais comme ce cercle est $\subseteq E$, $i \geq i(\varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$, entraîne $|f_i(x)| = |f_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, d'où résulte $M(r)_i \leq \varepsilon$ pour tout $r \in [0,r_1^-]_{R^o}$. Ceci implique $M_f(r) = \lim_i M(r)_i = 0$ pour tout $r \in [0,r_1^-]_{R^o}$ et, en vertu de la propriété 1°) de $M_f(r)$, que $M_f(r) = 0$ pour tout $r \in [0,d]_{R^o}$. Si l'on revient aux anciennes coordonnées quand le point limite de Δ était un point a arbitraire, on voit que $M_f^{(a)}(r) = 0$ identiquement sur $[0,d]_{R^o}$. En vertu de la propriété 7°) de $M_f(r)$, si $x \in E$ est bien situé par rapport au point a, il en résulte que $|f(x)| \leq M_f^{(a)}(d(x,a)) = 0$, donc que $f(x) = 0$.

Pour terminer la démonstration, considérons un $x \in E$ quelconque. Comme E est ouvert, il existe un cercle non-ponctuel C de centre x contenu dans E et tel que $a \notin C$. Soit $\alpha \neq x$ un point de C, et soit σ l'homographie $X \longrightarrow X' = 1/(X-\alpha)$. L'ensemble $E' = \sigma$. E est encore quasi-connexe et si $f' : E' \longrightarrow k$ et $f_i' \in k[X']$ sont telles que $f'(X') = f'(\sigma.X) = f(X)$ et $f_i'(X') = f_i'(\sigma.X) = f_i(X)$, les f_i' sont des fractions rationnelles sans pôles dans E', dont la suite tend uniforménent vers f' sur E'. Ainsi, f' est un élément analytique de support E', et on a $f'(\sigma.\delta) = f(\delta) = 0$ si $\delta \in \Delta$. Donc f' s'annule en tout point de $\Delta' = \sigma.\Delta$, et Δ' a, comme point limite, $a' = \sigma.a \in E'$. Par suite, $M_{f'}^{(a)}(r)$ est identiquement nul sur $[0,d(E')]_{R^o} = [0,+\infty]_{R^o}$ (car $\infty = \sigma.\alpha \in E'$), et f' est nulle en tout point bien situé par rapport à a'.

Montrons que $x' = \sigma.x$ est bien situé par rapport à a', c'est-à-dire n'admet aucun $p' \notin E'$, qui en soit proche par rapport à ce point. En effet, si un tel point existe, on a $p' = \sigma.p$, où $p \notin E$, donc $p \notin C$. Par suite, si $y \notin E$ ou $y = a$, on a $d(x,y) > d(x,\alpha)$. Supposons que $y \in k$ satisfait à cette inégalité et posons $y' = \sigma.y$. Alors, on a

$$d(x',y') = |x'-y'| = \left|\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{y-\alpha}\right| = \frac{|y-x|}{|x-\alpha||y-\alpha|} = \frac{d(x,y)}{d(x,\alpha)d(y,\alpha)} .$$

Considérons le triangle (x,y,α) de k. Comme $d(x,\alpha) < d(x,y)$, on a $d(x,y) = d(y,\alpha)$, et $d(x',y') = \frac{1}{d(x,\alpha)} = \frac{1}{|x-\alpha|}$. Le même résultat est vrai, par continuité, pour $y = \infty$. Ainsi, si $y \in k' \,..\, C$ (et, en particulier, est $\notin E$ ou $= a$), $d(x',y')$ ne dépend pas du choix de y. En particulier, si $p' \notin E'$, on a $d(x',p') = d(x',a')$ et p' ne peut pas être proche de x' par rapport à a'. Donc, x' est bien situé par rapport à a', ce qui implique $f'(x') = 0$ et $f(x) = 0$. Comme $x \in E$ est arbitraire, ceci achève la démonstration.

Une fois le théorème d'unicité démontré, on peut définir la notion générale de prolongement analytique et de fonction analytique localement uniformes (bien qu'il ne s'agisse pas du "local" au sens de la topologie) par le procédé d'accolement successif d'éléments analytiques de k se prolongeant mutuellement, analogue à la méthode de Weierstrass de l'Analyse complexe. Ce procédé, pour le cas considéré, est décrit en détail dans [(14)].

On dira qu'une fonction uniforme $f : U \longrightarrow k$, où U est un ensemble ouvert arbitraire $\subseteq k'$, est <u>analytique</u> sur U lorsque on peut trouver un recouvrement de U par une famille Φ d'ensembles quasi-connexes telle que la famille $\mathrm{Int}_U\,\Phi = \{E \cap U \,;\, E \in \Phi \,,\, E \cap U \neq \emptyset\}$ soit enchaînée, et que, pour tout $E \in \Phi$ existe un élément analytique, dont la restriction à $E \cap U$ coïncide avec celle de f.

§.4 <u>Préservation de l'analyticité par les opérations rationnelles, la dérivation et la convergence uniforme des éléments analytiques d'un même support.</u>

Soient f,g deux éléments analytiques de même support E, et en soient $f_i \longrightarrow f$, $g_i \longrightarrow g$ des suites approximantes. Alors, il est visible que $f_i \pm g_i$ converge uniformément sur E vers $f \pm g$, qui est, ainsi, un élément analytique. En vertu de $f_i\, g_i - f_{i+1}\, g_{i+1} = (f_i - f_{i+1})g_i + f_{i+1}(g_i - g_{i+1})$, $f_i\, g_i$ converge uniformément vers fg (et fg est un élément analytique de support E) si f et g sont supérieurement bornés sur E. Il en résulte que, dans le cas général, la restriction

(14) M. Krasner [10].

$(fg|\bar{E})$ de fg à un sous-ensemble quasi-connexe $\bar{E}$ de E est un élément analytique si f et g y sont bornés, et qu'on démontre que fg est une fonction analytique sur E si l'on arrive à recouvrir E par une famille enchaînée de ses sous-ensembles E de cette forme.

Or, comme $|f(x) - f_{i(\varepsilon)}| \leqslant \varepsilon$ partout sur E, f sera bornée sur $\bar{E}$ si la fraction rationnelle $f_{i(\varepsilon)}$ l'est. Ainsi, tout élément analytique de support E y est borné si toute fraction rationnelle n'y ayant aucun pôle l'est. Il est clair que ceci a lieu si, et seulement si E est fermé par rapport à la topologie de k'. Il suffit donc, pour prouver l'analyticité de fg, de trouver le recouvrement d'un ensemble quasi-connexe arbitraire E par une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes fermés.

Cela peut se faire de multiples manières. En voici deux canoniques, présentant aussi un intérêt propre.

A) La famille $\{E_{a,b}\ ;\ (a,b) \in E \times E\}$, à laquelle on ajoute, si $\infty \in E$, le complément E_∞ du plus petit cercle $C(k \,..\, E)$ contenant le complément $k \,..\, E$ de E dans k. L'ensemble $E_{a,b}$ s'obtient, à partir du plus petit cercle $C_{a,b} = C(a;d(a,b))$ $= C(b;d(b,a))$ de k contenant a et b, en lui enlevant les parties suivantes :

1°) Toute circonférence $S(a;r)$ non contenue dans E et telle que $r < d(a,b)$;

2°) Toute circonférence $S(b;r)$ satisfaisant à la même condition ;

3°) L'ensemble $C_{a,b} \,..\, \{C(a;d(a,b)-) \cup C(b;d(b,a)-)\}$ si cet ensemble n'est pas contenu dans E. Cette famille est enchaînée, car $\{a,b\} \subset E_{a,b}$, donc les suites : $E_{a,b}, E_{b,c}$; $E_{a,b}, E_{b,c}, E_{c,d}$ si $b \neq c$; $E_{a,b}, E_{b,c}, E_\infty$ où c est un point de E_∞, sont toutes des chaînes, et deux ensembles quelconques de la famille peuvent se relier par de telles chaînes.

B) La famille $\{E^*_{a,b}\ ;(a,b) \in E \times E\}$ (à laquelle on ajoute E_∞ quand $\infty \in E$), où $E^*_{a,b}$ s'obtient, à partir de $C_{a,b}$, en lui enlevant, pour tout $y \in C_{a,b} \,..\, E$, le cercle $C(y;\mathrm{Min}(d(a,y),d(b,y))^-)$. Comme visiblement $E^*_{a,b} \supseteq E_{a,b}$, cette famille est aussi enchaînée.

La quasi-connexité des $E_{a,b}$, $E^*_{a,b}$ et E se voit immédiatement.

En ce qui concerne la dérivation, l'existence locale de la dérivée résulte de la développabilité d'un élément analytique f en série de Taylor en X-a en tout point a de son support E. Si f_i est une suite approximante de f, et si d_X désigne la dérivation par rapport à X, $d_X f_i$ en sera une de $d_X f$ si, et seulement si $d_X(f_i - f_{i+1})$ tend uniformément vers 0 sur E. Soit que $f_i - f_{i+1} = g_i/h_i$, où g_i, h_i sont des polynômes premiers entre eux. Si F(X) est une série de Taylor (ou même de Laurent) $\sum c_n(X-a)^n$ en X-a, on a, en vertu de $d_X F(X) = \sum nc_n(X-a)^{n-1}$, $M^{(a)}_{d_X F}(r) \leqslant r^{-1}M^{(a)}_F(r)$. Soient a,x deux point de k. Puisque $d_X(f_i - f_{i+1}) = (d_X g_i/h_i) - (d_X h_i/h_i)(g_i/h_i)$, on a, si $|h_i(x)| = M^{(a)}_{h_i}(|x-a|)$, en posant

$r = d(x,a)$, $|d_X(f_i - f_{i+1})(x)| \leqslant \operatorname{Max}\left[(r^{-1}M^{(a)}_{g_i}(r)/M^{(a)}_{h_i}(r)),\ r^{-1}(M^{(a)}_{g_i}(r)/M^{(a)}_{h_i}(r))\right] =$

$= r^{-1}\, M^{(a)}_{f_i-f_{i+1}}(r) \leqslant d(x,a)^{-1}\,\varepsilon$ si $i \geqslant i(\varepsilon)$, x et a sont $\in$ E (car alors $d(x,a) \leqslant d$ et, puisque $|f_i - f_{i+1}|$ est $\leqslant \varepsilon$ partout sur E, $M^{(a)}_{f_i-f_{i+1}}(r)$ l'est aussi pour $r \leqslant d$). Or, on a $|h_i(x)| = M^{(a)}_{h_i}(d(x,a))$ si x n'admet aucun pôle de h_i , qui en soit proche par rapport à a, ce qui a lieu s'il est un point de E bien situé par rapport à a. Ainsi, s'il existe un ensemble fini de points de E, tel que tout $x \in E$ soit bien situé par rapport à deux au moins de ces points, et si r_o est le minimum des distances des points de cet ensemble, il existe, pour tout $x \in E$, un point a (pouvant dependre de x) de cet ensemble, par rapport auquel x est bien situé et tel que $r = d(x,a) \geqslant r_o$, ce qui implique, pour tout $x \in E$,

$|d_X(f_i-f_{i+1})(x)| \leqslant \varepsilon/r_o$ quand $i \geqslant i(\varepsilon)$, d'où résulte que $d_X f$ est un élément analytique sur un tel ensemble E. Mais si E a la forme $E_{a,b}$ ou $E^*_{a,b}$, on voit facilement, si r_a et r_b sont les premières valeurs exceptionnelles de E par rapport à a et b respectivement, un point x quelconque est bien situé ou bien par rapport à tous les points de $C(a,r_a^-)$, ou bien par rapport à tous ceux de $C(b,r_b^-)$. Il suffit donc, de prendre comme ensemble en question celui (a',a",b',b") de 4 points distincts tels que $a',a'' \in C(a,r_a^-)$ et $b',b'' \in C(b,r_b^-)$. Ainsi, si f est un élément analytique de support E et si a,b sont $\in$ E, les restrictions $(d_X f|E_{a,b})$,$(d_X f|E^*_{a,b})$ de $d_X f$ aux $E_{a,b}$ et $E^*_{a,b}$ sont des éléments analytiques, et il en est, évidemment, de même pour sa restriction $(d_X f \mid E_\infty)$ à E_∞ . Par suite, $d_X f$ est une fonction analytique sur E.

Si f est un élément analytique, 1/f est défini sur le sous-ensemble $E^o = \{x \in E; f(x) \neq 0\}$ de son support E. Si f_i est une suite approximante de f, $1/f_i$ en est une de 1/f si f est inférieurement bornée sur E^o (ce qui implique $E = E^o$) par une constante $c > 0$, comme le montre facilement l'égalité $(1/f_i) - (1/f_{i+1}) = (f_{i+1} - f_i)/f_i f_{i+1}$. Donc, pour démontrer que 1/f est toujours une fonction analytique sur E^o, il suffit de construire un recouvrement de E^o par une famille d'ensemble quasi-connexes, tel que f soit inférieurement borné sur chaque ensemble de la famille par une minorante positive pouvant dépendre de l'ensemble considéré.

Voici ce recouvrement. Soit $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_j \leq \dots$ une suite croissante (au sens large) de nombres réels positifs qui tende, sur la droite semi-réelle, vers $d^o = d(E^o)$. D'autre part, soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i > \dots$ une suite strictement décroissante de nombres réels qui tend vers 0^+ sur la même droite. Si $a \in E$, la fonction continue $M_f^{(a)}(r)$ a un minimum $m(f,j)_a$ sur le segment $[0,r_j]$ de la droite réelle complète R^o. Si, en plus, $f(a) \neq 0$, on a, en vertu de la propriété 1°) de la fonction M(r), $m(f,j)_a > 0$ (en effet, la fonction M(r) ne peut être = 0, en dehors de r = 0, que pour $r = +\infty$; mais $r_j = +\infty$ implique $d^o = +\infty$, donc $\infty \in E^o$ et $f(\infty) \neq 0$ donc $M^{(a)}(\infty) \neq 0$).

Soit $E_{i,j} = \{a \in E^o ; m(f,j)_a \geq \varepsilon_i\} = \{a \in E; m(f,j)_a \geq \varepsilon_i\}$ (car f(a) = 0 implique $m(f,j)_a = 0$). Considérons, pour tout couple i,j , la famille F(i,j) des intersections non-vides de $E_{i,j}$ avec des cercles de rayon r_j , autrement dit $F(i,j) = \{E_{i,j} \cap C(a;r_j) ; a \in E_{i,j}\}$. Le recouvrement en question est la réunion F de tous ces F(i,j) où (i,j) parcourt tous les couples d'entiers > 0.

Si $a \in E_{i,j}$, on a $|f(a)| = M_f^{(a)}(0) \geq m(f,j)_a \geq \varepsilon_i$, donc f est inférieurement bornée par $\varepsilon_i > 0$ sur $E_{i,j}$, donc l'est par une minorante positive sur tout ensemble de la famille F. Soient $a,b \in E^o$. Il existe un j tel que $r_j \geq d(a,b)$, et il existe un i tel que $\varepsilon_i \leq \mathrm{Min}[m(f,j)_a, m(f,j)_b]$. Mais alors, a,b appartiennent tous les deux à $E_{i,j}$ et $b \in C(a;r_j)$, ce qui montre que ces points appartiennent à un ensemble $\in F(i,j) \subsetneq F$, et F est un recouvrement enchaîné de E. Pour montrer que $E_{i,j} \cap C(a;r_j)$ est quasi-connexe, il suffit de montrer qu'il est ultra-ouvert en tout $x \in E_{i,j} \cap C(a,r_j) = E_{i,j} \cap C(x,r_j)$; autrement dit, on démontre la quasi-connexité de tout ensemble de $F(i,j)$ si l'on montre, pour tout $x \in E_{i,j}$, que $E_{i,j} \cap C(x;r_j)$ est ultra-ouvert en x. Le diamètre $\bar{d}$ de cet ensemble est $\leq r_j$. Considérons une circonférence $S(x;r)$, où $r \leq \bar{d}$, qui n'y est pas contenue. Alors, ou bien $S(x;r) \not\subseteq E$, autrement dit $r \leq r_j \leq d(E)$ est une valeur exceptionnelle de E pour x, ou bien $S(x;r) \subseteq E$ et il existe $y \in S(x,r)$ tel que $y \notin E_{i,j}$, autrement dit $m(f,j)_y < \mathcal{E}_i$. Les valeurs du premier type sont, en vertu de la quasi-connexité de E, en nombre fini. Soit $r \leq r_j$ une valeur de second type. Alors, il existe une valeur $r' \leq r_j$ telle que $M_f^{(y)}(r') < \mathcal{E}_i$. Mais si $r' \geqslant r = d(x,y)$, on a $M_f^{(y)}(r') = M_f^{(x)}(r') \geqslant \mathcal{E}_i$, ce qui n'est pas possible. On a donc $r' < r$ et, si $z \in S(y;r')$, on a $|f(z)| < \mathcal{E}_i$. Mais $S(y;r') \subseteq C(y;r^-) \subseteq S(x;r)$ et, par suite, il y a des $z \in S(x;r)$ tels que $|f(z)| < \mathcal{E}_i \leq M_f^{(x)}(r)$. Soit $0 < \mathcal{E}' < \mathcal{E}_i$ et soit i un indice (particulier), qui est $\geqslant i(\mathcal{E}')$. Alors $|f-f_i|$ est $\leq \mathcal{E}'$ partout sur E et en particulier, sur $S(x;r)$, ce qui implique $|f_i(z)| < \mathcal{E}_i$ et $M(r)_i^{(x)} = M_f^{(x)}(r) \geqslant \mathcal{E}_i$. Il en résulte qu'au moins un zéro de f_i se trouve sur $S(x;r)$. Comme le nombre des zéros de f_i est fini, le nombre des r du second type est fini. Ainsi, $E_{i,j} \cap C(x;r_j)$ est ultra-ouvert en x, ce qui achève la démonstration.

Si f_n est une suite uniformément convergente d'éléments analytiques de même support E, dont f soit la limite, et si $f_{n,i}$ est une suite approximante de f_n , l'application évidente de la méthode de diagonale de Cantor permet de construire une suite $f_{n,i(n)}$ convergeant uniformément vers f, qui est donc un élément analytique.

Soit E un ensemble quasi-connexe, et soient f,g deux fonctions analytiques sur E. De ce qui précède, résulte directement que $d_X f$ et (sur E^o) $1/f$ sont des fonctions analytiques, car si l'on remplace chaque ensemble d'une famille enchaînée par un recouvrements est encore enchaîné de cet ensemble, la réunion, de tous ces recouvrements est encore enchaînée. Par contre, si l'on veut établir l'analyticité de f + g et de fg, on rencontre la difficulté suivante ; soient Φ, Ψ les ensembles des supports des éléments analytiques se prolongeant les uns les autres, qui constituent respectivement les fonctions analytiques f,g de support E. Ce sont deux recouvrements enchaînés de E, mais qui sont, en général, différents. La famille $\mathrm{Int}(\Phi,\Psi) = \{F \cap G; F\in \Phi, G\in\Psi, F\cap G \neq \emptyset\}$ est encore un recouvrement quasi-connexe de E, et les restricions de f + g , fg sur un ensemble $\in \mathrm{Int}(\Phi,\Psi)$ sont des fonctions analytiques (celles de f + g même des éléments analytiques) sur cet ensemble. Ainsi, pour être sûr que f + g et fg sont des fonctions analytiques de k sur E, il suffit de montrer qu'il existe de tels recouvrement Φ et Ψ que $\mathrm{In}(\Phi,\Psi)$ soit enchaînée. On peut envisager aussi la méthode indirecte suivante, qui, d'ailleurs, démontre seulement que f + g et fg sont induites sur E par des fonctions analytiques d'une extension valuée convenable k^o de k (qu'on suppose aussi complète et algébriquement close), et pas forcément de k ; on dira qu'un élément analytique f^o de k^o domine un élément analytique f de k si le support de f est contenu dans celui de f^o et si f est la restriction de f^o à son support ; supposons qu'on puisse faire correspondre à chacun des éléments analytiques constituant f et g , un élément analytique de k^o, qui le <u>domine</u>, de manière que, si Φ^o et Ψ^o sont les familles des supports de ces éléments pour respectivement f et g, et si E', E" sont les réunions des Φ^o , Ψ^o, ces éléments définissent des fonctions analytiques f^o, g^o de k^o sur respectivement E',E", et $\mathrm{Int}(\Phi^o,\Psi^o)$ est enchaînée. Alors, visiblement, f^o g^o sont des fonctions analytiques de k^o sur $E'\cap E''$ et f + g , fg sont des restrictions de ces fonctions respectives à $E \subseteq E'\cap E''$.

<u>Remarque</u>. Si Φ et Ψ sont des familles enchaînées telles que, pour tout $G\in\Psi$ la famille $\mathrm{Int}_G\Phi = \{F\cap G;\ F\in\Phi,\ F\cap G\neq\emptyset\}$ est enchaînée, $\mathrm{Int}(\Phi,\Psi)$ l'est aussi: en effet, $\mathrm{Int}(\Phi,\Psi)$ s'obtient de Ψ , en remplaçant chacun de ses ensembles par un de ses recouvrement enchaînés.

Or, cette condition est certainenement satisfaite dans deux cas suivants :

1°) Φ <u>est une famille filtrante</u> (c'est-à-dire, pour tous $F,F'\in\Phi$ existe un $F''\in\Phi$ tel que $F\cup F'\subseteq F''$). En effet, alors $\mathrm{Int}_G\,\Phi$, si elle n'est pas vide, est aussi filtrante, donc enchaînée.

2°) Les ensembles $F\in\Phi$ et G appartiennent à une famille Q ayant les propriétés suivantes :

a) Si $A,B\in Q$ et si $A\cap B\neq\emptyset$, $A\cup B\in Q$ (il en résulte que la réunion d'une famille enchaînée finie d'ensembles $\in Q$ y appartient) ;

b) Si $A,B,C \in Q$ sont tels que $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ et $C \cap A \neq \emptyset$, on a $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

En effet, soient $F,F' \in \Phi$ tels que $F \cap G \neq \emptyset$ et $F' \cap G \neq \emptyset$. Il existe une chaîne $\tilde{C} = \{F = F_1 , F_2 ,\ldots , F_s = F'\}$ reliant F et F' dans $\bar{\Phi}$, et il suffit de prouver que $\mathrm{Int}_G\check{C}$ est enchaînée. On va le faire par récurrence sur s, en supposant le théorème prouvé pour s plus petits, et en remarquant que, le cas $s = 1$, est trivial. Supposons d'abord, qu'il existe un i distinct de 1 et de s tel que $F_i \cap G \neq \emptyset$. Alors, $\hat{C}$ se décompose en deux chaînes plus courtes $C' = \{F_1 ,\ldots , F_i\}$ et $\tilde{C}'' = \{F_i ,\ldots , F_s\}$, reliées par le terme F_i. Dès lors les familles $\mathrm{Int}_G\tilde{C}'$ et $\mathrm{Int}_G\tilde{C}''$, qui ont en commun $F_i \cap G \neq \emptyset$, sont toutes les deux enchaînées, et $\mathrm{Int}_G\check{C}$, qui est leur réunion, l'est aussi. Supposons maintenant qu'un tel i n'existe pas. Alors $\mathrm{Int}_G\tilde{C} = \{F \cap G, F' \cap G\}$. Posons $A = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{s-1}$, $B = F_s = F'$ $C = G$. En vertu de a), $A \in Q$ et on a $A \cap G = (F_1 \cap G) \cup (F_2 \cap G) \cup \ldots \cup (F_{s-1} \cap G) =$ $= F_1 \cap G = F \cap G \neq \emptyset$ · D'autre part, on a $A \cap B \supseteq F_{s-1} \cap F_s \neq \emptyset$. Ainsi $A \cap B$, $B \cap C$ et $C \cap A$ sont tous non vides, et en vertu de b), $(F \cap G) \cap (F' \cap G) = (A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ n'est pas vide et $\mathrm{Int}_G\hat{C}$ est enchaînée.

La possibilité de définir toute fonction analytique de k à l'aide d'une famille d'éléments analytiques, dont les supports forment une famille filtrante, a été remarquée par Robba à partir de la proposition (basée sur mes "théorèmes Mittag-Leffleriens") que j'avais énoncée (sans démonstration ; depuis Robba en a publié une plus simple, qui sera exposée plus loin) dans (15) : si f et f' sont deux éléments analytiques de k à supports non-disjoints E,E' , qui se prolongent, leur <u>superposition</u> en est encore un (Etant donné une famille de fonctions dont les domaines de définition forment une famille enchaînée d'ensembles, cette famille est dite <u>superposable</u> si deux fonctions quelconques de la famille sont égales en tout point, où elles sont définies toutes les deux. Si la famille en question est superposable, on appelle sa <u>superposition</u> la fonction définie sur la réunion des domaines de définition de toutes les fonctions de la famille et qui, en chaque point de cet ensemble, est égale à la valeur commune des fonctions de la famille qui y sont définies). Il résulte de ce théorème par récurrence que la superposition d'une famille superposable finie d'éléments analytiques de k en est encore un, ce qui permet, justement, de rendre filtrant le recouvrement d'une fonction analytique par des éléments

(15) M. Kranser [10]

analytiques, en y ajoutant toutes les réunions finies enchaînée. Mais on peut en déduire une conséquence plus prolonde : étant donné une chaîne $f_1, f_2, \dots, f_s$ d'éléments analytiques de k, dont deux consécutifs se prolongent, ces éléments forment une famille superposable. Montrons le par récurrence sur s, en supposant la proposition prouvée pour s-1 et remarquant sa trivialité pour s=1. La famille $f_1, \dots, f_{s-1}$ est donc superposable et sa superposition f' est un élément analytique. Si E_i est le support de f_i, f' coïncide avec f_{s-1} sur E_{s-1}, donc, puisque f_{s-1} et f_s se prolongent, avec f_s sur l'ouvert non vide $E_{s-1} \cap E_s$. Ainsi, en vertu du théorème d'unicité, f' et f_s se prolongent et tout est prouvé. Ceci montre que <u>le prolongement analytique quasi-connexe est globalement uniforme</u>, car si $E_1 \cap E_s$ n'est pas vide, f_1 et f_s y sont partout égaux.

La même propriété a lieu pour les chaînes d'éléments analytiques, dont les supports appartiennent à une famille Q ayant les propriétés a), b). En concervant les mêmes notations pour les éléments analytiques et leurs supports, procédons par réccurence sur s, en supposant $s > 2$ (car s=2 est trivial). Par hypothèse de réccurence, les familles $\{f_1, \dots, f_{s-1}\}$ et $\{f_2, \dots, f_s\}$ sont toutes les deux superposables. Donc, si $\{f_1, \dots, f_s\}$ ne l'est pas, $E_1 \cap E_s$ n'est pas vide et f_1 n'y est pas partout égal à f_s. S'il existe un i tel que $2 < i < s$ et que $E_1 \cap E_i \neq \emptyset$, f_i prolonge f_1 et la chaîne plus courte $f_1, f_i, f_{i+1}, \dots, f_s$ est superposable. Si un tel i n'existe pas, les seuls $E_i \cap E_1$ non vides sont $E_2 \cap E_1$ et $E_s \cap E_1$. Comme ils forment une famille enchaînée, on a $E_1 \cap E_2 \cap E_s \neq \emptyset$ et on a $f_1 = f_2$ et $f_2 = f_s$ partout sur cet ouvert. Ainsi $f_1 = f_s$ sur un ouvert et f_1 et f_s se prolongent en vertu du théorème d'unicité.

Il en résulte que si l'on peut faire correspondre à tout élément analytique f de k un élément analytique f^o d'un surcorps convenable k^o de k, qui le domine, et dont le support appartienne toujours à une certaine famille Q d'ensembles quasi-connexes de $k^{o'}$ ayant les propriétés a) et b), toutes les conditions de l'application de la "méthode indirecte" pour prouver que f+g et fg sont les restrictions à E de fonctions analytiques de k^o sont satisfaites. En effet, dans ce cas, non seulement $\mathrm{Int}(\varphi^o, \psi^o)$ est enchaînée, mais les éléments analytiques de k^o, qui correspondent à ceux, qui forment les fonctions analytiques données f,g de k (l'unicité globale du prolongement analytique fait à l'aide des éléments analytiques de k^o, dont les supports sont $\in$ Q), forment deux familles superposables et définissent bien deux fonctions analytiques de k^o sur E' et E", dont respectivement f,g sont les restrictions à E. Et on voit que l'existence d'une telle famille Q pour un surcorps convenable k^o de k garantit aussi l'uniformité globale du prolongement analytique quasi-connexe sur k.

Or, déjà en 1957, j'ai défini (17) une famille d'ensembles quasi-connexes d'un corps valué complet k, celle des ensembles quasi-connexes réguliers, qui possède les propriétés a) et b) quand le cardianl card $\bar{k}$ du corps résiduel $\bar{k}$ de k est supérieur à la puissance du dénombrable (il est à remarquer que tout corps valué admet une extension valuée complète, même maximalement complète, et algébriquement close ayant, en plus, cette propriété). Bien que, pour la question d'analyticité de la somme et du produit de fonctions analytiques et pour celle d'uniformité globale du prolongement quasi-connexe, l'emploi de cette famille peut se remplacer par celui des familles filtrantes de Robba, il existe, comme on verra, d'autres raisons de son importance. Si card $\bar{k}$ est au plus dénombrable, tout ensemble quasi-connexe de k' est régulier.

§.5. Ensembles quasi-connexes et éléments analytiques réguliers.

Un ensemble quasi-connexe $E \subsetneq k'$ est dit *régulier* s'il satisfait à la condition supplémentaire suivante :

Pour tout cercle circonférencié C *de rayon* $r \leqslant d(E)$ *tel que* $C \cap E \neq \emptyset$, *le complément* $C \mathbin{..} E$ *de* E *dans* C *est contenu dans la réunion d'un ensemble au plus dénombrable de cercles de rayon* r^- .

On vérifie sans peine que les ensembles quasi-connexes réguliers ont les mêmes propriétés que les ensembles quasi-connexes généraux : 1) l'intersection de deux ensembles réguliers l'est encore ; 2) la réunion d'une famille enchaînée d'ensembles réguliers est régulière ; 3) la quasi-connexité régulière est préservée par les homographies non singulières. La famille des ensembles quasi-connexes réguliers possède donc toujours la propriété a) des familles Q. Quand le cardinal de $\bar{k}$ est supérieur à la puissance du dénombrable (ce qu'on exprimera, par abus de langage, en disant que $\bar{k}$ n'est pas dénombrable), elle possède aussi la propriété b). (Dans d'autres cas, comme le cardinal de l'ensemble des cercles de rayon r^- contenus dans un cercle de rayon r est égal à celui de k, tous les ensembles quasi-connexes $\subseteq k'$ sont réguliers).

Proposition : *Si* k *n'est pas dénombrable et si* A,B,C *sont des ensembles quasi-connexes réguliers de* k', *tels que* $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ *et* $C \cap A \neq \emptyset$, *on a* $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

---

(17) Voir M. Krasner [6] (et aussi [10], §5)

<u>Démonstration</u>. Soient $a \in B \cap C$, $b \in C \cap A$, $c \in A \cap B$. Le triangle ultramétrique (a,b,c) est isocèle, et ses côtés latéraux sont maximaux. On peut supposer, sans perte de généralité (car on peut changer les noms des A,B,C) que $d(a,b) = d(a,c) \geqslant d(b,c)$. Posons $r = d(b,c)$ et $D \doteq C(b;r)$. Visiblement, D est un cercle circonférencié non-disjoint avec chacun des A,B,C car $b \in A \cap C$ et $c \in A \cap B$ lui appartiennent. On a $r \leqslant d(A) \leqslant d(B)$ et $\leqslant d(C)$. Ainsi, chacun des $D \,..\, A$, $D \,..\, B$, $D \,..\, C$ est contenu dans la réunion d'un ensemble au plus dénombrable de cercles de rayon r^-, et il en est de même pour $D \,..\, (A \cap B \cap C) = (D \,..\, A) \cup (D \,..\, B) \cup (D \,..\, C)$. Mais, puisque l'ensemble des cercles de ce rayon contenus dans D est plus que dénombrable, on a $D \cap (A \cap B \cap C) \neq \emptyset$ et $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

On vérifie que si E est un ensemble quasi-connexe régulier, et si a,b sont $\in E$, $E^*_{a,b}$ (mais pas $E_{a,b}$) est régulier.

Un élément analytique $f : E \longrightarrow k$ est dit régulier si son support E l'est.

<u>Théorème</u>. <u>Soient</u> k <u>et</u> $k^o \supseteq k$ <u>deux corps valués complets algébriquement clos tels que</u> k^o <u>soit une extension valuée de</u> k. <u>Soit</u> $f : E \longrightarrow k$ <u>un élément analytique de</u> k. <u>Alors, il existe un élément analytique régulier</u> $f^o : E^o \longrightarrow k^o$ <u>de</u> k^o, <u>qui domine</u> f.

<u>Démonstration.</u> Construisons, d'abord, $E^o \supseteq E$, qui soit quasi-connexe et régulier dans $k^{o\prime} = k^o \cup \{\infty\}$ où ∞ est supposé commun à k' et à $k^{o\prime}$. Posons $C = C(E)$ et $d = d(E) = d(C)$. Fixons une suite approximante f_i de f et soit P l'ensemble de tous les pôles p de toutes les f_i tels que $p \in C$. Si C^o est le plus petit cercle de $k^{o\prime}$ contenant C, soit E^o l'ensemble de tous les $x \in C^o$, pour lesquels il existe un $a = a(x) \in E$ tel qu'il n'existe aucun $p \in P$ tel que $d(x,p) < d(x,a)$. Montrons que E^o est ultra-ouvert en tout point $x \neq \infty$.

Soit $r \leqslant d(E)$ un nombre réel positif et soit $y \in k^o$ tel que $d(x,y) \leqslant r$ et que $y \notin E^o$. Posons $r_o = d(x,a(x))$. Puisque $y \notin E^o$ et puisque $a(x) \in E$, il existe un $p \in P$ tel que $d(y,p) < d(y,a(x))$, ce qui implique $d(a(x),p) = d(a(x),y)$. Dès lors si $d(x,y) < r_o = d(x,a(x))$, on a $d(y,a(x)) = d(x,a(x)) = r_o$ et

$d(x,p) \leq \mathrm{Max}\,[d(x,y),d(y,p)] < \mathrm{Max}(r_o,r_o) = r_o = d(x,a(x))$ et, contre l'hypothèse, on a $x \notin E^o$. Ainsi, on a $d(x,y) \geqslant r_o$. Maix si $d(x,y) > r_o$, on a $d(a(x),y) = d(x,y)$ et $d(a(x),p) = d(x,y)$. Ainsi, les circonférences $S(x;d(x,y))$ et $S(a(x)\,;\,d(x,y))$ de k^o coïncident, et $p \in P$ appartient à cette circonférence. Donc, comme $p \in C \,..\, E$, $S(a(x),d(x,y)) \cap k'$, qui est la circonférence de centre $a(x)$ et de rayon $d(x,y)$ dans k', n'est pas $\subseteq E$. Comme en vertu de la quasi-connexité de E, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de telles circonférences de centre $a(x)$ et de rayon $\leqslant r$, $d(x,y)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $> r_o$ et $\leqslant r$, donc aussi de valeurs $\leqslant r$, ce qui montre que E^o est ultra-ouvert en x, donc, puisque $x \in E^o$, $x \neq \infty$ est autrement arbitraire, quasi-connexe. Si $x \in E$, on peut prendre $a(x) = x$, donc $E^o \supseteq E$.

Soient $C^o = C(x;r)$ un cercle circonférencié de rayon (propre) $r \leqslant d = d(E^o)$ et de centre $x \in E^o$ dans k^o et, en supposant $C^o \cdot\cdot E^o$ non vide, $y \in C^o \cdot\cdot E^o$. On a vu déjà que $d(x,a(x)) \leqslant d(x,y) \leqslant r$, donc $a(x) \in C^o$. Il existe un $p \in P$ tel que $d(y,p) < d(y,a(x)) \leqslant r$, donc $y \in C(p,r^-)$, où p parcourt l'ensemble au plus dénombrable $P \cap C^o$. Ainsi E^o est bien régulier.

La suite f_i converge uniformément sur E^o, car, si $i \geqslant i(\varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$, $M^{(a(x))}_{f_i - f_{i+1}}(r)$ est $\leqslant \varepsilon$ pour tout $r \leqslant d$, et, en particulier, pour $r = d(a(x),x)$, où x est un point arbitraire de E^o. Mais, comme tout pôle de $f_i - f_{i+1}$ proche de x par rapport à un point de $E \cap C$ est $\in P$, et comme il n'existe aucun $p \in P$ proche de x par rapport à $a(x)$, il n'existe aucun pôle de $f_i - f_{i+1}$ proche de x par rapport à $a(x)$, et on a

$|f_i(x) - f_{i+1}(x)| \leqslant M^{(a(x))}_{f_i - f_{i+1}}(d(a(x),x)) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Ce théorème a une conséquence importante. Considérons un élément analytique f de k, et prolongeons le de toutes les manières possibles. Comme le prolongement analytique quasi-connexe est globalement uniforme, on obtient ainsi, une famille superposable d'éléments analytiques de k, dont la superposition donne le prolongement maximal possible $F(f)$ de f, c'est-à-dire une fonction analytique prolongeant f, et qui ne peut plus être prolongée au delà de son domaine de définition. Un ensemble (forcément quasi-connexe) sera dit, selon la terminologie de M. Motzkin et Robba, un <u>ensemble d'analyticité</u> s'il est le domaine de définition d'une fonction analytique de cette forme. Or étant donné un tel ensemble d'analyticité E et une fonction analytique $F(f)$ dont il est le domaine de définition, considérons une famille d'éléments analytiques de k dont $F(f)$ soit la superposition. Or, en vertu du théorème précédent, en y posant $k^o = k$, on peut faire correspondre à chaque élément analytique de la famille un élément régulier, qui le domine, donc le prolongement $F(f)$ est encore la superposition de la famille de ces nouveaux éléments, qui sont réguliers. Son domaine de définition E est donc la réunion d'une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes réguliers, donc est régulier. Ainsi, <u>tout ensemble d'analyticité est quasi-connexe régulier</u>. On va prouver plus loin que tout ensemble quasi-connexe régulier est un ensemble d'analyticité, et c'est de là que vient l'importance de cette notion.

§.6. Trous des ensembles quasi-connexes et quasi-connexes réguliers.

Soit E un sous-ensemble de k'. On appelle cercle projectif de k' toute image d'un cercle de k' par une homographie non-singulière. On voit immédiatement que les cercles projectifs de k' sont ses cercles et leurs compléments. On appelle trou de E tout cercle projectif maximal de k' contenu dans son complément k' .. E. Les trous de E forment un ensemble $\mathcal{T}(E)$ de cercles disjoints, dont certains, dits trous ponctuels, sont des éléments de k'.

Un trou T est dit isolé s'il existe un surcercle projectif propre $C \supset T$ disjoint avec tout autre trou de E, c'est-à-dire tel que C .. E = T (bien entendu $C \cap E$ peut être réduit à une seule circonférence). On appelle ensemble dérivé de $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble $\mathcal{T}'(E)$ de tous les trous non isolés de E. Posons $E' = k' .. (\bigcup_{T' \in \mathcal{T}'(E)} T')$. $\mathcal{T}'(E)$ est l'ensemble des trous $\mathcal{T}(E')$ de E', et on pose $\mathcal{T}''(E) = \mathcal{T}'(E')$. Par ce procédé, on peut définir, pour tout ordinal α, le α-ième dérivé : $\mathcal{T}^{(\alpha)}(E)$ de $\mathcal{T}(E)$. Si α est de première espèce, on pose $\mathcal{T}^{(\alpha)}(E) = (\mathcal{T}^{(\alpha-1)}(E))'$. Et si α est de seconde espèce, on pose

$\mathcal{T}^{(\alpha)}(E) = \bigcap_{\beta < \alpha} \mathcal{T}^{(\beta)}(E)$. On démontre qu'à partir d'un certain ordinal, $\mathcal{T}^{(\alpha)}(E)$ devient stationnaire. Cette partie stationnaire de $\mathcal{T}(E)$ sera notée $\mathcal{P}(E)$ et dite le noyau parfait de l'ensemble des trous de E et $\mathcal{R}(E) = \mathcal{T}(E) \,...\, \mathcal{P}(E)$ et dit sa partie réductible. Les trous de E sont réductibles si l'on a

$\mathcal{T}(E) = \mathcal{R}(E)$ (ou $\mathcal{P}(E) = \emptyset$).

Supposant la valuation de k dense, appelons un cercle projectif, qui est le complément k ... C d'un cercle C de k', circonférencié resp. non-circonférencié selon que C est non-circonférencié resp. circonférencié. De lors, la notion de sous-cercle projectif non-circonférencié maximal d'un cercle projectif circonférencié est claire. Soit $e \in E$. On va définir un invariant projectif du couple (E,e), qu'on va appeler l'arbre des voisinages des trous et qu'on va noter $\mathcal{V}_e(E)$. On va faire correspondre à chaque i un ensemble $\mathcal{V}_i$ de cercles projectifs disjoints de k' tel que:

a) pour tout i fixé, tout trou $T \in \mathcal{T}(E)$ est contenu dans quelque ensemble $\in \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_i$;

b) si $i < j$ et si $V_j \in \mathcal{V}_j$, il existe un $V_i \in \mathcal{V}_i$ tel que $V_j \subset V_i$

c) $\mathcal{V}_0$ est un singleton. Les $V_i \in \mathcal{V}_i$ seront appelés les voisinages de trous d'ordre i. Ce système est visiblement un arbre (pouvant avoir des branches qui s'en vont à l'infini), si on l'ordonne par ordre d'inclusion. En plus, ce système est complètement défini, comme suit à partir de E et de e :

a) l'unique élément V_o de $\mathcal{Q}_o$ est le plus petit cercle projectif contenant tous les trous de E (toutefois ; on pose $\mathcal{Q}_o = \emptyset$ si $E = k'$) et tel que $e \notin V_o$.

b) $\mathcal{Q}_i$ étant déjà défini et non vide, soit $V \in \mathcal{Q}_i$. Cet ensemble ou bien est un trou, auquel cas ce trou est dit accessible de rang i, ou bien il est non-circonférencié sans se réduire à un trou unique, auquel cas il est dit un voisinage de trous <u>singulier</u>, ou bien, sans se réduire à un trou, il est circonférencié. **Alors il est** dit **un voisinage** de trous <u>régulier</u>, et chaque trou $T \subset V$ est contenu dans quelque sous-cercle projectif non-circonférencié maximal de V. Soit V' un tel sous-cercle projectif de V contenant des trous. Appelons $(V')_{i+1}$ le plus petit cercle projectif contenant tous les trous $T \subseteq V'$ de E et soit $\mathcal{Q}(V)_{i+1}$ l'ensemble de tous ces $(V')_{i+1}$. Alors $\mathcal{Q}_{i+1} = \cup \mathcal{Q}(V)_{i+1}$, où V parcourt tous les voisinages de trous réguliers d'ordre i.

On appelera une <u>branche</u> de l'arbre des voisinage de trous une partie totalement ordonnée maximale de cet arbre. Elle commence à sa "racine" V_o et va ou bien jusqu'à un trou accessible ou un voisinage singulier V_i d'un certain ordre i, ou bien est une suite infinie de cercles projectifs emboités. L'intersection de tous les voisinages appartenant à une branche sera dite son <u>fruit</u>. Si k n'est pas maximalement complet, le fruit d'une branche infinie de $\mathcal{Q}_e(E)$ peut être l'ensemble $\emptyset$.

<u>L'ensemble</u> E <u>est quasi-connexe si, et seulement si tout fruit de</u> $\mathcal{Q}_e(E)$ <u>est un trou ou</u> $\emptyset$. Il suffit de le prouver sous l'hypothèse $e=\infty \in E$. Supposons, d'abord, E quasi-connexe. Soit d'abord $B = (V_o \supset V_1 \supset \ldots \supset V_i)$ une branche finie de $\mathcal{Q}(E)$. Alors, son fruit est V_i , et si V_i n'est pas un trou, il est un voisinage singulier, c'est-à-dire, un cercle non circonférencié. Soit $a \in V_i \cap E$ et soit $r_{i-1} = d(V_{i-1})$ (si $i = 0$, on pose $r_{-1} = +\infty$) . Or, puisque $d(E) = +\infty$, la distance d(a,y), ou $y \notin E$, ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $r_{i-1} \leqslant d(E)$, ce qui montre que le plus petit cercle V_i de centre a contenant tous les trous $\subseteq C(a,\bar{r}_{i-1})$ doit être circonférencié, contre l'hypothèse. Supposons maintenant que $B = (V_o \supset V_1 \supset \ldots \supset V_i \supset \ldots)$ est une branche infinie de $\mathcal{Q}_e(E)$ et que son intersection $V = \bigcap_i V_i$ de ses termes n'est pas disjointe avec E. Soit $a \in E \cap V$. Soit $r_i = d(V_i)$. C'est, par hypothèse, un nombre réel, qui est aussi égal à $d(V_i \ldots E) = r_a(V_i \ldots E)$.

Ainsi, il existe un $y_i \notin E$, tel que $d(a,y_i) = r_i$. Comme

$d(E) = +\infty > r_1 > r_2 > \dots > r_3 > \dots$, E n'est pas ultra-ouvert en a, ce qui contredit sa quasi-connexité.

Vice versa, supposons que tous les fruits non-vides de $\mathcal{Q}(E)$ sont des trous de E, et soit $a \in E$. Alors, si l'on pose $V_{-1} = k'$, il existe un $i \geq 0$ tel que a n'appartienne à aucun $V_i \in \mathcal{Q}_i$, et soit i le plus petit indice de cette sorte. Ainsi, si T est un trou de E, ou bien $d(a,T) = d(a,V_o)$ si $a \notin V_o$ ou bien, si $a \in V_o$, il existe un j, $0 \leq j < i$ tel que $\{a\}$ et T sont contenus tous les deux dans un même voisinage $V_j \in \mathcal{Q}_j$, mais qu'il n'existe aucun $V_{j+1} \in \mathcal{Q}_{j+1}$ ayant la même propriété. Mais cela veut dire que $C(a,r_j^-) \cap T = \emptyset$ tandis que $C(a,r_j) \supset T$, donc $d(a,T) = r_j$. Comme tout $y \notin E$ appartient à quelque trou de E, on voit que les seules valeurs possibles de la distance d(a,y) sont $d(a,V_o)$ si $a \,/\, V_o$ et $r_o, r_1, \dots, r_{i-1}$ si $a \in V_o$. Ainsi, si $a \neq \infty$, E est ultra-ouvert en a, donc quasi-connexe. Ainsi, un <u>ensemble quasi-connexe</u> E <u>est le complémentaire de la réunion des fruits de</u> $\mathcal{Q}_e(E)$, donc est complètement défini par $\mathcal{Q}_e(E)$.

Par construction de $\mathcal{Q}_e(E)$, nous voyons que si $V_i \in \mathcal{Q}_i$ n'est pas le fruit d'une branche finie de $\mathcal{Q}_e(E)$, $d(V_i)$ est réel et si V_{i+1} , V'_{i+1} sont deux éléments de $\mathcal{Q}_{i+1}$ appartenant à ce V_i , on a $d(V_{i+1} , V'_{i+1}) = d(V_i)$. Vice versa, si k est maximalement complet et si $\mathcal{Q}$ est un arbre de cercles tel que :

1°) Si V n'est pas l'extrémité d'une branche finie de $\mathcal{Q}$, r(V) est réel et > 0

2°) En appelant les succésseurs immédiats d'un $V \in \mathcal{Q}$ ses <u>fils</u>, tout V, qui n'est pas une extrémité de branche finie a au moins deux fils

3°) Si W,W' sont deux **fils** distincts d'un $V \in \mathcal{Q}$, $d(W,W') = d(V)$, $\mathcal{Q}$ est l'arbre des voisinages de trous $\mathcal{Q}_\infty(E)$ d'un $E \subseteq k'$. Il suffit de prendre comme E le complémentaire de la réunion des fruits de $\mathcal{Q}$.

En effet, premièrement, vu que k est maximalement complet, aucun des fruits de $\mathcal{Q}$ n'est vide, et tout $V \in \mathcal{Q}$ en contient au moins un. Supposons qu'on a déjà prouvé que $V \in \mathcal{Q}_\infty(E)$. Si V est l'extrémité d'une branche finie de $\mathcal{Q}$ c'est un fruit $\mathcal{Q}$, donc un trou de $\mathcal{Q}_\infty(E)$ et, par suite, une extrémité d'une branche finie de $\mathcal{Q}_\infty(E)$. Si V n'est pas une telle extrémité, soit $r = d(V)$ (c'est un nombre réel). Considérons un cercle $C \subset V$ de rayon r^- . Alors, ou bien C ne contient aucun fils de V dans $\mathcal{Q}$, ou bien il en contient un W. Dans le premier cas, il ne contient aucun fruit de $\mathcal{Q}$, donc aucun trou de E, et, par suite aucun fils de V dans $\mathcal{Q}_\infty(E)$. Si, par contre $C \supset W$, considérons un fruit T de $\mathcal{Q}$ tel que $T \subsetneq W$. Alors $C \supset T$, donc contient un fils $W' \supseteq T$ dans $\mathcal{Q}(E)$, et $W \cap W' \neq \emptyset$. Mais si $C^* \subset C$ est un sous-cercle de C de rayon $r(W)^-$, il contient un fruit de $\mathcal{Q}$, donc un trou de E, si et seulement s'il contient quelque fils W^* de W. Donc tous les trous de E, qui sont $\subseteq C$, sont $\subseteq W$ et W', qui est le plus petit cercle contenant ces trous, est $\subseteq W$. Mais W a au moins deux fils W^*, $W^{*\prime}$ tels que $d(W^*, W^{*\prime}) = d(W)$.

Chacun d'eux contient un fruit de $\mathcal{Q}$, donc un trou de E, qui soit respectivement T^*, $T^{*\prime}$, On a $T^* \subset W'$, $T^{*\prime} \subset W'$ et $d(T^*, T^{*\prime}) = d(W)$. Par suite, on a $d(W') \geqslant d(W)$, donc $W' = W$. Ainsi, les fils de V dans $\mathcal{Q}(E)$ coïncident avec ses fils dans $\mathcal{Q}$, qui prouve que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\infty(E)$.

Un ensemble quasi-connexe E est, évidemment, régulier si, et seulement si $V \in \mathcal{Q}_e(E)$ a un nombre au plus dénombrable de fils, ou ce qui revient au même, la famille $\mathcal{Q}_e(E)$ est au plus dénombrable.

E étant un ensemble quasi-connexe, une partie $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(E)$ de $\mathcal{T}(E)$ est dite <u>génératrice</u> si $E' = k' .. (\cup_{T \in \mathcal{T}'} T)$ est tel que $\mathcal{Q}_e(E') = \mathcal{Q}_e(E)$. En vertu des démonstrations précédentes si $\mathcal{T}'$ est tel que, dans tout $V \in \mathcal{Q}_e(E)$ soit contenu au moins un $T \in \mathcal{T}'$, $\mathcal{T}'$ est génératrice. Il en résulte que, si E est quasi-connexe régulier, son ensemble des trous admet une partie génératrice au plus dénombrable (18).

---

(18) L'arbre $\mathcal{Q}_\infty(E)$ a été introduit par moi-même en 1964 dans [10] pour les ensembles quasi-connexes réguliers (plus précisément pour les ensembles d'analyticité, ce qui, à postoriori n'est pas une restriction, car il sera prouvé que tout ensemble quasi-connexe régulier l'est), mais d'une manière entremêlée avec d'autres considérations. D'une manière plus nette, ces arbres ont été introduits et étudiés par M. Motzkin (voir [14], [15]) à partir de 1968, d'abord pour le complété des clôtures algébriques des corps p-adiques, ensuite sous l'hypothèse (pas explicitement formulée) que k est dénombrable. Il s'agissait toujours de E quasi-connexes.

§.7 Théorèmes Mittag-Leffleriens.

Soit $p \in k'$. Posons $U_p(X) = (X-p)^{-1}$ ou $= X$ selon que $p \neq \infty$ ou $p = \infty$. Soit $\sigma : X \longrightarrow X' = \frac{aX+b}{cX+d}$ $\left[\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \neq 0\right]$ une homographie non-singulière de k' et soit $p' = \sigma.p$. Un calcul simple montre que $U_p(X) = a(\sigma,p)\ U_{p'}(X') + b(\sigma,p)$, où $a(\sigma,p)$, $b(\sigma,p)$ sont $\in k$ et $a(\sigma,p) \neq 0$. Si une fraction rationnelle $f(X) \in k[X]$ a les pôles (distincts) $p_1,p_2,\dots,p_3$ (∞ est un pôle de f(X) si le degré de son numérateur dépasse celui de son dénominateur), on a $f(X) = c + \sum_i f_{p_i}(X)$, où c est une constante $\in k$ et $f_{p_i}(X)$, dit la <u>partie élémentaire</u> de f(X) pour p_i, est un polynôme sans terme constant à coefficients $\in k$ par rapport à $U_{p_i}(X)$. Si σ est l'homographie précédente $X \longrightarrow X'$ et si $p_i' = \sigma_i\, p_i$ $(i=1,2,\dots,3)$ et

$f'(X') = f'(\frac{aX+b}{cX+d}) = f(X)$, on a $f'(X') = c + \sum_i (f_{p_i})'(X')$ et $(f_{p_i})'(X')$ est un

polynôme en $U_{p_i}(X) = a(\sigma,p)U_{p'_i}(X') + b(\sigma,p)$, donc aussi en $U_{p'_i}(X')$ (bien qu'ayant éventuellement un terme constant $\neq 0$). Il en résulte que $f'_{p'_i}(X')$ diffère de $(f_{p_i})'(X')$ juste par une constante.

Soit $c \in k$. Alors, si $p \neq \infty$, $U_p(X) = [(X-c)-(p-c)]^{-1}$. Si $|x-c| < |p-c|$, on a $U_p(x) = \frac{-1}{p-c}(1-\frac{x-c}{p-c})^{-1} = \frac{-1}{p-c}\left[1 + \frac{x-c}{p-c} + (\frac{x-c}{p-c})^2 + \dots + (\frac{x-c}{p-c})^i + \dots\right]$ et $U_p(X)$ est égal, sur le cercle $C(c;d(p,c)^-)$ à la somme de la série de Taylor

$$\frac{-1}{p-c}\left[1 + \frac{X-c}{p-c} + (\frac{X-c}{p-c})^2 + \dots + (\frac{X-c}{p-c})^i + \dots\right],$$ dont le terme maximal y est le terme constant $(c-p)^{-1}$. Si $|x-c| > |p-c|$, on a

$$U_p(x) = \frac{1}{x-c}\left[1 + \frac{p-c}{x-c} + (\frac{p-c}{x-c})^2 + \dots + (\frac{p-c}{x-c})^i + \dots\right],$$ donc $U_p(X)$ est, sur la couronne $C(c;|p|^+,+\infty)$, égal à la série de Laurent principale

$$\frac{1}{X-c} + \frac{p-c}{(X-c)^2} + \dots + \frac{(p-c)^i}{(X-c)^{i+1}},$$ dont le terme maximal y est $\frac{1}{X-c}$. D'autre part, pour

$|X| < |p|$, $U_p(X) = (X-p)^{-1} = -p^{-1}\ (1-\frac{X}{p})^{-1} = -p^{-1}(1+\frac{X}{p} + (\frac{X}{p})^2+\ldots+(\frac{X}{p})^i +\ldots]$

est représentable par une série de Taylor en $X = U_\infty(X)$.

Soit f un élément analytique de k de support E, f_i une suite approximante de f, C un trou isolé de E et $c \in C$ (si $\infty \in C$, on pose $c = \infty$). Il existe un surcercle projectif propre D de C tel que la couronne circulaire $Q = D\,..C$ soit $\subseteq E$. Soient $p_{i,j}(1 \leq j \leq S_i)$ les pôles de f_i , et soit $c_i + \sum_j f_{i,j}(X)$ la représentation de f_i comme somme d'une constante c_i et de ses parties élémentaires $f_{i,j}(X)$ pour ses pôles respectifs $p_{i,j}$. Comme il n'y a aucun pôle de f_i dans Q, on a $p_j \in C$ ou $p_j \in \neg D = k'..D$. Posons $(f_i)_{pr} = \sum_{p_{i,j} \in C} f_{i,j}(X)$ et $(f_i)_{reg} =$ $= c_i + \sum_{p_{i,j} \notin C} f_{i,j}(X)$. Supposons $c \neq \infty$. Si $p_{i,j} \in C$, $U_{p_{i,j}}(X)$ se représente, sur $C(c; |p_{i,j} - c|^+ , +\infty)$ par une série de Laurent principale en X-c, et il en est de même, pour le polynôme $f_{i,j}(X)$ en $U_{p_{i,j}}(X)$ sans terme constant, et cette série converge en $x \in k'$ si $|x-c| > |p_{i,j} - c|$, et, en particulier, pour les $x \notin C$ (et, à fortiori, si $x \in Q$). Il en est de même pour $(f_i)_{pr} = \sum_{p_{i,j} \in C} f_{i,j}(X)$.

De même, si $p_{i,j} \notin C$, donc $p_{i,j} \in \neg D$, $U_{p_{i,j}}(X)$ et $f_{i,j}(X)$ se représentent par des séries de Taylor en X-c, qui convergent pour les $x \in k$ tels que $|x-c| < |p_{i,j}-c|$ et, en particulier, pour les $x \in D$ et, à fortiori, pour les $x \in Q$, et il en est de même pour $(f_i)_{reg} = c_i + \sum_{p_{i,j} \notin C} f_{i,j}(X)$. Donc f_i se représente sur Q par une série de Laurent $\sum_n c_{i,n}(X-c)^n$, dont $(f_i)_{pr}$ est la partie principale et $(f_i)_{reg}$ est la partie régulière et, par construcion, ces parties de f ne dépendent pas du choix de $c \in C$. En vertu des inégalités de Cauchy, pour tout $r \in \Gamma(k)$ tel que $S(c,r) \subseteq Q$, on a, pour tout n, $|c_{i,n}| r^n \leq M_i^{(c)}(r)$ et, en particulier, $M_{i,pr}^{(c)}(r) = M_{(f_i)_{pr}}^{(c)}(r)$ et $M_{i,reg}^{(c)}(r) = M_{(f_i)_{reg}}^{(c)}(r)$ sont $\leq M_i^{(c)}(r)$. Comme $(f_i - f_j)_{pr} = (f_i)_{pr} - (f_j)_{pr}$ et $(f_i - f_j)_{reg} = (f_i)_{reg} - (f_j)_{reg}$, on a, si l'on pose $M^{(c)}_{i,j,pr}(r) = M^{(c)}_{(f_i-f_j)_{pr}}(r)$, $M^{(c)}_{i,j,reg}(r) = M^{(c)}_{(f_i-f_j)_{reg}}(r)$, que, si

$i \geqslant i(\mathcal{E})$, $M^{(c)}_{i,i+1,pr}(r)$ et $M^{(c)}_{i+1,reg}(r)$ sont $\leqslant \mathcal{E}$ quand $S(c,r) \subseteq Q$. Donc, les suites $(f_i)_{pr}$ et $(f_i)_{reg}$ convergent uniformément sur Q vers les séries de Laurent principale $f_{pr} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant +\infty} a_n\, U_c(X)^n$ et régulière $f_{reg} = \sum_{-\infty \leqslant n \leqslant 0} a_n\, U_c(X)^n$ en X-c (où $a_n = \lim_i c_{i,-n}$), et ces séries ne dépendent pas du choix de la suite approximante f_i de f, ni leurs sommes de celui de $c \in C$, car ce sont les parties principales et régulières d'une série de Laurent en X-c représentant f sur Q, et cette représentation est unique, car, en vertu des inégalités de Cauchy, tous les termes d'une série de Laurent nulle sont nuls. La série f_{pr} s'appelle la <u>contribution</u> du trou isolé, C à f, et sera noté f_C ou $f_C(X)$. Un théorème analogue pour , $c = \infty$ se déduit du présent par une homographie convenable.

<u>Si</u> f(X) <u>est bornée sur</u> E <u>et si</u> $m(f) = \mathrm{Sup}_{x \in E} |f(x)|$, f_C <u>y est, également, bornée et on a</u> $m(f_C) \leqslant m(f)$. En effet, si $c \neq \infty$ et si ρ est le rayon intérieur de Q, $M^{(c)}_{f_C}(r)$ est définie pour $r \geqslant \rho$ et est, sur cet intervalle, une fonction décroissante de r. Ainsi f_C est bornée sur E si elle l'est sur Q et $\mathrm{Sup}_{x \in E} | f_C(x) | = \mathrm{Sup}_{x \in Q} | f_C(x)|$. La fonction f est bornée sur $Q \subseteq E$ et $\mathrm{Sup}_{x \in Q} | f(x)| \leqslant m(f)$. D'autre part, puisque, pour tout n et pour tout $x \in Q$, $| a_n\, U_c(x)^n | \leqslant \mathrm{Sup}_{y \in Q} | f(y)|$, on a $\mathrm{Sup}_{x \in Q} |f_C(x)| \leqslant \mathrm{Sup}_{x \in Q} | f(x)|$ et $m(f_C) \leqslant m(f)$. Si $c = \infty$, il faut remplacer, dans le raisonnement précédent, le rayon intérieur ρ de Q par son rayon extérieur $\mathcal{P}$.

Remarque : Soit $m_C(f_C) = \mathrm{Sup}_{x \notin C} | f_C(x) |$. Alors $m_C(f_C) = m(f_C)$ (évident).

Soient C un cercle projectif quelconque de k' et f une fraction rationnelle $\in k[X]$. Les p_j désignant les pôles distincts de f, on va poser $f_C = \sum_{p_j \in C} f^j_{p_j}(X)$. Visiblement, si $\mathcal{C}$ est un ensemble de cercles disjoints tels que tout pôle de f appartienne à un de ces cercles, on a $f = e + \sum_{C \in \mathcal{C}} f_C$, la somme précédente ayant un sens car il n'y a qu'un nombre fini des $C \in \mathcal{T}$ tels que $f_C \neq 0$. Soient f une fonction rationnelle, E un quasi-connexe, C un trou de E. Alors C ou bien est un cercle, ou bien le complémentaire d'un cercle $C^* = C(a,\rho)$ et sauf si $\rho = 0$ on peut supposer que a n'est pas un pôle de f. Si l'on suppose que f est bornée sur E, à n'est pas un pôle même si $\rho = 0$. Alors, on a le

<u>Lemme</u> : <u>Si</u> f <u>est bornée sur</u> E, <u>on a</u> $m(f) \geqslant M_f^{(a)}(r(\rho))$, <u>où</u> $r(\rho)$ <u>est la valeur réelle de</u> ρ .

<u>Démonstration</u>. Soit r un nombre réel tel que $r > \rho$, resp. $r < \rho$, selon que $C = C^*$ ou $C = k' \mathbin{..} C^*$. Alors il existe un r' tel que $r \geqslant r' > \rho$, resp. $r \leqslant r' < \rho$, tel que $S(a,r') \cap E \neq \emptyset$. Soit $u \in S(a,r') \cap E$. Il existe un $v \in E$ tel que $d(u,v) \geqslant r'$. En effet, dans le cas contraire, on aurait eu $E \subseteq C(u,r'^-)$ et $k' \mathbin{..} C(u,r'^-)$ aurait été un surcercle projectif propre de C, et C n'aurait pas été un trou de E. Mais alors, il existe un r", $r'' < r'$, aussi proche que l'on veut de r' et tel que $S(u,r'') \subseteq E$, ce qui implique $m(f) \geqslant M_f^{(u)}(r'')$ et, en faisant tendre r" vers r', $m(f) \geqslant M_f^{(u)}(r')$. Comme $d(a,u) = r'$, on a $M_f^{(u)}(r') = M_f^{(a)}(r')$. Comme on peut prendre r' aussi proche que l'on veut de $r(\rho)$, on a, par passage à la limite $r' \longrightarrow r(\rho)$, $m(f) \geqslant M_f^{(a)}(r(\rho))$.

<u>Lemme</u>. <u>Si</u> C <u>est un trou de</u> E <u>ou un "trou ouvert" de</u> E, <u>c'est-à-dire le sous-cercle projectif non-circonférencié maximal d'un trou</u> C <u>de</u> E, <u>on a</u>

$$m(f_C) \leqslant m(f).$$

<u>Démonstration</u>. Supposons, d'abord, que C est un trou. Alors, on a $m(f_C) \geqslant M_{f_C}^{(a)}(r(\rho))$. Mais f_C n'a pas de pôles en dehors de C, ce qui implique, pour tout $x \notin C$, $|f_C(x)| \leqslant M_{f_C}^{(a)}(d(x,a)) \leqslant M_{f_C}^{(a)} r(\rho)$, donc $m(f_C) = M_{f_C}^{(a)}(r(\rho))$. D'autre part, il existe un r aussi proche que l'on veut de $r(\rho)$ (ou $= r(\rho)$) tel que $S(a,r) \subseteq E$ et que $C \subseteq C(a,r^-)$ ou $C \subseteq k' \mathbin{..} C(a,r)$. Alors, $f_C(X)$ est ou bien la partie principale, ou bien la partie régulière sans terme constant de la série de Laurent en X-a, qui représente f(X) sur S(a,r), d'où résulte $M_{f_C}^{(a)}(r) \leqslant M_f^{(a)}(r)$ et, par passage à la limite $r \longrightarrow r(\rho)$, $m(f_C) = M_{f_C}^{(a)}(r(\rho)) \leqslant M_f^{(a)}(r(\rho)) \leqslant m(f)$.

Supposons que C est le sous-cercle projectif non circonférencié maximal d'un trou circonférencié $\tilde{C}$. Supposons d'abord $\tilde{C} = C(a,\tilde{r})$, où $a \in C$. Il existe une couronne $Q = C(a,\bar{r}^{+},\tilde{r}^{-}) \subseteq C$ ne contenant aucun pôle de f, et f_C est la partie principale du développement de f en série de Laurent en X-a, qui converge dans Q. On a donc $M^{(a)}_{f_C}(r) \leqslant M^{(a)}_{f}(r)$ si $\bar{r} < r < \tilde{r}$, d'où, par passage à la limite

$r \longrightarrow \tilde{r}$, $m(f_C) = M^{(a)}_{f_C}(\tilde{r}) \leqslant M^{(a)}_{f}(\tilde{r}) \leqslant m(f)$.

Soit C un sous-cercle projectif d'un trou de E et soit (f_n) une suite approximante d'un élément analytique f de support E. Alors, si la suite (f_n) converge uniformément sur k' ... C, sa limite est une série de Laurent principale f_C en $U_c(X)^{-1} = X-c$, où $c \in C$, [si $\infty \in C$, on pose $c = \infty$ et $U_\infty(X) = X$], qui converge en dehors de C et qui sera dite la <u>contribution</u> de C à f.

Soient $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_p$ la partie réductible et la partie parfaite de l'ensemble des trous de E. Alors, j'ai prouvé <u>le premier théorème Mittag-Lefflerien</u>. Si $C \in \mathcal{T}_r$, f_C existe, ne dépend pas du choix de (f_n) et si f est bornée sur E, f_C l'est aussi, et on a $m(f_C) \leqslant m(f)$. La série $f^{(r)} = \sum_{C \in \mathcal{T}_r} f_C$ [même considérée comme la somme de tous les termes de toutes les f_C, $C \in \mathcal{T}_r$] converge uniformément sur E (et, même sur $E \cup \left[\bigcup_{C \in \mathcal{T}_p} C\right]$). Si f est bornée sur R, $f^{(r)}$ et $f^{(p)} = f - f^{(r)}$ le sont aussi, et on a $m(f^{(r)}) \leqslant m(f)$ et $m(f^{(p)}) \leqslant m(f)$. Si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_r$,

$f_{\mathcal{T}'} = \sum_{C \in \mathcal{T}'} f_C$ est un élément analytique sur $E \cup \left[\bigcup_{C \in \mathcal{T} .. \mathcal{T}'} C\right]$, et $f - f_{\mathcal{T}'}$ se prolonge en un élément analytique sur

$$E \cup \left[\bigcup_{C \in \mathcal{T}'} C\right].$$

Il résulte de ce théorème que le prolongement analytique de f se réduit à celui de $f^{(p)}$ et des f_C, $C \in \mathcal{T}^{(r)}$.

D'autre part, soit C^* un cercle circonférencié d'un certain rayon $r^* > 0$ et $T(C^*)$ l'ensemble des cercles $C \subset C^*$ de rayon r^{*-}. Alors, on a <u>le deuxième théorème Mittag-Lefflerien</u>. Si f est un élément analytique régulier, dont le support contient k .. C^* et n'est pas disjoint avec C^*, f_C est défini et ne dépend pas du choix de la suite approximente de f. On a $m(f_C) \leqslant m(f)$, il n'y a qu'un ensemble au plus denombrable T' des $C \in T(C^*)$ tels que $f_C \neq 0$ et $\sum_{C \in T(C^*)} f_C = \sum_{C \in T'} f_C$

converge uniformément sur $E \cup [\bigcup_{C' \in T(C)\ldots T'} C']$, sa somme étant $=f$ sur E.

Mais ces deux théorèmes se trouvent être des cas particuliers du théorème suivant démontré par Robba.

Théorème. Si f est un élément analytique de support [19] E, f_C est définie pour tout trou ouvert C de E, ne dépend pas du choix de la suite approximente (f_n) de f et si f est borné sur E, $m(f_c) \leqslant m(f)$. L'ensemble des trous ouverts c de E tels que $f_c \neq 0$ est au plus dénombrable si $f^* = \sum_C f_C$, où C parcourt tous les trous ouverts de E, converge uniformément sur E et $f - f^*$ est une constante.

Démonstration. Soit C un trou ouvert, dont soit ρ le rayon (donc $\rho = 0$ ou $\rho = r^-$, où $r > 0$). Si (f_n) est une suite approximante de f et si $n \geqslant n(\mathcal{E})$, on a $m((f_n - f_{n+1})_C) \leqslant m(f_n - f_{n+1}) \leqslant \mathcal{E}$, donc $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \mathcal{E}$ partout sur E. Or, si $\infty \notin C$, il existe, pour tout r' réel tel que $\rho < r' \leqslant d(E)$ un r" réel tel que $\rho < r'' \leqslant r'$ tel que, si $c \in C$, $S(c,r'') \subseteq E$ (démonstration facile). Donc, si $n \geqslant n(\mathcal{E})$, on a $M^{(c)}_{(f_n - f_{n+1})}(r'') \leqslant m((f_n - f_{n+1})_C) \leqslant \mathcal{E}$. Mais $(f_n - f_{n+1})_C$ étant une série de Laurent principale en X-c, $M^{(c)}_{(f_n - f_{n+1})}(r)$ est une fonction décroissante de $r > \rho$, ce qui montre que cette fonction est $\leqslant \mathcal{E}$ pour tout $r > \rho$ quand $n \geqslant n(\mathcal{E})$. Par suite, la suite $(f_n)_C$ converge uniformément en dehors de C, et sa limite f_C est, en vertu du théorème de Weierstrass, une série de Laurent principale en X-c (si $\infty \in C$, auquel cas il faut prendre $c = \infty$, un raisonnement convenablement modifié montre que $f_C = \lim_n (f_n)_C$ existe et est une série de Taylor en X sans terme constant). On a $f_C \neq 0$ seulement si quelque $(f_n)_C \neq 0$, autrement dit s'il existe un pôle p de quelque f_n tel que $p \in C$, et on a et ne peut avoir $m(f_C) > \mathcal{E}$ que s'il existe un tel pole de $f_{n(\mathcal{E})}$. Ainsi, l'ensemble des trous ouverts C de E tels que $f_C \neq 0$ est au plus dénombrable, et celui des C tels que $m(f_C) > \mathcal{E} > 0$ est fini. Donc $f^* = \sum_C f_C$, où la somme est étendue à tous les trous ouverts de E, est définie et converge uniformément sur E. En plus, on a $f^* = \lim f_n^*$, où $f_n^* = \sum_C (f_n)_C$ et $f_n - f_n^*$ est une constante $a_n \in k$, où $|a_n - a_{n+1}| \leqslant m(f_n - f_{n+1})$, donc est $\leqslant \mathcal{E}$ si

(19) Ce théorème est, d'ailleurs, démontré par Robba pas seulement pour les supports E quasi-connexes, mais pour n'importe quel E analytique (voir [17], p.122)

si $n \geqslant n(\varepsilon)$. On a donc $f - f^{*} = \lim_n (f_n - f_n^{*}) = \lim_n a_n = a \in k$. Si (f'_n), est une autre suite approximente de f, $(f_n - f'_n)$ en est une de 0, donc, pour $n \geqslant n(\varepsilon)$, on a $m((f_n)_C - (f'_n)_C) \leqslant \varepsilon$ et $f'_C = \lim (f'_n)_C = \lim (f_n)_C = f_C$.

Le théorème de Robba donne la description complète des éléments analytiques, ce qui n'est pas tout-à-fait le cas pour mes deux théorèmes Mittag-Leffleriens. En effet, si E est un ensemble quasi-connexe, et si, dans l'ensemble de ses trous ouverts on choisit arbitrairement un sous-ensemble fini ou dénombrable T' et à chaque $C \in T'$ on fait correspondre une série de Laurent dans k principale f_C d'un centre $c \in C$ (où, si $\infty \in C$, il y a lieu de prendre $c = \infty$ et de remplacer X-c par X^{-1}) avec la condition que, m_C désignant le suprémum de $f_C(x)$ en dehors de C, que m_C tende vers 0^{+} quand T' est infini, $f = a + \sum_C f_C$, ou a est une constante arbitraire $\in k$, est un élément analytique sur E tel que la contribution d'un trou ouvert C de E à cet élément soit f_C ou 0 selon que $C \in T'$ ou $C \notin T'$. Et, en vertu du théorème de Robba, tout élément analytique de support E a cette forme.

Par contre, en ce qui concerne les singularités et la description globale des fonctions analytiques, le théorème de Robba ne semble apporter guère plus, sauf dans des cas particuliers, que les deux théorèmes Mittag-Leffleriens. Il est, bien entendu, exclu qu'une fonction analytique puisse toujours se représenter (dans tout son domaine d'existence) comme une somme uniformément convergente d'une constante et d'un ensemble au plus dénombrable de séries de Laurent principales de divers centres (car elle serait alors un élément analytique), ou même par une telle somme simplement convergente, comme le montre, dans le cas aussi simple que celui des fonctions méromorphes dans un cercle non-circonférencié (pouvant être le corps $k = C(0,+\infty^{-})$ lui-même), le théorème suivant de Michel Lazard [20] :

C étant un cercle non-circonférencié d'un corps valué k, qui est algébriquement clos et maximalement complet, soit $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ une suite dénombrable quelconque de points distincts de C telle que la distance de ces points tende vers le diamètre d(C) de C. Soit, pour tout i, f_i un polynome en $(X-p_i)^{-1}$ sans terme constant, les polynômes f_i pouvant être choisis tout-à-fait indépendemment. Alors, il existe une fonction f (à valeurs dans k) méromorphe sur C, dont les p_i sont les seuls pôles, et qui est telle que f_i soit la partie principale du developpement de Laurent de f autour de $p_i (i=1,2,\ldots)$.

---

(20) Voir M. Lazard [13]

Pour qu'une telle fonction, définie sur C .. $\{p_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ puisse se représenter comme séries de Laurent de différents centres, il faut que cette somme soit de la forme $f_\infty + \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i$, où f_∞ est une série de Taylor en X, qui converge dans C (en supposant, ce qui n'est pas restrictif, que $0 \in C$). Mais les f_i étant des polynômes en $(X-p_i)^{-1}$ sans termes constants tout-à-fait arbitraires, on peut les choisir de manière que $\sum_i f_i$ diverge partout sur E ! Ce théorème montre combien est grande la différence entre les éléments et les fonctions analytiques.

Le théorème de Robba permet de prouver simplement le théorème déjà mentionné [qui a été énoncé par moi-même dans [10], p. 126 ; mais ma démonstration (non publiée) était compliquée] que la superposition de deux éléments analytiques, qui se prolongent (et, plus généralement, d'une famille finie cohérente d'éléments analytiques, dont les supports forment une famille enchainée) est un élément analytique.

Démonstration. Soient f',f'' les deux éléments analytiques en question, E',E'' leurs supports, $\bar{E} = E' \cap E''$, $E = E' \cup E''$, f la superposition des f',f'', (f'_n), $f''_n)$ des suites approximantes des f',f'' respectivement. Soient $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$ les ensembles des trous C' de E' qui sont contenus (au sens large) dans quelque trou C" de E", resp. contiennent (au sens large) quelque trou C" de E" ou sont disjoints avec tout trou de E" (autrement dit, sont $\subsetneq E''$). Soient $\mathcal{C}''_1$, $\mathcal{C}''_2$ des ensembles analogues de trous de E". Alors $\mathcal{C}(E') = \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2$,
$\mathcal{C}(E'') = \mathcal{C}''_1 \cup \mathcal{C}''_2$, $\mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}''_1 \cap \mathcal{C}''_2$ est l'ensemble des trous communs des E', E", $\mathcal{C}(\bar{E}) = \mathcal{C}'_2 \cup \mathcal{C}''_2$, $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}''_1$. Comme $f' = f''$ sur $\bar{E}$, c'est, sur cet ensemble, un élément analytique $\bar{f}$ dont (f'_n) et (f''_n) sont toutes les deux des suites approximantes. Ainsi, si $\bar{C}$ est un trou de $\bar{E}$, $(f'_n)_{\bar{C}}$ et $(f''_n)_{\bar{C}}$ tendent vers une même limite $\bar{f}_C$.

En particulier, si $\bar{C} \in \mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}''_1 \cap \mathcal{C}''_2$, on a $\bar{f}_{\bar{C}} = f'_{\bar{C}} = f''_{\bar{C}}$. Si $\bar{C} \in \mathcal{C}'_1$ et $\bar{C} \subsetneq E''$, on a, pour tout n, $(f''_n)_{\bar{C}} = 0$, donc $\bar{f}_C = 0$. Et si $\bar{C} \in \mathcal{C}'_1$ et $\bar{C} \not\subseteq E''$, on a, $(f''_n)_C = \sum_{C'' \in \mathcal{C}''_1\ ,\ C'' \subseteq \bar{C}} (f''_n)_{C''}$, donc $\bar{f}_{\bar{C}} = \sum_{C'' \in \mathcal{C}''_1\ ,\ C'' \subseteq \bar{C}} f''_{C''}$.
En échangeant les rôles de f',f'', on a des égalités analogues pour les $\bar{C} \in \mathcal{C}''_2$.

On a, sur E' , $f' = \sum_{C' \in \mathcal{C}'_1} f'_{C'} + \sum_{C' \in \overline{\mathcal{C}'_2} \ldots \mathcal{C}'_1} f'_{C'}$. Or, si $C' \in \mathcal{C}'_2 \ldots \mathcal{C}'_1$

est $\subsetneq$ E", on a $f'_{C'}=0$. Si un tel C' est $\not\subset$ E", $f'_{C'} = \bar{f}'_{C'}$ est égal à $\sum f''_{C''}$, où C" parcourt les trous de E" contenus dans C', et quand C' parcourt $\mathcal{T}'_2 \ldots \mathcal{T}'_1$, les C", qui y sont contenus, parcourent visiblement $\mathcal{T}''_1 \ldots \mathcal{T}'_1$. Ainsi, on a $f' = \sum_{C'\in\mathcal{T}'_1} f'_{C'} + \sum_{C''\in\mathcal{T}''_1 \ldots \mathcal{T}'_1} f''_{C''} = \sum_{C'\in\mathcal{T}'_1 \ldots \mathcal{T}''_1} f'_{C'} + \sum_{C''\in\mathcal{T}''_1} f''_{C''}$. Il en est de même pour f" sur E". Ainsi f est égal aussi à ces sommes aussi bien sur E' que sur E". D'autre part, $\sum_{C'\in\mathcal{T}'_1} f'_{C'}$ converge uniforément partout en dehors de $\bigcup_{C\in\mathcal{T}'_1} C'$, donc, en particulier sur E, et il en est de même pour des raison analogues, pour $\sum_{C''\in\mathcal{T}''_1} f''_{C''}$. Par suite, f est un élément analytique sur E.

Soit (f_n) une suite de fractions rationnelles, qui converge uniformément sur un ensemble quasi-connexe E, et soit $n(\mathcal{E})$ une fonction à valeurs entières $\geqslant 0$ définie sur $[0^+,+\infty^-]_{\mathbb{R}^0}$ telle que $n \geqslant n(\mathcal{E})$ implique $|f_n(x) - f_{n+1}(x)|\leqslant\mathcal{E}$ pour tout $x \in E$. Considérons la famille de tous les ensembles quasi-connexes E' de k' non disjoints avec E et tels que, pour la suite (f_n) considérée, toutes les f_n soient définies et les mêmes inégalités aient lieu pour tout $x \in E'$. On a vu qu'il existe, pour toute suite (f_n) et toute fonction $n(\mathcal{E})$ de cette forme, des $E' \supseteq E$ réguliers appartenant à la famille. La famille considérée est enchaînée et sa réunion, qui est aussi la réunion de ces ensembles réguliers, est encore un ensemble (donc le plus grand ensemble) de la famille, qui sera dit la $((f_n),n(\mathcal{E}))$-<u>fermeture</u> de E. Cet ensemble est, évidemment, quasi-connexe régulier. On dit que E est $((f_n),n(\mathcal{E}))$-<u>fermé</u> s'il est égal à sa $((f_n),n(\mathcal{E}))$-fermeture, et on dit qu'il est extrémal s'il est $((f_n),n(\mathcal{E}))$-fermé pour quelque couple $((f_n),n(\mathcal{E}))$, qui en sera dit un couple extrêmalisant (Remarque : un même couple peut être extrêmalisant pour plusieurs ensembles quasi-connexes extrêmaux, forcément disjoints). La $((f_n),n(\mathcal{E}))$-fermeture d'un quasi-connexe E est $((f_n),n(\mathcal{E}))$-fermée (démonstration facile).

Un ensemble quasi-connexe extrêmal est régulier, mais pas tout quasi-connexe régulier E est extrêmal. Pour qu'il le soit, il faut et il suffit que :

1 - E n'ait qu'un nombre fini de trous ponctuels ;

2 - si le cardinal du corps résiduel $\bar{k}$ de k est plus grand que la puissance du

dénombrable, tout trou non-ponctuel de E est non-circonférencié. Je vais donner ailleurs la démonstration de ce théorème.

Il résulte de ce théorème que si $\bar{k}$ est plus que dénombrable et le quasi-connexe E est extrêmal, les trous ouverts de E en sont des trous tout court. Ainsi, la notion de trou ouvert apparait comme un artifice, d'ailleurs, ingénieux, pour "decoller" les "veritables" trous collés ensemble en trous plus grands, soit parce que le quasi-connexe n'est pas assez grand (n'est pas extrêmal), soit parce que le corps résiduel $\bar{k}$ du corps k, où cet ensemble est considéré, est trop étroit. Mais cet artifice est inefficace quand on passe des éléments analytiques aux fonctions analytiques. L'ensemble d'analyticité d'une fonction analytique peut parfaitement avoir des trous circonférenciés non ponctuels (et même une infinité de trous ou de trous ponctuels), comme le montre l'exemple aussi simple qu'une série de Taylor, qui converge dans $C(0,1^-)$ et est telle que $M_f(r) \longrightarrow +\infty^-$ quand $r \longrightarrow 1^-$ (telle que par exemple, $\operatorname{Log}(1+X) = \frac{X}{1} - \frac{X^2}{2} + \ldots$ si k est hétérolypique). Si l'on veut séparer vraiment les singularités de telles fonctions on doit distinguer les trous vraiment circonférenciés de ceux, qui ne le sont qu'en apparence et sont constitués par une réunion de "vrais" trous non-circonférenciés que seule l'étroitesse de k agglomère en un cercle plus grand.

§.8 Théorème de singularité au bord. Analyse des singularités des fonctions analytiques.

Nous allons supposer que k est algébriquement clos et maximalement complet. Soit f une série de Taylor, dont soit $C = C(0,\rho)$ le cercle de convergence, supposé non vide et non ponctuel ($\rho > 0^+$). Alors, on a le

Théorème de singularité au bord (21). Ou bien f n'est pas prolongeable en dehors de C, ou bien C est non-circonférencié et il existe, sur sa circonférence $S(0,r(\rho))$, un point où f n'est pas prolongeable.

Démonstration. Supposons d'abord C circonférencié, donc ρ réel. Alors f converge uniformément sur C, donc est un élément analytique. Supposons qu'il existe un élément analytique f', qui prolonge f en dehors de C et soit E' son support. Comme $C \cap E' \neq \emptyset$, il existe un $a \in C \cap E'$, et comme $E' \not\subseteq C$, il existe un $b \in E' \ldots C$. On a $d(a,b) > \rho$. Il n'existe donc, pour E', qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles $d(a,b)$. Soit $\bar{r}$ la plus petite de ces valeurs exceptionnelles, qui est

(21) Une esquisse de démonstration sommaire a été donnée dans Krasner [9]

$> \rho$ ou, si de telles valeurs exceptionnelles n'existent pas, $\bar{r} = d(a,b)$. On a $C \cup E' \supseteq C(0,\rho) \cup C(a,\rho^+,\bar{r}^-) = C(a,\rho) \cup C(a,\rho^+,\bar{r}^-) = C(a,\bar{r}^-) = C(0,\bar{r}^-)$.

La superposition des f et f' est un élément analytique sur $C \cup E'$, donc, à fortiori, sur $C(0,\bar{r}^-)$. Par suite [1er théorème Mittag-Lefflerien appliqué au trou isolé $k' .. C(0,r^-)$] , il s'y représente par une série de Taylor en X, qui, en vertu du théorème d'unicité pour les séries de Taylor, coïncide avec f, et f converge en dehors de C, ce qui est absurde. Il est à remarquer que cette partie du théorème, qui dit qu'une série de Taylor, dont le cercle de convergence est circonférencié, n'est pas prolongeable en dehors de ce cercle, ne suppose pas que k soit maximalement complet, mais seulement qu'il est complet.

Supposons que C ne soit pas circonférencié, donc $\rho = r^-$, où $r \in \underline{\mathcal{R}}$, et soit $S : S(0,r)$ sa circonférence. Effectuons le changement de variable $X' = X^{-1}$. Alors $f(X)$ devient une série de Laurent $f'(X')$ en X', qui converge en dehors du cercle $C' = C(0,r')$, $r' = r^{-1}$. L'image de S est la circonférence $S' = S(0,r')$. Si $a \in C'$, f se représente par une série de Laurent principale $f'^{(a)}(X'-a)$ en $X'-a$, qui converge certainement en dehors de $C' = C(0,r') = C(a,r')$, mais peut-être en dehors d'un cercle plus petit C'_a de centre a[22]. Il est clair que si $b \in C'_a$, on a $C'_b \subseteq C'_a$. Il n'est pas possible que pour $a,b \in C'$ on ait $C'_a \cap C'_b = \emptyset$. En effet, il existe, dans ce cas, des cercles non-circonférenciés C''_a , C''_b tels que $C''_a \supseteq C'_a$, $C''_b \supseteq C'_b$ et $C''_a \cap C''_b = \emptyset$: Si, par exemple, C'_a est circonférencié, on a $d(C'_a , C'_b) > d(C'_a)$ et si $r'' \in \Gamma(k)$ est tel que $d(C'_a) < r'' < d(C'_a , C'_b)$,

$C''_a = C(a,r'') \supset C'_a$ et $C''_a \cap C''_b \neq \emptyset$. Si C'_b est circonférencié, on montre, par le même raisonnement appliqué aux cercles C'_b , C''_a , qu'il existe un cercle non circonférencié $C''_b \supset C'_b$ tel que $C''_a \cap C''_b = \emptyset$. Ceci posé, $f'^{(a)}$ est un élément analytique en dehors de C''_a et $f'^{(b)}$ l'est en dehors de C''_b. Ces éléments analytiques coïncident en dehors de $C' \supseteq C'_a \cup C'_b$, donc se prolongent, et leur superposition (qui coïncide avec f' en dehors de C') est un élément analytique sur $(k'..C''_a) \cup (k'..C''_b) = k'..(C''_a \cap C''_b) = k'$, donc, f' converge partout sur k' et $C' = \emptyset$ ce qui est absurde. Ainsi, les C'_a forment une famille de cercles emboités et, puisque k est maximalement complet, $D_0 = \bigcap_{a \in C'} C'_a$ n'est pas vide. Soit $a_0 \in D_0$. Quel que soit $a \in C'$, on a $a_0 \in C'_a$, donc $C'_{a_0} \subseteq C'_a$ et $f'^{(a_0)}$ converge en dehors de tout

(22) Cette possibilité a été déjà remarquée par W. Schöbe. Voir la fin de son travail [19].

C'_a , donc en dehors de $D'_o = \bigcap_{a \in C'} C'_a$. On a donc $C'_{a_o} \subseteq D'_o$, et, puisque on a trivialement $C'_{a_o} \supseteq D'_o$, on a $C'_{a_o} = D'_o$. Le cercle D'_o sera dit le <u>cercle minimal</u> de non-convergence de f', et soit r'_o son diamètre. Si D' est un surcercle non-circonférencié quelconque de D'_o , $f'_o = f'^{(a_o)}$ est un élément analytique sur k' .. D' (et, en particulier, sur k' .. D'_o si D'_o est non-circonférencié), mais il peut ne pas l'être sur k'... D'_o auquel cas r'_o est réel. S'il en est ainsi, il n'est pas prolongeable dans D'_o (c'est-à-dire à aucune partie de D'_o). En effet, supposons qu'un élément analytique f" de support E" effectue un tel prolongement, et soient $a \in E'' \cap D'_o$, $b \in E'' \ldots D'_o$. Alors $d(a,b) > r'_o$. Soit $\bar{r}$ la plus petite valeur exceptionnelle de E" telle que $r'_o < \bar{r} \leq d(a,b)$, quand il existe de telles valeurs dans l'intervalle $]r'_o, d(a,b)]$, ou $\bar{r} = d(a,b)$, quand de telles valeurs exceptionnels n'existent pas. On a $C(a_o; r'^+_o, \bar{r}^-) = C(a; r'^+_o, \bar{r}^-) \subseteq E'$, et f" est un élément analytique sur cette couronne et y coïncide avec f'_o. Soit r" un nombre réel tel que $r'_o < r'' < \bar{r}$. Alors, la restriction f'^*_o de f'_o à $k'..C(a_o, r''^-)$ est un élément analytique, qui prolonge f". Ainsi, la superposition de f'^*_o et de f" est un élément analytique sur $[k'..C(a_o, r''^-)] \cup E'' \supseteq [k'..C(a_o, r''^-)] \cup C(a_o; r'^+_o, \bar{r}^-) = [k'..C(a_o, r''^-)] \cup [C(a_o, \bar{r}^-) \ldots C(a_o, r'_o)] = [k' \cup C(a_o, \bar{r}^-)] .. [C(a_o, r''^-) \cap C(a_o, r'_o)) = k'..C(a_o, r'_o) = k'..D'_o$, contre l'hypothèse car cette superposition est f'_o .

Ainsi, si D'_o est non-circonférencié ou si f'_o n'est pas un élément analytique en dehors de k' .. D'_o , f' n'est pas prolongeable dans D'_o . Supposons que f' n'est pas prolongeable dans D'_o donc f n'est pas prolongeable dans l'image D_o de D'_o par la transformation $X = X'^{-1}$. Si alors $D'_o = C'$, cela signifie que f n'est pas prolongeable en dehors de C. Si $D'_o = C(a'_o, r'_o) \neq C'$, donc $r'_o < r'$, f' est certainement convergente en dehors du plus petit cercle de centre O contenant D'_o , ce qui montre que ce cercle est $C' = C(0,r')$. Il en résulte que $0 \notin D'_o$ et que le cercle précédent est $C(0,d(0,a'_o)) = C(0, |a'_o|)$, donc $|a'_o| = r'$, donc $a'_o \in S' = S(0,r')$ et $D'_o \subseteq S'$, ce qui implique que $D \subseteq S$ et il y a des points de S où f n'est pas prolongeable.

Supposons maintenant que f'_o est prolongeable dans D'_o , ce qui implique que D'_o est circonférencié et que f'_o est un élément analytique sur k' .. D'_o . En vertu du théorème de Robba (et aussi, en vertu de mon deuxième théorème Mittag-Lefflerien, on peut toujours se placer dans un corps k dont le corps résiduel $\bar{k}$ est plus que dénombrable et supposer que le prolongement de f'_o dans D'_o est effectué par un élément analytique régulier), on a $f'_o = \sum (f'_o)_{C''}$, où C" parcourt l'ensemble $T(D'_o)$ des sous-cercles C" de D'_o de rayon r'^-_o . Il y a au moins deux cercles

$C'' \in T(D'_o)$ tels que $(f'_o)_{C''} \neq 0$, car s'il n'y en avait qu'un seul, soit $\bar{C}''$, on aurait eu $f'_o = (f'_o)_{\bar{C}''}$, donc, si $c'' \in \bar{C}''$, $f'^{(c'')} = f'^{(c'')}_o = (f'_o)_{\bar{C}''}$ en dehors de C', ce qui impliquerait $C'_{c''} \subseteq \bar{C}'' \subset D'_o$, ce qui est absurde. Il existe donc un $\bar{C}'' \in T(D'_o)$ tel que $(f'_o)_{\bar{C}''} \neq 0$ et tel que $\bar{C}'' \neq C(0,r'^-_o)$. Si $D'_o = C'$, ceci implique $\bar{C}'' \subseteq S'$ et si $D'_o \neq C'$, donc $D'_o \subseteq S'$, on a encore $\bar{C}'' \subseteq S'$. $f'^*_o = \sum_{C'' \in T(D'_o) \,..\, \{\bar{C}''\}} (f'_o)_{C''}$ converge uniformément sur $\bar{C}''$, donc y est un élément analytique. Donc f'_o est prolongeable à quelque $a \in \bar{C}''$ si, et seulement si, $(f'_o)_{\bar{C}''} = f'_o - f'^*_o$ l'est et, pour démontrer le théorème, il suffit de prouver l'existence d'un $a \in \bar{C}''$, où $(f'_o)_{\bar{C}''}$ n'est pas prolongeable.

Soit $f'_1 = (f'_o)_{\bar{C}''}$ et soit $c'' \in \bar{C}''$. f'_1 est donc une série de Laurent en $X' - c''$, qui converge en dehors $\bar{C}''$. Le raisonnement précédent appliqué à f'_1 montre qu'il existe le cercle minimal D'_1 de sa non-convergence. Si f'_1 n'est pas prolongeable dans D'_1, le théorème est prouvé. Sinon, D'_1 est circonférencié, f'_1 est un élément analytique en dehors de D'_1 et il existe $\bar{C}'' \in T(D'_1)$ tel que $(f'_1)_{\bar{C}''} \neq 0$. $f'_1 - (f'_1)_{\bar{C}''}$ se prolonge en un élément analytique f'^*_1, dont le support contient c''. Ainsi, si l'on pose $f'_2 = (f'_1)_{\bar{C}''}$, on a, sur $k' \,..\, C'$, $f' = f'^*_o + f'^*_1 + f'_2$ et f' se prolonge à un $a \in C''$ si, et seulement si f'_2 s'y prolonge. Donc, si D'_2 est le plus petit cercle de non-convergence de f'_2, le théorème est prouvé si f'_2 n'est pas prolongeable dans D'_2, et, dans le cas contraire, on peut appliquer le même procédé à cette série de Laurent, qui converge en dehors de D'_2. Finalement, si f se prolonge en dehors de C, on peut construire les suites finies ou dénombrables

$$C' = C'_o\,,\ C'_1\,,\ C'_2\,,\dots,\ C'_n\,,\ \dots$$

$$D'_o\,,\ D'_1\,,\ D'_2\,,\dots,\ D'_n\,,\ \dots$$

$$f'_o\,,\ f'_1\,,\ f'_2\,,\dots,\ f'_n\,,\dots \qquad\qquad (0 \leqslant n < M \leqslant +\infty)$$

$$f'^*_o,\ f'^*_1,\ f'^*_2,\dots,\ f'^*_{n-1}\,,\dots$$

telles que 1°) $C'_n \supseteq D'_n$; 2°) Si $0 \leqslant n < M$, D'_{n-1} est un cercle circonférencié et $C'_n \in T(D'_{n-1})$, 3°) $f'_o = f'$ sur $k \,..\, C'$; 4°) f'_n est une série de Laurent principale, dont D'_n est le cercle minimal de non-convergence; 5°) f^*_{n-1} est un élément analytique sur $(k' \,..\, D'_{n-1}) \cup C'_n$ et $f_{n-1} = f^*_{n-1} + f_n$ sur $k' \,..\, D'_{n-1}$; 6°) Si $M < +\infty$, et si $N = M-1$, f'_N ne se prolonge pas dans D'_N ; 7°) Si $M = 1$, $D'_o \subseteq S'$, si $M > 1$, $D'_o \subset S'$

(donc, si $n \geqslant \mathrm{Min}(1,M-1)$, on a $D'_n \subset S'$).

De ces conditions résulte que $f' = f'^*_0 + f'^*_1 + \ldots + f'^*_{n-1} + f'_n$ sur $k' \,..\, C'$ et que $f'_0 + f'^*_1 + \ldots + f'^*_{n-1}$ est un élément analytique sur $C'_1 \cap C'_2 \cap \ldots \cap C'_n = C'_n$, donc f' se prolonge à un $a \in C'_n$ si et seulement si f'_n s'y prolonge. Donc, si $M < +\infty$, f' ne se prolonge pas dans $D'_N \subset S'$ ce qui prouve le théorème.

Supposons donc que $M = +\infty$ et posons $D' = \bigcap_n D'_n$. Puisque k est maximalement complet, $D' \neq \emptyset$. C'est un cercle circonférencié d'un certain diamètre d'. Notons r'_n le diamètre du cercle (également circonférencié) D_n. Visiblement, r'_n tend vers d'^+ quand $n \longrightarrow +\infty^-$. Supposons que f' est prolongeable dans D et soient f'' un élément analytique effectuant ce prolongement et E'' son support. Alors $E'' \cap D \neq \emptyset$ et $E'' \not\subseteq D$. Soient $a \in E'' \cap D$ et $b \in E'' \,...\, D$, ce qui implique $d(a,b) > d'$. Soit $\bar{r}$ la plus petite valeur exceptionnelle de E'' telle que $d' < \bar{r} \leqslant d(a,b)$ s'il existe de telles valeurs exceptionnelles, sinon on posera $\bar{r} = d(a,b)$. Il existe un n tel que $r_n < \bar{r}$ et on a, en plus, $r_n > d'$. On a donc $E'' \supset C(a;d'^+,\bar{r}^-)$. Comme $f'^*_0 + f'^*_1 + \ldots + f'^*_{n-1}$ est un élément analytique sur $C'_n = C(a,r_{n-1})$ (en effet, $a \in D \subset D_n \subseteq C'_n$), $f'' - (f'^*_0 + \ldots + f'_{n-1})$ en est un sur

$C(a,d'^+,\bar{r}^-) \cap C(a,r^-_{n-1}) = C(a,d'^+,\mathrm{Min}(r_{n-1},r)^-)$. L'élément analytique f'' en est un de la fonction analytique définie par f, donc $f'' - (f'^*_1 + f'^*_2 + \ldots + f'^*_{n-1})$ en est un de la fonction analytique définie par $f' - (f'^*_0 + f'^*_1 + \ldots + f'^*_{n-1})$, considérée comme un élément analytique de support $k' \,...\, C'$. Mais cette dernière fonction est la restriction à $k' \,...\, C'$ de f'_n, et le support $k' \,...\, D'_n = k' \,..\, C(a,r_n)$ de f'_n n'est pas disjoint avec la couronne $C(a,d'^+,\mathrm{Min}(r_{n-1},\bar{r})^-)$ contenue dans le support de $f'' - (f'^*_0 + f'^*_1 + \ldots + f'^*_{n-1})$. En vertu du théorème d'uniformité globale, $f'' - (f'^*_0 + f'^*_1 + \ldots + f'^*_{n-1})$ et f'_n se prolongent et leur superposition est un élément analytique sur $[k' \,...\, C(a,r_n)] \cup C(a,d'^-,\mathrm{Min}(r_{n-1},\bar{r})^-) = k' \,...\, C(a,d') = k' \,..\, D'$! Cet élément analytique se représente, en dehors de l'unique trou D' de son support par une série de Laurent en $X'-a$, qui doit coïncider avec celle, qui représente f'_n en dehors de D_n. Mais alors f'_n converge en dehors de $D \subset D_n$ et, contrairement à l'hypothèse D_n n'est pas le cercle minimal de sa non-convergence. Ainsi, f' ne se prolonge pas dans D' et le théorème est démontré.

Avant de tirer les conséquences générales du théorème de singularité au bord, indiquons quelques cas, où une série de Taylor f n'est pas prolongeable en dehors de son cercle de convergence $C = C(0,\rho)$, où on peut, évidemment, suppose $\rho \neq +\infty$, car pour $\rho = +\infty$, $C = k'$. On connait déjà un tel cas, celui où C est circonférencié.

En voici deux autres (il n'y a pas besoin, pour ces résultats, de supposer k maximalement complet, il suffit qu'il soit complet).

I. Si $M_f(r)$ n'est pas bornée sur $[0,\rho]_{\mathbb{R}^o}$, f n'est pas prolongeable en dehors de C. En particulier, si $\rho < +\infty^-$, f n'est pas un élément analytique sur C.

Si $\rho = +\infty^-$, $k \,..\, C = \{\infty\}$, et si f est prolongeable à ∞, la continuité de ce prolongement implique que f est bornée dans un voisinage de ∞, ce qui implique que $M_f(r)$ l'est aussi. Si $\rho < +\infty^-$, considérons un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon > 0$. Si f est un élément analytique sur C et si (f_n) en est une suite approximante, il existe un indice n tel que $M_f(r) \geqslant \varepsilon$ implique $M_f(r) = M_{f_n}(r)$. Mais $M_{f_n}(r)$ est bornée sur un intervalle fini $[0,\rho]_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$, et il en est de même pour $M_f(r) \leqslant \operatorname{Max}[M_{f_n}(r), \varepsilon]$. On a déjà vu qu'une série de Taylor, qui n'est pas un élément analytique sur son cercle de convergence, ne se prolonge pas en dehors de ce cercle.

II. Si f a une infinité de zéros sur C, elle n'est pas prolongeable en dehors de C. En effet, supposons le contraire. Remarquons, d'abord, qu'il y a une infinité de circonférences $S_r = S(0,r)$, $r \leqslant \rho$, où il y a des zéros de f, car chacune d'elles ne peut en contenir qu'un nombre fini. Soit f' un élément analytique prolongeant f en dehors de C, et soit E' son support. Alors $E' \not\subseteq C$ et la superposition f^* des f,f' est un élément analytique sur $E = C \cup E'$. Mais alors, si $E^* = \{x \in E\ ;\ f^*(x) \neq 0\}$, f^{*-1} est une fonction analytique sur E^* et E^* est la réunion de la famille enchaînée des supports, qui sont quasi-connexes, de ses éléments analytiques convenables (voir la démonstration de l'analyticité de l'inverse d'un élément analytique, § 4), donc doit être quasi-connexe. Or, il existe un $b \in E \,..\, C$ tel que $f(b) \neq 0$ (car, autrement f s'annulerait sur l'ouvert $E \,...\, C$ et serait identiquement nul) et $d(0,b) > \rho$, ce qui implique que $C \,..\, E^* = \{x \in C\ ;\ f(x) = 0\}$ doit être contenu dans un nombre fini de circonférences $S_r = S(0,r)$, $r \leqslant \rho$. Or, il y a une infinité de telles circonférences contenant des zéros de f.

Si k est maximalement complet, le théorème de singularité au bord ensemble avec mes théorèmes Mittag-Leffleriens (ou le théorème de Robba) permet, supposant qu'on sache construire le cercle minimal de non-convergence d'une série de Laurent principale donnée, de donner une méthode de construction du domaine d'existence E de la fonction analytique F défini par une série de Laurent $f(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i U_c(X)^i$ d'un centre $c \in E$ (c'est, en particulier, une série de Taylor si $c = \infty$; dans tous les autres cas, $f(\infty)$ converge, donc $\infty \in E$). On peut toujours se ramener, par homographie, au cas $c \neq \infty$, donc supposer que $a = \infty \in E$. Puisque E est quasi-connexe, en vertu du §.6 il est le complémentaire de la réunion des fruits de l'arbre $\mathfrak{A}_a(E)$ des voisinages des trous de E par rapport à un $a \in E$ arbitraire. Il suffit donc, pour construire E, de donner une méthode de construction de $\mathfrak{A}_a(E)$ pour un $a \in E$ arbitraire, et, en particulier, on peut supposer que $\infty \in E$ et $a = \infty$. Notons, comme au §.6, $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i^{(\infty)}(E)$ le voisinage d'ordre i des trous de E par rapport à ∞, et C étant $\in \mathcal{W}_i$, notons $\mathcal{W}_{i+1,C}$ l'ensemble des $C' \in \mathcal{W}_{i+1}$ tels que $C' \subseteq C$. Rappelons que les $\mathcal{W}_i$ sont des ensembles de cercles de k', dont $\mathcal{W}_0$ le singleton $\{C_0\}$, où C_0 est le plus petit cercle contenant $k' \,..\, E$, que $\mathcal{W}_{i+1} = \bigcup_{C \in \mathcal{W}_i} \mathcal{W}_{i+1,C}$ et que $\mathcal{W}_{i+1,C} = \emptyset$ si $C \cap E = \emptyset$ (dans ce cas C est dit un trou <u>accessible</u> d'ordre i de E, et on notera $\mathcal{U}\mathcal{W}_i$ l'ensemble de tels trous de E), tandis que si $C \cap E \neq \emptyset$, ce qui implique que C est circonférencié et non ponctuel, $\mathcal{W}_{i+1,C} = \{D(C') \; ; \; C' \in T(C), \; C' \not\subseteq E$, où T(C) est l'ensemble des sous-cercles maximaux non circonférenciés $C' \subseteq C$ et D(C') est le plus petit cercle contenant $C' \,..\, E$. Bien entendu, $\mathcal{W}_{i+1}$ est aussi $= \bigcup_{C \in \mathcal{W}_i \,..\, \mathcal{U}\mathcal{W}_i} \mathcal{W}_{i+1,C}$, donc $\mathcal{W}_i = \mathcal{U}\mathcal{W}_i$ implique pour tout $j > i$, $\mathcal{W}_j = \emptyset$. Puisque E est régulier, tout $\mathcal{W}_i$ est au plus dénombrable.

Montrons que, f(X) étant donnée, il est possible de faire correspondre à tout $C \in \bigcup_{0 \leq i < +\infty} \mathcal{W}_i$ une série de Laurent principale $f^{(C)}$ en X-c, où $c \in C$, ne dépendant pas, en tant que fonction de X, du choix de c, et telle que :

a) C est le plus petit cercle de non-convergence de $f^{(C)}$;

b) Si $C \in \mathcal{W}_i \,..\, \mathcal{U}\mathcal{W}_i$, la série $\sum_{C' \in \mathcal{W}_{i+1,C}} f^{(C')}$ converge uniformément vers $f^{(C)}$ sur $k \,..\, C$.

c) $f^{(C_0)}$ est égale à $f(X) - f(\infty)$ sur le domaine de convergence de f(X).

Montrons, en même temps, qu'une application $C \longrightarrow f^{(C)}$ satisfaisant à ces conditions est unique.

Supposons que l'existence et l'unicité de l'application $C \longrightarrow f^{(C)}$ satisfaisant aux conditions a), b), c) est prouvée pour les $C \in \bigcup_{0 \leq i \leq \iota-1} \mathfrak{W}_i$, ce qui est certainement le cas pour i=0. Si $\iota=0$ montrons que C_o est le plus petit cercle de non-convergence de f(X) et que, si $c \in C_o$, le développement $(f(X) - f(\infty))^{(a)}$ de $f(X) - f(\infty)$ en série de Laurent (qui est principale) en X-c, considéré sur tout son domaine de convergence, (ce développement, en tant que fonction de X, ne dépend pas du choix de $c \in C_o$) est la seule fonction de X définie sur $k' .. C_o$, qui satisfait aux conditions a) et c). Appelons C'_o le plus petit cercle de non-convergence de f(X), on a $k' .. C'_o \subsetneq E$, donc $C'_o \supseteq C_o$. Mais si $c \in C_o$, on a $c \in C'_o$ et, en vertu du théorème d'unicité, $(f(X) - f(\infty))^{(a)}$ est l'unique série de Laurent en X-c égale à $f(X) - f(\infty)$ là où f(X) converge. Et, en plus, elle converge hors de C'_o, qui est son plus petit cercle de non-convergence. Donc, s'il existe $f^{(C_o)}$ convergeant sur $k .. C_o$ et satisfaisant aux conditions a), c), on doit avoir $f^{(C_o)} = (f(X) - f(\infty))^{(c)}$, et cette fonction existe si, et seulement si $C'_o = C_o$

Or, ou bien f(X) n'est pas prolongeable dans C'_o, auquel cas on a bien $C_o = C'_o \in \mathfrak{W}_o$ (ce qui implique $\mathfrak{W}_i = \emptyset$ si $i > 0$). Ou bien f(X) y est prolongeable, auquel cas C'_o est circonférencié et $(f(X) - f(\infty))^{(c)}$ est un élément analytique sur $k .. C'_o$. Alors, en vertu du théorème de Robba ou de mon second théorème Mittag-Lefflerien (en se plaçant, si $\bar{k}$ est dénombrable, dans un surcorps algébriquement clos maximalement complet K de k tel que $\bar{K}$ ne l'est pas, et en considérant un prolongement de $(f(X) - f(\infty))^{(c)}$ dans le plus petit cercle $(C'_o)_K$ de K contenant C'_o à l'aide d'un élément analytique <u>régulier</u>), on a $(f(X) - f(\infty))^{(c)} =$

$\sum_{C' \in T(C'_o)} ((f(X) - f(\infty))^{(c)})_{C'}$, où l'ensemble des $C' \in T(C'_o)$ tels que

$(f(X) - f(\infty)^{(c)})_{C'} \neq 0$ a au moins deux éléments et est au plus dénombrable, et où la série écrite converge uniformément sur $k .. C'_o$. Il en résulte, vu que $((f(X) - f(\infty))^{(c)})_{C'}$ est une série de Laurent principal de centre $\in C'$, qui converge en dehors de C', que $f(X) - f(\infty)$ (donc aussi f(X)) se prolonge à un $c' \in C' \in T(C'_o)$ si, et seulement si, $((f(X) - f(\infty))^{(c)})_{C'}$ le fait. En vertu du théorème de singularité au bord, si $((f(X) - f(\infty)^{(c)})_{C'} \neq 0$, il existe des $c', c'' \in C'_o$, tels que ne se prolonge pas. Il existe donc deux points $c' \in C'_o$, tels que $d(c',c'') = d(C'_o)$, tels que f(X) ne se prolonge à ces points, autrement dit c', c'' n'appartient pas à E. Donc $d(C_o) \geqslant d(C'_o)$, ce qui implique encore $C'_o = C_o$.

Supposons maintenant que $C \in \mathfrak{M}_i$, où $i > 0$. Alors, pour tout j tel que $0 \leq j < i$, il existe un et un seul $C_j \in \mathfrak{M}_j \cdot\cdot \mathfrak{M}_j$ tel que $C \subseteq C_j$, et, en particulier, C_o est l'unique élément de $\mathfrak{M}_o$ qu'on a déjà noté ainsi. On a, si $0 < j < i$, $f^{(C_{j-1})} = \sum_{C' \in \mathfrak{M}_{j,C_{j-1}}} f^{(C')}$, où $\mathfrak{M}_{j,C_{j-1}}$ est au plus dénombrable, et la série écrite converge uniformément sur $k \cdot\cdot C_{j-1}$, et on a $C_j \in \mathfrak{M}_{j,C_{j-1}}$. Mais alors $\sum_{C' \in \mathfrak{M}_{j,C_{j-1}}, C' \neq C_j} f^{(C')}$ converge uniformément sur C_j, donc y est une fonction analytique (en effet, puisque $f^{(C')}$, $C' \neq C$, est une série de Laurent qui converge sur $k \cdot\cdot C' \supset C_j$, $f^{(C')}$ est une série de Taylor sur C_j, donc, en vertu du théorème de Weierstrass, la série écrite l'est aussi), donc $f^{(C_{j-1})}$ se prolonge à une partie de C_j si et seulement si $f^{(C_j)}$ le fait. On voit, par récurrence (car $f^{(C_o)}$ est un prolongement de $f(X) - f(\infty))$ que $f(X)$ se prolonge à un $c \in C$ si, et seulement si $f^{(C_{i-1})}$ le fait.

Par hypothèse, puisque $\mathfrak{M}_{i,C_{i-1}} \neq \emptyset$, C_{i-1} est circonférencié et non ponctuel et $f^{(C_{i-1})}$ est un élément analytique sur $k \cdot\cdot C_{i-1}$ qui se prolonge dans C_{i-1}. Dès lors, en vertu du théorème de Robba (ou le 2e théorème Mittag-Lefflerien), on a, sur $k \cdot\cdot C_{i-1}$, $f^{(C_{i-1})} = \sum_{C' \in T(C_{i-1})} (f^{(C_{i-1})})_{C'}$, où l'ensemble des $C' \in T(C_{i-1})$ tels que $(f^{(C_{i-1})})_{C'} \neq 0$ est au plus dénombrable, et où la série écrite converge uniformément sur $k \cdot\cdot C_{i-1}$. Il en résulte immédiatement que $f^{(C_{i-1})}$, et donc aussi $f(X)$, est prolongeable à un $c' \in C'$ si, et seulement si $(f^{(C_{i-1})})_{C'}$ l'est, d'ou résulte (théorème de singularité au bord) que $C' \not\subseteq E$, donc $D(C') \neq \emptyset$, si et seulement si $(f^{(C_{i-1})})_{C'} \neq 0$. Ainsi, $\mathfrak{M}_{i,C_{i-1}} = \{D(C');\ (f^{(C_{i-1})})_{C'} \neq 0\}$.
Supposons que, pour tout $C = D(C') \in \mathfrak{M}_{i,C_{i-1}}$ existe une série de Laurent $f^{(C)}$, d'un centre $c \in C$, dont C soit le plus petit cercle de non-convergence et telle que $\sum_{C \in \mathfrak{M}_{i,C_{j-1}}} f^{(C)}$ converge uniformément sur $k \cdot\cdot C_{i-1}$ vers $f^{(C_{i-1})}$. Alors,

$\sum_{C' \in T(C_{i-1});(f^{(C_{i-1})})_{C'} \neq 0} \left[f^{D(C')} - (f^{(C_{i-1})})_{C'}\right]$ converge uniformément vers 0 sur $k \,..\, C_{i-1}$ et $\sum_{C' \in T(C_{i-1});(f^{(C_{i-1})})_{C'} \neq 0; D(C') \neq C} \left[f^{(D(C'))} - (f^{(C_{i-1})})_{C'}\right]^{(c')}$

converge, sur le même ensemble, uniformément vers $f^{(C)} - (f^{(C_{i-1})})_{C'_o}$, ou $C = D(C'_o)$.

Or, le seul trou du support $k' \,..\, C'$ de cette dernière série de Laurent est C', tandis que la somme de la série est une série de Taylor sur C'. Il en résulte que $f^{(C)} - (f^{(C_{i-1})})_{C'_o}$ est une constante, et comme $f^{(C)}(\infty) = (f^{(C_{i-1})})_{C'_o}(\infty) = 0$, cette constante est 0. Donc $f^{(C)}$ prolonge $(f^{(C_{i-1})})_{C'_o}$ et est $= ((f^{(C_{i-1})})_{C'_o})^{(c)}$, où $c \in C = D(C'_o)$. Donc $f^{(C)}$, s'il existe, est déterminé d'une manière unique.

Soit $D'(C')$ le cercle minimal de non-convergence de $(f^{(C_{i-1})})_{C'}$. On voit qu'il existe, pour tout $C = D(C') \in \mathcal{W}_{i,C_{i-1}}$, des séries de Laurent $f^{(C)}$ d'un centre $c \in C$ satisfaisant aux conditions a) et b) si, et seulement si, pour tout $C' \in T(C_{i-1})$ tel que $(f^{(C_{i-1})})_{C'} \neq 0$, on a $D'(C') = D(C')$. Mais ceci se démontre en appliquant à la série de Laurent $(f^{(C_{i-1})})_{C'}(X)$, qui converge en dehors de C', le même raisonnement que celui, appliqué dans le cas $i=0$, à la série $f(X) - f(\infty)$. Ainsi, tout est prouvé.

Ceci posé, on voit comment construire $\mathcal{A}_\infty(E)$, et aussi les séries $f^{(C)}$, où C parcourt $\bigcup_i \mathcal{W}_i$, à partir de $f(X)$;

1°) Si $\mathcal{W}_o = \{C_o\}$, C_o est le plus petit cercle de non-convergence de f et $f^{(C_o)} = (f(X) - f(\infty))^{(c)}$, où $c \in C_o$.

2°) Si $\mathcal{W}_o, \mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_{i-1}$ sont construites, ainsi que, pour tout $C \in \mathcal{W}_o \cup \mathcal{W}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{W}_{i-1}$, la série correspondante $f^{(C)}$, et si $C \in \mathcal{W}_{i-1}$.

a) Si C est non-circonférencié ou si $f^{(C)}$ n'est pas un élément analytique sur $k' \,..\, C$, on a $C \in \mathcal{W}_{i-1}$ et $\mathcal{W}_{i,C} = \emptyset$.

b) Si C est circonférencié et $f^{(C)}$ est un élément analytique sur k' .. C, soit $f^{(C)} = \sum_{C' \in T(C)} (f^{(C)})_{C'} \neq 0$ la décomposition de $f^{(C)}$ en contributions des $C' \in T(C)$ donnée par le théorème de Robba (ou le 2e théorème Mittag-Lefflerien). Alors, l'ensemble $T(C)_o$ des $C' \in T(C)$ tels que $(f^{(C)})_{C'} \neq 0$ est au plus dénombrable. Soit $D(C')$, où $C' \in T(C)_o$, le plus petit cercle de non-convergence de $(f^{(C)})_{C'}$. Alors, si $T(C)_o = T(C)$ (ce qui n'est possible que si $\bar{k}$ est dénombrable), et si, pour tout $C' \in T(C)$, on a $D(C') = C'$, on a $C \in \mathfrak{W}_{i-1}$ et $\mathfrak{W}_{i,C} = \emptyset$ (c'est précisément le cas d'agglutination des "vrais" trous en un trou "apparent" plus grand, qui a été mentionné dans le §6), sinon $\mathfrak{W}_{i,C} = \{D(C');\ C' \in T(C)_o\}$ et si $C^* = D(C') \in \mathfrak{W}_{i,C}$, on a $f^{(C^*)} = ((f^{(C)})_{C'})^{(c^*)}$, ou $c^* \in C^*$.

c) On a $\mathfrak{W}_i = \bigcup_{C \in \mathfrak{W}_{i-1}} \mathfrak{W}_{i,C} = \bigcup_{C \in \mathfrak{W}_{i-1} \,.\, \mathfrak{W}_{i-1}} \mathfrak{W}_{i,C}$.

Comme on a vu, les trous inaccessibles T de E coïncident avec les intersections $\bigcap_{0 \leqslant i < +\infty} C_i$ de quelque suite $C_o \supset C_1 \supset \dots \supset C_i \supset \dots$ de cercles emboités telle que $C_i \in \mathfrak{W}_i$, tandis que les trous accessibles sont les cercles appartenant à quelque $\mathfrak{W}_i \subsetneq \mathfrak{W}_i$. Soit $\mathcal{T}(C)$, où $C \in \mathfrak{W} = \bigcup_{0 \leqslant i < +\infty} \mathfrak{W}_i$, l'ensemble des trous T de E tels que $T \subsetneq C$. On mettra sur l'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des trous de E la topologie, ou la base des ouverts sera la famille $\{\mathcal{T}(C)\ ; C \in \mathfrak{W}\}$. Cette famille est au plus dénombrable et chaque $\mathcal{T}(C)$ est à la fois ouvert et fermé : ainsi $\mathcal{T}(E)$ est anti-connexe (et il est facile de montrer qu'il est, même, un K-espace au sens de J.P. Olivier [23] par rapport à cette topologie, les trous accessibles étant des points isolés de cet espace, lequel est séparé et complet. Si $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}(E)$, considérons des sous-ensembles $\bar{\mathfrak{W}}$ de $\mathfrak{W}$ tels que les $C \in \bar{\mathfrak{W}}$ soient disjoints deux à deux et que $\mathcal{T} = \bigcup_{C \in \bar{\mathfrak{W}}} \mathcal{T}(C)$. Il se peut que, pour certains $\bar{\mathfrak{W}}$, $\sum_{C \in \bar{\mathfrak{W}}} f^{(C)}$ converge uniformément sur k .. C_o , et il est facile de montrer que la somme $s_{\mathcal{T}}$ de cette série ne dépend pas du choix d'un tel $\bar{\mathfrak{W}}$ (cela est vrai même si la convergence est simple, on compare les sommes pour $\bar{\mathfrak{W}}$, $\bar{\mathfrak{W}}'$ de cette sorte à celle pour l'ensemble $\bar{\mathfrak{W}}''$ des $C \in \bar{\mathfrak{W}} \cup \bar{\mathfrak{W}}'$ minimaux pour l'inclusion). Si en plus cette somme, qui (théorème

(23) Les K-espaces sont des espaces uniformes, qui possèdent une base d'entourages, qui est une famille d'équivalences. Voir [16].

de Weierstrass) est une série de Laurent, donc une fonction analytique sur $k \mathbin{..} C_o$, peut se prolonger analytiquement sur tout ensemble $k \mathbin{..} \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ (on voit facilement qu'il suffit pour cela que, pour tout $C \in \bar{\mathfrak{M}}$, $s_{\mathcal{T}} - f^{(C)}$ se prolonge analytiquement a $k \mathbin{..} \bigcup_{C' \in \bar{\mathfrak{M}};C' \neq C} C'$), il est naturel de considérer cette fonction

$f_{\mathcal{T}}$ comme la contribution à f de l'ensemble $\mathcal{T}$ de trous. Pourtant, la prolongabilité analytique de $s_{\mathcal{T}}$ à $k \mathbin{..} \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ n'implique pas, a priori, que $\sum_{C \in \bar{\mathfrak{M}}} f(C)$ converge partout sur $k \mathbin{..} \bigcup_{C \in \bar{\mathfrak{M}}} C \subseteq k \mathbin{..} \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ (bien que je ne connais aucun exemple du comportement contraire), et, dans le cas où elle converge, qu'elle y converge uniformément (ce qui ne permet pas d'affirmer que la somme de cette série coïncide avec $f_{\mathcal{T}}$; mais tel est bien le cas, si elle est analytique). Voici un exemple, qui le montre :

Soit $\varphi(X)$ une série de Laurent régulière dont le domaine de convergence est $C(0;1,+\infty)$ [Si l'on pose $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i X^{-i}$, il faut et il suffit pour cela que $|a_i| \longrightarrow 0^+$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$, $|a_i|(1+\varepsilon)^i \longrightarrow +\infty^-$, ce qui est facile à réaliser; il suffit, par exemple, que $i\,|a_i| \longrightarrow 1^-$], $C(0,1^-)$ étant non-circonférencié, $\varphi(X)$ n'est pas prolongeable dans ce cercle. Puisque $\varphi(\infty) = 0$, on a $M_\varphi(r) \longrightarrow 0^+$ quand $r \longrightarrow +\infty^-$. Soit $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots (r_1 \leqslant 1)$ une suite décroissante de nombres réels $\in \Gamma(k)$, qui tend vers 0^+, et soit $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ une suite d'éléments de l'anneau de valuation $i = C(0,1)$ de k tels que leurs restes $\bar{c}_i$ soient tous distincts (comme $\bar{k}$ est au moins dénombrable, une telle suite existe). Soit u_n un élément de k tel que $|u_n| = r_n$ $(n=1,2,\dots)$. Considérons, sur $C(0;1,+\infty)$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$. Les termes de cette série sont définis partout, sauf sur les cercles $T_n = C(c_n, |u_n|^-) = C(c_n, r_n^-)$, le seul terme non-défini sur T_n étant $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$, et ce terme ne se prolonge pas dans T_n. Si $x \in k$, il existe au plus un indice n tel que $|x - c_n| < 1$ et si n_o est cet indice, on a, pour tout $n \neq n_o$, $\left|\frac{X-c_n}{u_n}\right| \geqslant \frac{1}{|u_n|} = r_n^{-1}$, donc $\left|\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})\right| \leqslant M_\varphi(r_n^{-1}) \longrightarrow 0^+$ quand

$n \longrightarrow +\infty^-$ et si, en plus, $x \notin T_n$, la série précédente est définie et converge. En plus, si $x \in k \mathbin{..} C_o$, on a $|x - c_n| \geqslant 1$ pour tout n, donc la convergence est uniforme sur $k \mathbin{..} C(0,1)$. Comme $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$ est une série de Laurent principale, qui converge en dehors de $C(c_n,1^-) \supset T_n$, on a, si f désigne la série de Laurent (forcément principale), qui représente l'élément analytique $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$ sur $k \,..\, C(0,1)$ (car tout $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$, qui converge en dehors de $C(c_n, 1^-)$, en est un sur cet ensemble), $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n}) = f_{C(c_n,1^-)} \neq 0$. Il en résulte que $C(c_n,1^-)$ n'est pas contenu dans le domaine d'analyticité E de f, ce qui implique $\mathcal{W}_o(E) = \{C(0,1)\}$, $\mathcal{W}_1(E) = \{D(c_n,1^-))\ ;\ n = 1,2,\dots\}$. Mais, puisque $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$ n'est pas prolongeable dans T_n, on a $D(C(c_n,1^-)) = T_n \in \mathcal{T}(E)$, d'où résulte

$\mathcal{W}_1(E) = \{(T_n); n = 1,2,\dots\} = \mathcal{W}_1(E)$ et $\mathcal{W}_i(E) = \emptyset$ si $i > 1$. Comme

$\sum_{\substack{n'=1 \\ n'\neq n}}^{+\infty} \varphi(\frac{X-c_{n'}}{u_{n'}})$ converge uniformément sur $k' \,..\, \bigcup_{1\leq n'\leq +\infty^-;n'\neq n} C(c_{n'},1^-)$, donc

est un élément analytique sur cet ensemble, et comme $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$ est un élément analytique sur $k' \,..\, T_n$, $s(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$ est un élément analytique sur tout

$E_n = k' \,..\, [T_n \cup (\bigcup_{1\leq n'\leq +\infty^-, n'\neq n} C(c_n,1^-)]$. Donc s(X) est une fonction analytique sur $E = k' \,..\, \bigcup_{1\leq n \leq +\infty^-} T_n$. Mais le suprémum de $\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})$ sur E est

$\geq \mathrm{Sup}_{|x-c_n| = r_n} \varphi(\frac{X-c_n}{u_n}) = M_{\varphi(\frac{X-c_n}{u_n})}(r_n) = M_{\varphi(X)}(1)$, et la convergence n'est pas uniforme.

Il existe, également, des ouverts $\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}(E)$ tels que, pour tout $\bar{\mathcal{W}}$ de forme précédente, $\sum_{C\in\bar{\mathcal{W}}} f^{(C)}$ non seulement ne converge pas uniformément sur $k \,..\, C_o$, mais même diverge en tout $x \in k'$, où tous les $f^{(C)}$ sont définis.

Voici un exemple basé sur le théorème cité de Lazard.

Il résulte de ce théorème en supposant k maximalement complet et, en faisant la transformation $X \to \frac{1}{X}$, que, le nombre réel $r > 0$ étant fixe, il existe une fonction analytique f régulière en ∞, méromorphe dans le cercle projectif $C(0;r^+,+\infty)$, y ayant une infinité dénombrable de pôles arbitrairement choisis de manière que leurs valuations tendent vers r^+ (cette fonction n'est pas prolongeable dans $C(0,r)$, car si $a \in C(0,r)$ était dans son domaine d'analyticité, ce dernier n'aurait pas été quasi-connexe), les parties principales relatives aux différents pôles p de f étant des polynômes sans termes constants arbitrairement et indépendemment choisis dans les $k[(X-p)^{-1}]$ correspondants.

Considérons en particulier une telle fonction f, dont les pôles différents ont des valuations différentes, sont simples, et la partie principale de chaque pôle p est $(X-p)^{-1}$. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_i \ldots$ ces pôles rangés dans l'ordre de leurs valuations $|p_i|$ décroissantes, et soit $r_i = |p_{i+1}|$, alors, visiblement $C_o = C(0,r_o)$, les cercles $C' \in T(C_o)$ contenant les singularités de E (où E est le domaine d'analyticité $k!.[C(0,r) \cup \{p_i; i = 0,1,\ldots\}]$ de f) sont $C'_1 = C(p_o, r_o^-)$ et $C'_2 = C(0,r_o^-)$. On voit ensuite que $C_1 = D(C'_1) = \{p_o\} = C(p_o,0)$ et $D(C'_2) = \tilde{C}_1 = C(0,r_1)$, donc $\mathcal{W}_1(E) = \{\{p_1\}, \tilde{C}_1\}$. On a $f^{(C_1)} = (X-p_1)^{-1}$ et $f^{(\tilde{C}_1)}$ est méromorphe dans le même cercle projectif, mais avec les pôles $p_2, p_3, \ldots, p_i, \ldots$. En appliquant le même procédé à $f^{(\tilde{C}_1)}$ et en poursuivant la recurrence, on voit que, pour tout $i \geqslant 1$, on a $\mathcal{W}_i(E) = \{\tilde{C}_i, C_i\}$, où $C_i = \{p_i\} = C(p_i,0)$ et $\tilde{C}_i = C(0,r_i)$, et on a $f^{(C_i)} = (X-p_i)^{-1}$.

Les C_i sont des trous accessibles, c'est-à-dire des points isolés donc des ouverts de $\mathcal{T}(E)$ (ils sont aussi des trous isolés de E) tandis que les $\tilde{C}_i$ forment une suite décroissante dont l'intersection $\tilde{C} = \bigcap_i \tilde{C}_i = C(0,r)$ est le seul trou inaccessible (et aussi le seul trou non isolé) de E. L'ensemble $\mathcal{T} = \{\{p_i\}; i=1,2,\ldots\}$ est un ouvert de $\mathcal{T}(E)$ dont les $\mathcal{T}(C_i) = \{\{p_i\}\}$ forment une partition ouverte. C'est d'ailleurs l'unique partition de ce $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}(C)$, $C \in \mathcal{W}(E)$, disjoints deux à deux. Or, la série $\sum f^{(C)}$ correspondante est $\sum_{i=1}^{+\infty} (X-p_i)^{-1}$. Quel que soit $x \in E$, on a $|x| > r$, donc, à partir d'un certain rang, on a $|p_i| < |x|$ et $|x - p_i| = |x|$, donc $|x - p_i|^{-1} = |x|^{-1} > 0$ et la série $\sum_{i=1}^{+\infty} (x-p_i)^{-1}$ diverge, (il est à remarquer que cela ne vient pas de l'absence de compacité, car, pour f considérée, $\mathcal{T}(E)$ est compact) $\mathcal{T}$ étant un sous-ensemble de $\mathcal{T}(E)$, il est tentant de considérer la contribution $f_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ à f, quan elle peut être définie raisonnablement, comme une sorte d'intégrale, étendu à $\mathcal{T}$, d'une entité , définie précisément par l'application $\mathcal{T} \longrightarrow f_{\mathcal{T}}$, et qu'on appelera, faute de mieux, "noyau" N(f) de f. Ainsi, on écrira $f_{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{T}} N(f)$.

Si $f_{\mathcal{T}}$ peut être défini, on l'appelera la f-<u>mesure</u> de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ lui-même sera dit alors f-<u>mesurable</u>. Il est possible qu'il existe plusieurs manières raisonnables de définir une f-mesurabilité et une f-mesure. Il semble raisonnable d'exiger de ces "mesures" les propriétés suivantes, où E désigne le domaine d'existence de la fonction analytique f :

1°) $f_{\mathcal{T}}$ est une fonction analytique sur le plus grand sur-ensemble quasi-connexe de E disjoint avec $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$.

2°) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(E)$ étant f-mesurable et $\bar{f}_{\mathcal{T}}$ étant la fonction analytique définie par $f_{\mathcal{T}}$, soient $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ et $\bar{\mathcal{T}}'$ l'ensemble des trous du domaine d'existence $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ de $\bar{f}_{\mathcal{T}}$ contenus dans quelque $T \in \mathcal{T}'$. Alors $\mathcal{T}'$ est f-mesurable et $\bar{\mathcal{T}}'$ est $\bar{f}_{\mathcal{T}}$-mesurable en même temps, et s'ils le sont $(\bar{f}_{\mathcal{T}})_{\bar{\mathcal{T}}'}$ prolonge analytiquement $f_{\mathcal{T}'}$.

3°) $\emptyset$ et $\mathcal{T}(E)$ sont f-mesurable, et on a $f_{\emptyset} = 0$, $f_{\mathcal{T}(E)} = f$.

4°) Si $\mathcal{T}$ est f-mesurable, $\mathcal{T}(E) \,..\, \mathcal{T}$ l'est aussi, et on a

$f_{\mathcal{T}(E)..\mathcal{T}} = f - f_{\mathcal{T}}$ sur E.

5°) Si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_i, \ldots$ est une suite dénombrable de sous-ensemble f-mesurables et disjoints deux à deux de $\mathcal{T}(E)$ (dont certains peuvent-être = $\emptyset$) et si $\sum_i f_{\mathcal{T}_i}$ converge partout sur le plus grand sur-ensemble quasi-connexe de E disjoint avec $\bigcup_{T \in \mathcal{T}}$, où $\mathcal{T} = \bigcup_i \mathcal{T}_i$, vers une même fonction analytique, $\mathcal{T}$ est f-mesurable et $f_{\mathcal{T}}$ prolonge la somme précédente (on peut se poser la question : ne faudrait-t-il pas exiger qu'inversement, si $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T} = \bigcup_i \mathcal{T}_i$ sont f-mesurables $\sum_i f_{\mathcal{T}_i}$ converge, sur l'ensemble indiqué, vers $f_{\mathcal{T}}$?). Il en résulte qu'une réunion finie disjointe d'ensembles f-mesurables l'est aussi.

Il semble naturel d'y ajouter les deux axiomes existentiels suivants.

6°) Si C est, pour quelque a $\in$ E, et pour quelque $i, \in \mathcal{U}_i(E)$ l'ensemble $\mathcal{T}(C)$ des trous $T \subseteq C$ de E est f-mesurable et $f_{\mathcal{T}(C)} = f^{(C)}$. (En fait, si cette condition est remplie pour un seul a $\in$ E et les 1° - 5° sont remplies, on peut prouver qu'il en résulte qu'elle est remplie pour tout a $\in$ E).

7°) Si f' est un élément analytique de f et C un trou (ou même un trou ouvert; on pourrait même aller plus loin) du support de f', $\mathcal{T}$ (C) est f-mesurable et $f_{\mathcal{T}(E)} = f'_C$.

Une telle mesure serait assez analogue à la mesure de Lebesgue (bien que, puisque il s'agit de "mesure" faite à l'aide des fonctions et pas à l'aide d'éléments d'un groupe abélien totalement ordonné, elle ressemble, à première vue, plutôt à l'intégrale de Lebesgue), en particulier en ce qui concerne les ensembles de mesure nulle.

<u>Définition</u>: $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(E)$ est dit de f-<u>mesure nulle</u> si $\mathcal{T}$ est f-mesurable et si $f_{\mathcal{T}} = 0$.

De cette définition et des propriétés imposées à une f-mesure résultent les propriétés suivantes des ensembles de trous de f-mesure nulle :

A. <u>Si</u> $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(E)$ <u>est de</u> f-<u>mesure nulle</u>, <u>tout</u> $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ <u>l'est</u>.

En effet, puisque $f_{\mathcal{T}} = 0$, $\bar{f}_{\mathcal{T}}$ est partout définie et nulle, et son support n'a aucun trou. Ainsi, quel que soit $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, $\overline{\mathcal{T}'} = \emptyset$, donc est $\bar{f}_{\mathcal{T}}$-mesurable. Donc $\mathcal{T}'$ est f-mesurable et $f_{\mathcal{T}'} = (\bar{f}_{\mathcal{T}})_{\overline{\mathcal{T}'}} = (\bar{f}_{\mathcal{T}})_{\emptyset} = 0$. Ceci montre, en particulier, que si dans 5°, $f_{\mathcal{T}} = 0$, tous les $f_{\mathcal{T}_i}$ sont nulles.

B. <u>Si</u> $\mathcal{T}'$ <u>et</u> $\mathcal{T}''$ <u>sont deux sous-ensembles quasi-connexes de</u> $\mathcal{T}(E)$, <u>tels qu'il existe un sur-ensemble quasi-connexe de</u> E <u>contenant</u> $\bigcup_{T \in \mathcal{T}'' .. \mathcal{T}'} T$ <u>et disjoint avec</u> $\bigcup_{T \in \mathcal{T}'} T$ <u>et un autre contenant</u> $\bigcup_{T \in \mathcal{T}' .. \mathcal{T}''} T$ <u>et disjoint avec</u> $\bigcup_{T \in \mathcal{T}''} T$. <u>Alors, si</u> $\mathcal{T}'$ <u>et</u> $\mathcal{T}''$ <u>sont</u> f-<u>mesurables et</u> $f_{\mathcal{T}'}$, $f_{\mathcal{T}''}$ <u>se prolongent</u>, $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$ <u>l'est aussi et on a</u> $f_{\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''} = f_{\mathcal{T}'} = f_{\mathcal{T}''}$ <u>sur</u> E. Il en résulte facilement, en vertu des 2°, 4° et 5°, que $\mathcal{T}' .. \mathcal{T}''$ et $\mathcal{T}'' .. \mathcal{T}'$ sont de f-mesure nulle).

En effet, soit E' le plus grand sur-ensemble quasi-connexe de E contenant $\bigcup_{T \in \mathcal{T}'' .. \mathcal{T}'} T$ et disjoint avec $\bigcup_{T \in \mathcal{T}'} T$, et E'' l'ensemble analogue en échangeant $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$. Alors, $\bar{f}_{\mathcal{T}'} = \bar{f}_{\mathcal{T}''}$ et est analytique sur $E' \cup E''$. Si $\bar{E}$ est le support de cette fonction analytique, il est clair que tout trou de $\bar{E}$ est contenu dans quelque $T \in \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$. Donc, en appliquant 2° pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, on a $\overline{\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''} = \mathcal{T}(E')$, donc est $f_{\mathcal{T}'}$-mesurable, d'où résulte que $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$ est f-mesurable et que

$$(\bar{f}_{\mathcal{T}'})_{\overline{\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''}} = (\bar{f}_{\mathcal{T}''})_{\mathcal{T}(E')} = \bar{f}_{\mathcal{T}'} \text{ prolonge } f_{\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Conséquence</u>. <u>Si l'on ajoute aux hypothèses que</u> $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' = 0$, <u>il en résulte que</u> $\mathcal{T}'$ <u>et</u> $\mathcal{T}''$ <u>sont de</u> f-<u>mesure nulle</u>.

Il semble raisonnable d'exiger que la propriété B soit exacte sans aucune condition de "separabilité quasi-connexe" de $\mathcal{T}'$ avec $\mathcal{T}''$ .. $\mathcal{T}'$ et de $\mathcal{T}''$ avec $\mathcal{T}'$ .. $\mathcal{T}''$, ce qui veut dire, au fond, que la restriction à E de la contribution $f_{\mathcal{T}}$ à f d'un ensemble f-mesurable $\mathcal{T}$ de trous de E détermine cet ensemble aux ensembles de trous de f-mesure nulle près. On exige donc

8°) Si $\mathcal{T}', \mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}(E)$ sont f-mesurables et $f_{\mathcal{T}'} = f_{\mathcal{T}''}$ sur E, $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$ est f-mesurable et $f_{\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''} = f_{\mathcal{T}'} = f_{\mathcal{T}''}$ sur E.

Il reste maintenant le plus difficile : <u>prouver l'existence des</u> f-<u>mesures</u> et, éventuellement, en étudier leur ensemble ordonné, une f-mesure étant considérée comme inférieure à l'autre si, et seulement si tout ensemble f-mesurable pour la première f-mesure, l'est pour la seconde, et les deux f-mesures considérés de cet ensemble coïncident sur E. Si l'ensemble des f-mesures n'est pas vide, il est facile de prouver qu'il possède le plus petit élément, qui en semble être l'élément le plus essentiel et intéressant à étudier. Je pense que le problème ici posé, à moins de recevoir une solution inattendue plus rapide et facile qu'on croit, va rester dans les années à venir le problème majeur de la théorie quasi-connexe des fonctions analytiques uniformes d'une variable. Avec peut-être un autre problème, certainement lié avec le premier : décrire la famille de toutes les fonctions ayant les singularités, c'est-à-dire le domaine d'analyticité donné, ou encore ayant au plus les singularités donnés, c'est-à-dire analytiques sur un quasi-connexe donné. Les problèmes analogues pour les éléments analytiques sont complètement résolus par le théorème de Robba et ses conséquences. On ne connait leur solution en dehors de ce cas que pour les fonctions méromorphes, grâce au théorème de M. Lazard.

Pour finir ce paragraphe, je donne la démonstration du théorème suivant, énoncé dans [10].

<u>Théorème</u> : E <u>étant le domaine d'analyticité d'une fonction analytique</u> f, <u>et</u> a,b <u>étant</u> $\in$ E, <u>la restriction de</u> f <u>à</u> $E^*_{a,b}$ <u>est un élément analytique</u>. Je rappelle que k est supposé, dans tout ce paragraphe, maximalement complet, ce qui est donc inclu implicitement parmi les hypothèses de ce théorème. Il peut être faux, comme celui de singularité au bord, ainsi que le démontrent des contre-exemples, imaginés par Robba, (24) quand k ne l'est pas).

(24) Voir [17], p. 143-146.

Démonstration : Appelons un ensemble quasi-connexe régulier E' de k' tel que $\infty \in$ E' fortement régulier par rapport à un a $\in$ E' si y $\notin$ E' implique $C(y,d(a,y)^{-}) \cap E' = \emptyset$. La structure d'un tel E' (et de son complémentaire k' .. E') est la suivante : puisque il est ultra-ouvert en a, k' .. E' est contenu dans la réunion d'un ensemble fini (pouvant être vide) de circonférences de centre a, qui sont, si l'on écrit leurs rayons en ordre décroissant, $S_o = S(a,r_o)$, $S_1 = S(a,r_1)$,..., $S_m = S(a,r_m)$

$[+\infty > r_o > r_1 > \dots > r_m > 0]$ où m $\geqslant -1$. En plus S_i .. E est une réunion d'un ensemble V_{i+1} de cercles de rayon r_i^- (car x $\in S_i$ .. E implique $C(x,d(a,x)^-) = C(x,r_i^-) \subseteq S'$ .. E), et cet ensemble est au plus dénombrable à cause de la régularité de E. Il est visible que

$\mathcal{W}_o(E') = \{C_o = C(a,r_o)\}$, $\mathcal{W}_1(E') = V_1 \cup \{C_1 = C(a,r_1)\}$,
$\mathcal{W}_1 = V_1$, $\mathcal{W}_2(E') = \mathcal{W}_{2,C_1} = V_2 \cup \{C_2 = C(a,r_2)\}$,..., $\mathcal{W}_i(E') = V_i \cup \{C_i = C(a,r_i)\}$,
$\mathcal{W}_i = V_i$,... , $\mathcal{W}_{m+1}(E') = \mathcal{W}_{m+1} = V_{m+1}$ et $\mathcal{T}(E') = [\bigcup_{0 \leqslant i \leqslant m} V_{i+1}] \cup \{C_0\}$.

Montrons que si f est une fonction analytique sur un tel ensemble E', elle y est un élément analytique. En effet, f est, premièrement, une fonction analytique sur k' .. C_o prolongeable dans C, ce qui implique qu'elle y est un élément analytique.

Mais alors, on a, sur k .. C_o , $f = \sum_{C \in T(C_o)} f_C$, cette série convergeant uniformément sur k .. C_o et f_C étant une série de Laurent convergeant en dehors de C, donc un élément analytique sur k' .. C. Si $f_C \neq 0$, il y a des x $\in$ C, où f ne se prolonge pas. Donc, puisque f est analytique sur tout

$C \in T(C_o)$ .. $[V_1 \cup \{C_1\}]$, $f_C \neq 0$ implique $C \in V_1$ ou $C(0,r_o^-)$.

On a donc, sur k .. C_o $f = f_{C(0,r_o^-)} + \sum_{C \in V_1} f_C$. La série $\sum_{C \in V_1} f_C$ converge uniformément sur k' ..$[\bigcup_{C \in V_1} C] \supseteq$ E', donc sa somme est élément analytique sur E'. Ainsi f l'est ssi $f_1 = f - \sum_{C \in V_1} f_C$ (qui est $= f_{C(0,r_o^-)}$ sur k .. $C(0,r_o^-)]$ l'est. Or, f_1 est une fonction analytique sur E' $\cup$ [k .. $C(0,r_o^-)$] = E' $\cup S_o$, qui est encore fortement régulier par rapport au point a, mais avec une valeur de m dimunuée d'une unité. Si m = - 1, autrement dit E' = k', f' se représente par une série de Laurent, qui converge dans tout k', donc est une constante, et a fortiori un élément analytique, et, à partir de là, l'affirmation se démontre par induction sur m.

Si E est un quasi-connexe régulier, et si a,b sont $\in$ E, on voit facilement que la transformation $\sigma : X \longrightarrow X' = \frac{X-a}{X-b}$ applique $E^*_{a,b}$ sur un ensemble fortement régulier E'. Si $f'(X') = f'(\frac{X-a}{X-b}) = f(X)$, et si f est analytique sur $E_{a,b}$, f' l'est sur E'. Mais il vient d'être prouvé que f' y est un élément analytique, d'où résulte facilement que f en est un sur E.

Conséquence : 1. Si f est une fonction analytique sur un quasi-connexe E', et si a,b sont $\in$ E', f est un élément analytique sur un $E'^*_{a,b}$. En effet, si E est le domaine d'analyticité de f, on a $E' \subseteq E$ et $E'^*_{a,b} \subseteq E^*_{a,b}$.

Conséquence : 2. Si f est une fonction analytique sur un quasi-connexe E', et si a,b sont $\in$ E', f est un élément analytique sur $E'_{a,b}$. En effet, on a $E'_{a,b} \subseteq E'^*_{a,b}$.

Il résulte de ce théorème le théorème suivant :

Théorème. Si f_1 , f_2 ,..., f_i ,... sont toutes des fonctions analytiques sur un même quasi-connexe E, et si cette suite y converge uniformément, sa limite $f = \lim_i f_i$ est analytique sur E.

Démonstration. E admet comme recouvrement quasi-connexe enchaîné la famille des $E_{a,b}$ (ou des $E^*_{a,b}$), (a,b) parcourant $E \times E$, à laquelle on ajoute, si $\infty \in E$, un cercle projectif circonférencié $C(0;r,+\infty) \subseteq E$. Il est clair, en vertu de ce qui précède, que tout f_i est un élément analytique sur tout ensemble de ce recouvrement, donc aussi la limite uniforme f des f_i . Ces éléments analytiques forment un système enchaîné cohérent, dont la superposition, qui est f, est donc une fonction analytique sur E.

§ 9. Domaines d'analyticité.

On a vu déjà que le domaine d'analyticité d'une fonction analytique est un quasi-connexe nécessairement régulier. Vice versa, on peut montrer que tout ensemble quasi-connexe régulier en est un, en construisant, pour un tel ensemble donné E (qu'on peut supposer contenir ∞) une fonction analytique f dont E est précisément le domaine d'analyticité. A la base de cette construction se trouve le fait, prouvé au § 6, que l'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des trous d'un E quasi-connexe régulier (et, en particulier, si $\bar{k}$ est dénombrable, d'un quasi-connexe quelconque) possède un ensemble générateur $\mathcal{T}$ au plus dénombrable (bien entendu, tout trou accessible de E appartient à $\mathcal{T}$). L'idée est de faire correspondre à chaque $T \in \mathcal{T}$ une "contribution" f_T , qui soit une série de Laurent principale centrée dans T, convergeant en dehors de T et, si T est un trou accessible, non prolongeable dans T (pour les trous inaccessibles, cette condition n'est pas essentielle). On choisit les f_T diminuant assez vite avec le rang de T (si l'on numérote les $T \in \mathcal{T}$ de quelque manière) pour que $\sum_{T \in \mathcal{T}} f_T$ converge sur E et pour que E puisse être commodément recouvert par une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes tels que cette série converge uniformément sur chaque ensemble de la famille, ce qui prouve l'analyticité de f (car f_T est analytique sur k' .. T). On prouve ensuite que tout $T \in \mathcal{T}$ est un trou du domaine d'analyticité de f, ce qui prouve que ce domaine est E.

Ce théorème a été prouvé, au cours de l'année scolaire 1968-1969, d'une manière indépendante, par MM. Motzkin et Robba, mais seulement pour le cas $k = \tilde{\Omega}_p$ (où $\tilde{\Omega}_p$ est le complété de la clôture algébrique valuée Ω_p du corps p-adique rationnel Q_p), dont le corps résiduel $\bar{k}$ est dénombrable (donc tout quasi-connexe est régulier), et par moi-même dans le cas général. MM. Motzkin et Robba semblent avoir trouvé leur démonstration avant moi et l'ont publiée plus tôt dans [15] . Mais M. Motzkin en a parlé pour la première fois en public (du moins, en dehors de Bordeaux) à une conférence faite au séminaire Pisot (où les circonstances m'ont empêché d'assister) quand mon théorème a été déjà démontré. J'ai appris l'existence de celui de MM. Motzkin et Robba peu de mois après, quand j'ai fait une conférence sur ce sujet à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Ma démonstration (esquissée dans [11]), ainsi que celle de MM. Motzkin et Robba, employait une même technique inutilement compliquée, qui consistait à construire, pour commencer, un ensemble générateur dénombrable de $\mathcal{T}$ (E), ce qui peut être évité. Je donne donc une démonstration plus simple du

<u>Théorème</u>. <u>Un ensemble</u> $E \subseteq k'$ <u>est un domaine d'analyticité si, et seulement s'il est quasi-connexe régulier</u>.

Avant de donner cette démonstration, il faut prouver deux lemmes suivants :

<u>Lemme</u> 1. <u>Si</u> $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, <u>il existe une série de Laurent principale</u>

$\varphi_r(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i X^{-i}$, <u>dont le domaine de convergence est</u> k' .. $C(0,r^-)$.

En effet, il suffit pour cela que $|a_i| r^{-i} \to 0^+$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a_i r^{-i}(1-\varepsilon)^{-i}$ n'y tende pas. Il suffit pour cela de choisir, pour une constante réelle $s > 0$, chaque a_i de telle manière que $|a_i| \in [i^{-1}r^i, i^{-1} r^i s]_{\mathbb{R}} \cap \Gamma(k)$, car

$|a_i|r^{-i} \leqslant i^{-1}\,\mathrm{Max}(1,s) \longrightarrow 0^+$ et $|a_i|r^{-i}(1-\varepsilon)^{-i} \geqslant i^{-1}(1-\varepsilon)^{-i}\,\mathrm{Min}(1,s) \longrightarrow +\infty^-$.

<u>Remarque</u>. $\varphi_r(X)$ est bornée, car, pour tout $x \in k' .. C(0,r^-)$, on a $|\varphi_{\bar r}(x)| \leqslant M_{\varphi_r}(|x|) \leqslant M_{\varphi_r}(r)$, et, en vertu du théorème de singularité au bord, elle n'est pas prolongeable dans $C(0,r^-)$.

<u>Lemme</u> 2. <u>Il existe une série de Laurent principale</u> $\Psi(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i X^{-i}$ <u>qui converge et est bornée sur</u> $k' .. C(0,1)$, <u>et qui n'est pas prolongeable dans</u> $C(0,1)$.

Considérons une suite décroissante $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_i, \ldots$ de nombres réels $\in \Gamma(k)$ telle que $\prod_{i=2}^{+\infty}(1+\varepsilon_i)$ converge, et soit c la valeur de ce produit infini. Choisissons, pour chaque $i \geqslant 2$, un $u_i \in k$ tel que $|u_i| = 1+\varepsilon_i$. Ayant choisi arbitrairement $a_1 \in k$ non nul, imposons aux a_i, $i \geqslant 2$, la condition $a_i = a_{i-1}u_i$, autrement dit $a_i = a_1(u_2u_3\ldots u_i)$, ce qui implique $|a_i| = |a_{i-1}|(1+\varepsilon_i)$. On a $|a_i|r^{-i} = |a_{i-1}|r^{-(i-1)}$ ssi $r = r_i = 1+\varepsilon_i$, et on a

$|a_{i-1}|r^{-(i-1)} >$ ou $< |a_i|r^{-i}$ selon que $r <$ ou $> r_i$. Ainsi, puisque la suite des r_i est décroissante, on a, pour $r = r_i$, $|a_1|r^{-1} < |a_2|r^{-2} < \ldots < |a_{i-1}|r^{-(i-1)} = |a_i|r^{-i}$ et $|a_i|r^{-i} > |a_{i+1}|r^{-(i+1)} > \ldots$, autrement dit $a_{i-1}X^{-(i-1)}$ et a_iX^{-i} sont les termes maximaux de $\Psi(X)$ sur $S(0,r_i)$. Par suite, il existe des zéros z de $\Psi(X)$ tels que $|z| = r_i$ et l'ensemble des zéros de $\Psi(X)$ sur $k' .. C(0,1)$ est infini, ce qui implique que $\Psi(X)$ n'est pas prolongeable dans $C(0,1)$.

D'autre part, on a $|a_i| = |a_1|(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\ldots(1+\varepsilon_i) \leqslant |a_1|c$, donc, si $r > 1$, $|a_i|r^{-i} \longrightarrow 0^+$ et, si $x \notin C(0,1)$, on a $|\Psi(x)| \leqslant \mathrm{Max}_i|a_i||x|^{-i} \leqslant \mathrm{Max}_i|a_i| \leqslant |a_1|c$, donc $\Psi(X)$ est bornée sur $k' .. C(0,1)$.

<u>Remarque</u>. Si l'on choisit a_1 de manière que $0 < |a_1| \leqslant c^{-1}$, $|\Psi(X)| \leqslant 1$ sur tout son domaine de convergence.

<u>Démonstration du théorème</u>. Il a déjà été prouvé que tout domaine d'analyticité est un quasi-connexe régulier, et il ne reste qu'à prouver la réciproque. Soit E un

domaine quasi-connexe régulier, (dont on peut supposer, en faisant, si nécessaire, une homographie, que $\infty \in E$), et soit $\mathcal{T}$ un ensemble générateur au plus dénombrable (dont l'existence a été prouvée au §6) de l'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des trous de E. En particulier, si $T \in \mathcal{T}(E)$ est accessible, on a $T \in \mathcal{T}$, et si $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{T}(E)$ est fini, on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}(E)$. Numérotons de quelque manière

$$T_1 , T_2 ,\dots \quad , T_i ,\dots \qquad (i<n\leqslant+\infty)$$

les $T \in \mathcal{T}$. Choisissons, d'autre part, une suite a_1 , a_2 ,..., a_i ,... d'éléments non nuls de k tels que $|a_i| \longrightarrow 0^+$ et qu'en plus la suite $\Delta_i = |a_i|$ satisfasse à une condition supplémentaire, qui sera indiquée plus loin.

Faisons, en plus, correspondre, comme suit, à tout $T_i \in \mathcal{T}$, une série de Laurent principale f_i centrée en $t_i \in T_i$, qui converge en dehors de T_i. Soit $T_i = C(t_i, \rho_i)$ et soit $r_i = r(\rho_i)$ la valeur réelle de ρ_i. Il est à remarquer que si T_i est circonférencié, on a $\rho_i = r_i \in \Gamma(k) \cup \{0\}$; et que s'il est inaccessible, on a $T_i = C(t_i, r(\rho_i))$. Ceci posé

a) Si T_i est circonférencié, mais non ponctuel ($\rho_i \neq 0$), on posera $f_i = \Psi(\frac{X-t_i}{u_i})$, où u_i est un élément de **k** qu'on choisira de telle manière que $|u_i| = r_i$ (donc $=\rho_i$) et où $\Psi(X)$ est une série de Laurent principale $\sum_{i=1}^{+\infty} c_i X^{-i}$ à coefficients $c_i \in k$, qui converge sur $k \mathbin{..} C(0,1)$, n'est pas prolongeable dans $C(0,1)$ et est telle que, pour tout $x \in k \mathbin{..} C(0,1)$, on ait $|\Psi(x)| \leqslant 1$ (une telle série $\Psi(X)$ existe en vertu du lemme 2).

b) Si T_i est non-circonférencié, on posera $f_i = \varphi_{r_i}(X - t_i)$, où $\varphi_{r_i}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i X^{-i}$ est une série de Laurent principale dont $k \mathbin{..} C(0, \rho_i)$ est le domaine de convergence et qui y est partout $\leqslant 1$ (une telle $\varphi_{r_i}(X)$ existe en vertu du lemme 1).

c) Si T_i est ponctuel, donc $T_i = \{t_i\}$, on posera $f_i = (X-t_i)^{-1}$.

Indiquons, maintenant, la condition supplémentaire qu'on impose aux $\Delta_i = |a_i|$, et montrons, en même temps, qu'il est possible d'y satisfaire. Soit d_o le diamètre $d(C_o)$ du plus petit cercle C_o contenant $k \mathbin{..} E$ et soit D un élément de $\Gamma(k) > d_o$.

Posons $m_i = M_{f_i}^{(t_i)}(D)$ (en particulier, si T_i est circonférencié, on a $m_i = M_\psi(\frac{D}{r_i})$ et si T_i est ponctuel, $m_i = D^{-1}$). Alors, on exigera que les $\Delta_i m_i$ soient inégaux deux à deux. Partons d'une suite strictement décroissante $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_i', \dots$ $(i \leqslant n \leqslant +\infty)$ d'éléments de $\Gamma(k)$, qui tende vers 0^+, et par ailleurs arbitraire. Entourons chaque Δ_i' d'un intervalle ouvert I_i de manière que les intervalles soient disjoints deux à deux (il suffit, pour cela, que pour tout $r \geqslant 1$, $I_i \cap I_{i+1}$ soit vide). Choisissons , pour tout r, un $\Delta_i \in I_i \cap \Gamma(k)$ (ce qui implique que la suite des Δ_i est strictement décroissante et tend vers 0^+) de manière que tous les $\Delta_i m_i$ soient distincts. Supposons qu'on ait déjà choisi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{i-1}$ de manière que $\Delta_j \in I_j$ $(1 \leqslant j < i)$ et que $\Delta_1 m_1, \Delta_2 m_2, \dots, \Delta_{i-1} m_{i-1}$ soient tous distincts. Il existe certainement dans I_i des éléments de $\Gamma(k)$ (qui est dense sur $\mathbb{R}_+$) distincts des $\Delta_j m_j m_i^{-1}$ $(j = 1, \dots, i-1)$. Prenons comme Δ_i n'importe quel autre élément de $I_i \cap \Gamma(k)$. Ainsi, la suite $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots$ ainsi formée par un choix dénombrable est telle que $\Delta_{i+1}' < \Delta_i < \Delta_{i-1}'$, donc $\lim_i \Delta_i = \lim_i \Delta_i' = 0^+$, et, en plus, tous les $\Delta_i m_i$ sont distincts. Il ne reste qu'à choisir, pour tout i, un $a_i \in k$ tel que $|a_i| = \Delta_i$, ce qui est possible puisque $\Delta_i \in \Gamma(k)$.

Posons $f = \sum_{1 \leqslant i < n} a_i f_i$. La fonction f_i est une série de Laurent qui converge en dehors de T_i, donc une fonction analytique sur $E \subseteq k' \mathbin{..} T_i$. Si n est fini, f l'est aussi et $E = k' \mathbin{..} [\bigcup_{1 \leqslant i < n} T_i]$. Si $j \neq i$, f_j est aussi une fonction analytique sur T_i (car $T_i \cap T_j = \emptyset$), donc aussi $f - a_i f_i$ l'est. Donc f est prolongeable dans T_i si et seulement si f_i l'est. Mais, par construction, f_i n'est jamais prolongeable dans T_i et, ainsi, le domaine d'analyticité de f est contenu dans $\bigcap_{1 \leqslant i < n} [k' \mathbin{..} T_i] = k' \mathbin{..} [\bigcup_{1 \leqslant i < n} T_i] = E$, donc est = E.

Supposons que $n = +\infty$. Alors, par construction, si T_i est un trou non-ponctuel, on a $|f_i(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \notin T_i$, et si $T_i = \{t_i\}$ est ponctuel, on a $|f_i(x)| = |x - t_i|^{-1} = d(x, t_i)^{-1} < r^{-1}$ si $x \notin C(t_i, r)$. Soit $E_r = E \mathbin{..} \bigcup_{T_i \text{ trou ponctuel}} C(t_i, r)$. On voit facilement que E_r est quasi-connexe.

On a donc, si $x \in E_r$, $|f_i(x)| \leqslant \mathrm{Max}(1,r)$ donc

$|a_i f_i(x)| \leqslant \Delta_i \,\mathrm{Max}(1,r) \longrightarrow 0^+$ et la série $\sum_{1 \leqslant i < +\infty^-} a_i f_i$ converge uniformément sur E_r . Comme toute $a_i\, f_i$ y est une fonction analytique, la somme f de cette série l'est aussi. Par suite f converge sur $E' = \bigcup_{r \to 0^+} E_r$ et est analytique sur tout E_r et comme les E_r forment une famille enchaînée (car tout $E_r \ni \infty$), f est analytique sur E'. Mais E' = E. En effet, on a trivialement $E' \subseteq E$ et, si $x \in E$, il existe un $r > 0$ tel que $C(x,r) \subseteq E$. Il n'est donc pas possible qu'il existe un $t_i \notin E$ tel que $x \in C(t_i,r)$ et $x \in E_r \subsetneq E'$.

Le raisonnement précédent s'applique aussi à toute série partielle $\sum_{i \in I} a_i f_i$, où I est un ensemble quelconque (pouvant même être fini) d'entiers > 0. Mais, en plus, toute f_i, $i \in I$, est analytique sur $k' \,..\, \bigcup_{i \in I} T_i$ et si $x \in (k' \,..\, \bigcup_{i \in I, T_i \text{ non ponctuel}} T_i) \,..\, \bigcup_{i \in I, T_i = \{t_i\} \text{ ponctuel}} C(t_i,r)$, on a $|f_i(x)| \leqslant \mathrm{Max}(1,r)$. Il en résulte que si E_I est la composante quasi-connexe de E dans $k' \,..\, \bigcup_{i \in I} T_i$, $\sum_{i \in I} a_i f_i$ converge sur E_I et sa somme $f_{(I)}$ y est une fonction analytique. Montrons que, quel que soit l'ensemble **non vide I d'indices, $f_{(I)} \neq 0$.**

Si $D > d_o$ est un élément de $\Gamma(k)$ considéré précédemment, considérons la circonférence $S = S(t,D)$, où $t \notin E$, qui ne dépend pas du choix de t. En particulier, si T_i est un trou $\in \mathcal{T}$ de E, et si t_i est l'élément choisi de T_i , on a $S(t_i,D) = S$. Comme $S(t,D) \subseteq E_r$ si $r < D$, $\sum_{i \in I} a_i f_i$ converge uniformément sur S(t,D), donc $|a_i| \,\mathrm{Sup}_{x \in S} |f_i(x)| = \Delta_i \, M_{f_i}^{(t_i)}(D) = \Delta_i \, m_i$ tend vers 0^+ quand $i \to +\infty^-$. Ainsi, parmi les indices $i \in I$ il y en a qui rendent $\Delta_i m_i$ maximal.

Mais, puisque tous les $\Delta_i\, m_i$ sont inégaux deux à deux, il n'existe qu'un seul indice de cette sorte, soit $i_o(I)$. Donc $\sigma = \mathrm{Max}_{i \in I, i \neq i_o(I)} \Delta_i\, m_i < \Delta_{i_o(I)}\, m_{i_o(I)}$.

On a donc, pour tout $x \in S$,

$|f_{(I)}(x) - a_{i_o(I)}\, f_{i_o(I)}(x)| = |\sum_{i \in I, i \neq i_o(I)} a_i f_i(x)| \leqslant \sigma$. Or, puisque

$m_i = \mathrm{Sup}_{x \in S} |f_i(x)|$, il existe de $x \in S$ tels que $\theta < \Delta_{i_o(I)} |f_{i_o(I)}(x)| =$

$= |a_{i_o(I)} f_{i_o(I)}(x)|$, d'où résulte que $|f_{(I)}(x)| = |a_{i_o(I)} f_{i_o}(x)| > \theta$ et

$f_{(I)}(x) \neq 0$.

Soit E^* le domaine d'analyticité de f. On a $E^* \supseteq E$ et pour prouver $E^* = E$ il suffit (en vertu du §6) de montrer que $\mathcal{A}_\infty(E') = \mathcal{A}_\infty(E)$, autrement dit que, pour tout i, on a $\mathcal{W}_i(E) = \mathcal{W}_i(E^*)$. Supposons que, pour tous les $j < i$, on ait déjà prouvé cette égalité ainsi que, pour tout $C \in \mathcal{W}_j(E) = \mathcal{W}_j(E^*)$, l'égalité (sur k .. C) $f^{(C)} = \sum_{T_i \subseteq C} a_i f_i$ (ces affirmations sont triviales pour $i = 0$). Si $i = 0$, on a $\mathcal{W}_0(E) = \{C_0\}$ et, puisque $n = +\infty^-$, C_0 n'est pas un trou accessible de E. Donc C_0 est circonférencié, et tout f_i est un élément analytique sur k .. $C_0 \subseteq E_{d_0}$ (où d_0 est le diametre de C_0). Donc f y est aussi un élément analytique et si $f_i = \sum_{j=1}^{+\infty} c_{ij}(X-t_i)^{-j}$, on peut prendre comme suite approximante de f sur k .. C_0 la suite

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} (X-t_i)^{-j}\right).$$

En vertu du 2ème théorème Mittag-Lefflerien, on a $f = \sum_{C' \in T(C_0)} f_{C'}$, où $f_{C'} = \lim_n (g_n)_{C'}$, où visiblement

$$(g_n)_{C'} = \sum_{1 \leq i \leq n, t_i \subseteq C'} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(X-t_i)^{-j}\right).$$

Donc, on a $\lim_n (g_n)_{C'} = \sum_{1 \leq i < +\infty^-, T_i \subseteq C'} a_i \left(\sum_{j=1}^{+\infty} c_{ij}(X-t_i)^{-j}\right) = \sum_{T_i \subseteq C'} a_i f_i$

Il en résulte que $f_{C'} \neq$ ou $= 0$, selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas des trous $T_i \in \mathcal{T}$ tels que $T_i \subseteq C'$, ce qui, étant donné que $\mathcal{T}$ est un ensemble générateur de $\mathcal{T}(E)$, équivaut à l'existence resp. non-existence, d'un $T \in \mathcal{T}(E)$ tel que $T \subseteq C'$, autrement dit à ce que C' .. E soit non-vide resp. vide. Mais C' contient des points ou f n'est pas prolongeable si et seulement si $f_{C'} \neq 0$, ainsi $C' \therefore E^* \neq \emptyset \Leftrightarrow C' .. E \neq \emptyset$. Comme il y a au moins deux $C' \in T(C_0)$ distincts non-contenus dans E, il en résulte qu'ils ne sont pas, non plus, contenus dans E^* et que

C_o est le plus petit cercle contenant $k' \,..\, E^*$, ce qui prouve $\mathcal{W}_o(E^*) = \mathcal{W}_o(E)$.

Si $i > 0$, il suffit de prouver que, pour tout $C \in \mathcal{W}_{i-1}(E) = \mathcal{W}_{i-1}(E^*)$, on a $\mathcal{W}_{i,C}(E) = \mathcal{W}_{i,C}(E^*)$, et que pour tout $C^* \in \mathcal{W}_{i,C}(E)$, on a $f^{(C^*)} = \sum_{T_i \subsetneq C^*} a_i f_i$.

Si $C \in \mathcal{W}_{i-1}(E)$, autrement dit si C est un trou accessible $T_j \in \mathcal{T}$, on a, d'abord, $\mathcal{W}_{i,C}(E) = \emptyset$ et, f est prolongeable dans C si et seulement si $f^{(C)}$ l'est. Or, puisque $C = T_j$, on a $f^{(C)} = a_j f_j$ et f_j n'est pas prolongeable dans C. Ainsi, C est aussi un trou accessible de E^*, d'où résulte $\mathcal{W}_{i,C}(E^*) = \emptyset = \mathcal{W}_{i,C}(E)$. Supposons maintenant $C \notin \mathcal{W}_{i-1}(E)$. Alors C est circonférencié, f est un élément analytique sur $k' \,..\, C$, on a $f^{(C)} = \sum_{T_i \subsetneq C} a_i f_i$ et f est prolongeable à un $x \in C$ si et seulement si $f^{(C)}$ l'est. En appliquant la même méthode que pour C_o, on voit que $f^{(C)} = \sum_{C' \in T(C)} (f^{(C)})_{C'}$ et que $(f^{(C)})_{C'} = \sum_{T_j \subsetneq C'} a_j f_j$, d'où résulte que $C' \,..\, E \neq \emptyset \iff C' \,..\, E^* \neq \emptyset$. On a $\mathcal{W}_{i,C} = \{D(C');\ C' \in T(C),\ C' \,..\, E \neq \emptyset\}$, où $D(C')$ est le plus petit cercle contenant $C' \,..\, E$, autrement dit contenant tous les $T_j \subsetneq C'$. La fonction $f^{(C)}$, donc aussi f, est prolongeable à un $x \in C'$ si et seulement si $(f^{(C)})_{C'}$ l'est. Or, ou bien $D(C')$ est un trou accessible de E, donc $D(C') = T_j$, ou T_j est l'unique trou contenu dans C', ou bien $D(C')$ est circonférencié et si d' est son diametre, il existe deux trous T_{j_1}, $T_{j_2} \in \mathcal{T}$, contenus dans C' et tels que $d(T_{j_1}, T_{j_2}) = d'$; ce qui implique que les diametres de ces trous $< d'$. Dans le premier cas, on a $(f^{(C)})_{C'} = a_j f_j$. C'est donc une fonction analytique sur $k' \,..\, T_j$ non prolongeable dans T_j et $T_j = D(C')$ est un trou accessible de E^*, qui est son seul trou $\in C'$. Dans le second cas, tous les f_j, où $T_j \subsetneq C'$, sont des éléments analytiques sur $k \,..\, D(C')$ et la série $\sum_{T_j \subsetneq C'} a_j f_j$ converge uniformément sur cet ensemble, donc sa somme y est un élément analytique $f^{(D(C'))}$. Or, si $T_{j_o} \subsetneq C$,

$$f^{(D(C'))} - a_{j_o} f_{j_o} = \sum_{T_j \subseteq C,\, j \neq j_o} a_j f_j$$ est une fonction analytique sur tout ensemble quasi-connexe de k' non-disjoint avec E et disjoint avec $\bigcup_{T_j \subseteq C',\, j \neq j_o} T_j$, or, $[k \,..\, D(C')] \cup C(t_{j_o}, d'^-)$ est un tel ensemble, donc $f^{(D(C'))} - a_{j_o} f_{j_o}$ y est analy-

tique, ce qui montre que $f^{(D(C'))}$ est prolongeable à un $x \in C(t_{j_o}, d'^{-})$ ssi, f_{j_o} l'est. Ainsi, $f^{(D(C'))}$ (et aussi $(f^{(C)})_{C'}$ et f) n'est pas prolongeable dans T_{j_o} et $T_{j_o} \cap E^* = \emptyset$. Ainsi, $C' \,..\, E^* \supseteq \bigcup_{T_j \subseteq C'} T_j$ et, en particulier T_{j_1}, T_{j_2} tels que $d(T_{j_1}, T_{j_2}) = d'$. Donc, le diametre du plus petit cercle $\supseteq C' \,..\, E^*$ est $\geqslant d$, et comme ce cercle $\subseteq D(C')$, il est égal à $D(C')$. D'où résulte que $\mathcal{W}_{i,C}(E^*) = \mathcal{W}_{i,C}(E)$ et, si $C'' = D(C') \in \mathcal{W}_{i,C'}$, on a $f^{(C'')} = (f^{(C)})_{C'} = \sum_{T_j \subseteq C'} a_j f_j = \sum_{T_j \subseteq C''} a_j f_j$ et tout est prouvé.

§ 10. Composition des fonctions analytiques.

Soient $f : F \longrightarrow k$ et $g : G \longrightarrow k$ deux fonctions analytiques de k, où F, G sont des ensembles quasi-connexes (pouvant, en particulier, être les domaines d'analyticité de f, g respectivement). Alors la fonction composée :

$$h = g \circ f = g(f(X))$$

est définie sur l'ensemble

$$H = \{x \in F \;;\; f(x) \in G\}.$$

L'ensemble H n'est pas, en général, quasi-connexe, mais se décompose en réunion (disjointe) des composantes quasi-connexes de ses points (je rappelle que la composante quasi-connexe d'un $x \in H$ est le plus grand sous-ensemble quasi-connexe de H auquel x appartient), qu'on dira ses <u>composantes quasi-connexes</u>. Alors, on peut prouver le

<u>Théorème</u>. <u>Si</u> g <u>est un élément analytique</u> $g \circ f$ <u>est analytique sur toute composante quasi-connexe de son support</u> H.

<u>Démonstration</u>. Soient $g_1, g_2, \dots, g_i, \dots$ une suite approximante de g et $\bar{H}$ une composante quasi-connexe de H. Quel que soit $x \in \bar{H}$, on a $f(x) \in G$, donc, pour tout $i = 1, 2, \dots$, le dénominateur de g_i ne s'annule pas en $f(x)$. Par suite, si $g_i = \frac{\nu_i}{\delta_i}$, où ν_i, δ_i sont des polynômes premiers entre eux, $g_i \circ f = \frac{\nu_i \circ f}{\delta_i \circ f}$, $\nu_i \circ f$ et $\delta_i \circ f$ sont des fonctions analytiques sur $\bar{H}$ et $\delta_i \circ f$ ne s'y annule nulle part. Par suite

$h_i = g_i \circ f$ est une fonction analytique sur $\bar{H}$.

Supposons que $|g_{i+1}(x) - g_i(x)| \leq \mathcal{E}$ partout sur G si $i \geq i(\mathcal{E})$. Mais alors, si $x \in \bar{H}$, on a $|h_{i+1}(x) - h_i(x)| = |g_{i+1}(f(x)) - g_i(f(x))| \leq \mathcal{E}$, car $f(x) \in G$. Ainsi, la suite $h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots$ converge uniformément sur $\bar{H}$ (et même sur H). Visiblement sa limite est $g \circ f = h$. Comme $\bar{H}$ est quasi-connexe, h est analytique sur $\bar{H}$.

Remarque. Ce résultat semble être, sauf d'éventuelles finesses , le plus qu'on peut dire en gros. D'ailleurs, dans le cas complexe, on n'a qu'un résultat guère plus fort, où on remplace les composantes quasi-connexes de H par ses composantes connexes. Si l'on considère les fonctions analytiques $\bar{h}$, $\bar{h}'$, qui sont les restrictions de h à deux composantes quasi-connexes distinctes $\bar{H}$, $\bar{H}'$ de H, il n'y a aucune raison a priori de s'attendre à ce qu'elles soient des restrictions à $\bar{H}$ et $\bar{H}'$ d'une même fonction analytique. En effet, rien ne permet d'exclure à priori les deux possibilités suivantes : a) $\bar{h}$ n'est prolongeable à aucun point de $\bar{H}'$; b) $\bar{h}$ est prolongeable à certains points de $\bar{H}'$, mais son prolongement y est différent de $\bar{h}'$. Toutefois, il aurait été intéressant d'avoir des exemples concrets de chacun de ces deux comportements.

Chapitre II - Prolongement analytique uniforme des fonctions de plusieurs variables ultramétriques.

§ 1. Hyperplans orientés des espaces vectoriels réels. Cas des espaces vecticalisés. Polyédre de Newton et fonction φ d'un ensemble de points.

Notations : Dans tout ce qui suit I désignera l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des n premiers entiers naturels. Si A est un ensemble, la puissance cartésienne A^I sera aussi notée A^n quand cela ne peut pas conduire à des malentendus. Les éléments de $B = A^I$ seront dits vecteurs ou n-vecteurs de A (d'ailleurs, la plupart du temps, B sera effectivement un espace vectoriel réel ou un objet de nature très proche) et seront notés $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou $(a_i;\ i \in I)$ ou simplement (a_i). Si $J \subseteq I$, A^J sera aussi noté B_J et si $b = (a_i; i \in I)$, on notera b_J sa J-composante $(a_i; i \in J)$. En particulier, si $i \in I$, $A^{\{i\}}$ sera aussi noté B_i et a_i sera aussi écrit b_i. Si $(J_1, J_2, \ldots, J_s)$ est une partition de I, on écrira, par abus inoffensif d'écriture, $B = B_{J_1} \times B_{J_2} \times \ldots \times B_{J_s}$ et $b = (b_{J_1}, b_{J_2}, \ldots, b_{J_s})$, le changement de l'ordre des $J_1, J_2, \ldots, J_s$ ne changeant pas ces symboles : en effet, la donnée des sous-ensembles J_1, J_2, ..., J_s et la connaissance de celui de ces ensembles auquel correspond une composante donnée de B ou de C déterminent complètement ce produit cartésien et ce vecteur. Si $a \in A$, $(a)_I$ va désigner le n-vecteur $(a,\dots,a)$ dont toutes les coordonnées sont égales à a et on écrira $(a)_J = ((a)_I)_J$.

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Si $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une base (par rapport à $\mathbb{R}$) de V, elle définit une bijection $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \longrightarrow v = \sum_i \ell_i b_i$ du produit cartésien $\mathbb{R}^I$ (qu'on écrira aussi $\mathbb{R}^n$) sur V. Soit c_B la bijection inverse

$$v = \sum_i \ell_i b_i \to \ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$$

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que les espaces vectoriels V avec une base fixée B. Pour cette raison, les coordonnées ℓ_i de v à la base B en seront dites les <u>coordonnées</u> tout court, et on écrira $v = ((\ell_i))$ ou $v = ((\ell_i; i \in I))$ (on n'écrit pas $v = (\ell_i)$, car cela créerait une confusion avec la notation habituelle $v = (v_i; i \in I)$, où $v_i = \ell_i b_i$ est la <u>b_i-composante</u> de v).

Les $V_i = \mathbb{R} b_i$ seront dites les <u>axes des coordonnées</u>, et on a $V = \oplus_i V_i$. Les $V^{(i)} = \{v \in V \,;\, \ell_i = 0\}$ seront dits les <u>hyperplans de coordonnées</u> perpendiculaires au V_i correspondant. Un vecteur $v = ((\ell_i))$ sera dit <u>rationnel</u> (resp. <u>entier</u>) si tous les ℓ_i le sont. Le vecteur nul sera noté 0 ou 0_I, et il est aussi égal à $((\ell_i = 0;\ i \in I))$.

La base B de V étant fixée, on va définir une certaine extension V^o de V, dont on aura quelquefois besoin, et qu'on appellera le B-<u>étendu</u> de V.
$\mathbb{R}^o = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ étant la droite réelle complète, l'extension considérée consiste à plonger $c_B.V = \mathbb{R}^I$ dans $\mathbb{R}^{oI}$, c'est-à-dire à admettre comme valeurs de coordonnées non seulement les nombres réels finis, mais aussi $\pm\infty$. Autrement dit, V^o sera l'ensemble des sommes formelles $v = \sum_i \ell_i b_i \, [\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^{oI}]$. On étendra à V^o, autant que possible, les opérations de V dont on a besoin. Rappelons que l'addition r+r' est définie pour tous les $r, r' \in \mathbb{R}^o$ sauf pour les couples $(r = +\infty,\ r' = -\infty)$ et $(r = -\infty,\ r' = +\infty)$ et qu'on a alors $(+\infty) + r = r + (\infty) = +\infty$, $(-\infty) + r = r + (-\infty) = -\infty$. Habituellement, la multiplication rr' est définie pour tous les $r, r' \in \mathbb{R}^o$ sauf pour $(r = \pm\infty,\ r' = 0)$ et $(r = 0,\ r' = \pm\infty)$ et, si $a \neq 0$, on pose $(\pm\infty)\, a = a\, (\pm\infty) = \pm\infty$ ou $\mp\infty$ selon que $a > 0$ où $a < 0$. Toutefois,

on ne définit pas le produit de zéro et d'un infini uniquement pour ne pas "trop gâcher" les rapports entre la multiplication et la division (définie habituellement sur $\mathbb{R}^o$). Mais, n'ayant pas à nous servir de division, nous allons définir la multiplication partout en posant $0(\pm\infty) = (\pm\infty)\,0 = 0$. Ceci dit, si $v = \sum \ell_i\, b_i$, $v' = \sum \ell'_i\, b_i$ $(v, v' \in V^o)$, $v + v'$ sera défini si tous les $\ell_i + \ell'_i$ $(i \in I)$ le sont, auquel cas on posera $v + v' = \sum(\ell_i + \ell'_i)\, b_i$. Et, pour tout $r \in \mathbb{R}^o$, rv est défini et $= \sum(r\ell_i)\, b_i$. On notera V^{o+} resp. V^{o-} l'ensemble des $v = \sum \ell_i\, b_i \in V^o$ tels qu'aucun b_i ne soit $= -\infty$ resp. $= +\infty$.

En plus de sa structure compositionnelle, on munira V (et V^o) d'une structure d'ordre (partiel) et d'une topologie. Ce seront les images par ζ_B^{-1} de l'ordre produit et de la topologie produit de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{R}^{on}$), où $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^o$) est muni de son ordre et de sa topologie habituels. Ainsi, $v = ((\ell_i)) \leq v' = ((\ell'_i))$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, $\ell_i \leq \ell'_i$. Si v', v'' sont deux éléments comparables de V^o, par exemple si $v' \leq v''$, $[v', v''; V^o] = \{v \in V^o \;;\; v' \leq v \leq v''\}$ sera dit le <u>segment</u> (ou <u>parallélotope canonique</u>) de V^o d'extrémités v', v''.

Etant donné un segment $\sigma = [v', v''; V^o]$ de V^o, on appelle ses ensembles <u>dimensionnel</u>, resp. <u>codimensionnel</u>, les ensembles $\mathrm{Dim}\,\sigma$, resp. $\mathrm{Codim}\,\sigma$, des indices $j \in I$ tels que $v'_j \neq v''_j$ resp. $v'_j = v''_j$, et leurs nombres d'éléments seront notés $\dim\sigma$ resp. $\mathrm{codim}\,\sigma$ et appelés <u>dimension</u> et <u>codimension</u> de σ. Un segment $\tilde\sigma = [\tilde v', \tilde v'', V^o]$ est contenu dans σ si et seulement si $v' \leq \tilde v'$ et $\tilde v'' \leq v''$. Un segment $\tilde\sigma \subset \sigma$ est dit une <u>face</u> (fermée) de σ si toute coordonnée aussi bien de $\tilde v'$ que de $\tilde v''$ est égale à la coordonnée de même indice soit de v', soit de v''. On appelle ensemble codimensionnel <u>initial</u>, resp. <u>terminal</u>, d'une face $\tilde\sigma = [\tilde v, \tilde v'; V^o]$ de $\sigma = [v, v'; V^o]$ par rapport à σ l'ensemble $\mathrm{Codim}^{(i)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) = \{j \in \mathrm{Dim}\,\sigma \;;\; \tilde v_j = \tilde v'_j = v_j\}$, resp. $\mathrm{Codim}^{(t)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) = \{j \in \mathrm{Dim}\,\sigma \;;\; \tilde v_j = \tilde v'_j = v'_j\}$. On a

$\mathrm{Codim}\,\tilde\sigma = \mathrm{Codim}\,\sigma \cup \mathrm{Codim}^{(i)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) \cup \mathrm{Codim}^{(t)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma)$, cette réunion étant disjointe. On notera $\mathrm{codim}^{(i)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma)$ et $\mathrm{codim}^{(t)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma)$ les nombres d'éléments des ensembles Codim correspondants, et $\mathrm{codim}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) = \mathrm{codim}^{(i)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) + \mathrm{codim}^{(t)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma)$ sera dit la <u>codimension</u> de $\tilde\sigma\,|\,\sigma$. Une face $\tilde\sigma$ de σ est dite <u>initiale</u>, resp. <u>terminale</u>, si $\mathrm{codim}^{(t)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) = 0$, resp. $\mathrm{codim}^{(i)}(\tilde\sigma\,|\,\sigma) = 0$.

Une face $\tilde{\tilde\sigma}$ de σ est dite une <u>sous-face</u> d'une face $\tilde\sigma$ de σ si $\tilde{\tilde\sigma} \subseteq \tilde\sigma$ (et si $\tilde{\tilde\sigma} \subset \tilde\sigma$, elle est dite une sous-face propre de $\tilde\sigma$). Les faces de dimension

0 sont dites <u>sommets</u> de σ , celles de dimension 1 les <u>arêtes</u> de σ et les faces $\tilde{\sigma}$ telles que $\mathrm{codim}(\tilde{\sigma}\,|\,\sigma) = 1$ seront dites les <u>hyperfaces</u> de σ. On appelle <u>intervalle</u> ou <u>segment tronqué</u> un segment σ privé d'un ensemble (pouvant être $\emptyset$) de ses faces. En particulier, un intervalle est dit un segment <u>initialement</u>, resp. <u>terminalement</u>, tronqué si toutes les faces de sa fermeture avec lesquelles il est disjoint sont initiales, resp. terminales. Un intervalle de V^o est dit <u>régulièrement</u> tronqué s'il s'obtient en enlevant à sa fermeture σ certaines de ses hyperfaces.

On appelle la <u>sphère</u> $\Sigma(V)$ de V le quotient $V^* = V \,..\, \{0\}$ par la relation d'équivalence $\equiv$ telle que $v \equiv v' \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists\, r \in \mathbb{R})\,[r > 0 \;\&\; v' = rv]$, et on peut définir de la même manière, la sphère $\Sigma(V^o)$ de V^o. Si $\varsigma \in \Sigma(V)$, tout élément v de ς, où ς est considéré comme un sous-ensemble de V, en est dit un représentant, et ς est dit <u>rationnel</u> s'il possède des représentants rationnels (auquel cas il en possède des entiers). Si $v = ((\ell_i))$ parcourt les représentants de $\varsigma \in \Sigma(V)$, pour tout $i \in I$ fixé, on a en même temps pour tous ces représentants $\ell_i < 0$ ou $\ell_i = 0$ ou $\ell_i > 0$. Si $\varsigma \in \Sigma(V)$, $-\varsigma = \{-v; v \in \varsigma\}$ est encore une classe (mod $\equiv$), dit <u>l'opposé</u> de ς .

Soient W le dual de V, $\langle v,w\rangle$ la forme bilinéaire de dualité (qu'on écrira aussi $\langle\langle w,v\rangle\rangle$ quand on voudra considérer V comme dual de W). Soit $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ une base de W duale de B [autrement dit, $\langle b_i, \beta_j\rangle = \delta_{ij}$] . On appelle <u>hyperplan</u> H de V un sous-ensemble de V tel qu'il existe un couple $(w,u) \in W^* \times \mathbb{R}$ (où $W^* = W \,..\, \{0\}$) tel que $v \in V$ appartienne à H si et seulement si $\langle v,w\rangle = u$. [D'ailleurs, si $v = ((\ell_i))$ et $w = (\lambda_i)$, on a $\langle v,w\rangle = \sum_{i,j} \ell_i \lambda_j \langle b_i, \beta_j\rangle = \sum_i \ell_i \lambda_i$ et on peut écrire "l'équation de H" sous la forme $\sum_i \ell_i \lambda_i = u$. Si $\lambda_i = 0$, on dira que H est <u>parallèle</u> à V_i , et on adoptera une terminologie analogue quand il s'agit d'espaces vectoriels sur un corps autre que le corps réel $\mathbb{R}$.] En particulier, l'ensemble $\{v = ((\ell_i)) \in V \;;\; \ell_q = u\}$ est un hyperplan défini par le couple $(w = ((\delta_{iq}));u)$. Mais la donnée du couple $(w,u) \in W^* \times \mathbb{R}$ permet de définir non seulement l'hyperplan H, mais aussi la partition $\mathcal{H}$ de V en trois classes :

I. <u>Le dessus</u> $\mathcal{H}^{sup} = \{v \in V \;;\; \langle v,w\rangle > u\}$

II. <u>L'hyperplan</u> (déjà défini) $H = H(\mathcal{H}) = \{v \in V \;;\langle v,w\rangle = u\}$

III. <u>Le dessous</u> $\mathcal{H}^{inf} = \{v \in V \;;\langle v,w\rangle < u\}$.

Cette partition de V en sera appelée l'hyperplan <u>orienté</u> $\mathcal{H}$, défini par le vecteur $z = (w,u)$, qui en sera dit un <u>vecteur définissant</u>. Deux vecteurs $z = (w,u)$ et $z' = (w',u')$ définissent un même hyperplan orienté ssi il existe un $r \in \mathbb{R}$ strictement positif tel que $z' = (w',u') = rz = (rw,ru)$. Il existe deux (et deux seulement) hyperplans orientés $\mathcal{H}$ et $-\mathcal{H}$ ayant un même hyperplan $H(\mathcal{H}) = H(-\mathcal{H}) = H$ donné. A savoir, si $\mathcal{H}$ est défini par $z = (w,u)$, $-\mathcal{H}$ l'est par $-z = (-w,u)$, et on a $(-\mathcal{H})^{\sup} = \mathcal{H}^{\inf}$, $(-\mathcal{H})^{\inf} = \mathcal{H}^{\sup}$. Les fermetures (topologiques) dans V de $\mathcal{H}^{\inf}$ resp. $\mathcal{H}^{\sup}$ sont $\mathcal{H}^{\inf} \cup H(\mathcal{H})$ resp $\mathcal{H}^{\sup} \cup H(\mathcal{H})$.

Les composantes $w \in W^*$ des vecteurs $z = (w,u)$ définissant un hyperplan orienté $\mathcal{H}$ de V parcourent une classe $d = d(\mathcal{H})$ (mod $\equiv$) dans W^*, donc un élément de $\Sigma = \Sigma(W)$, dit la <u>direction</u> de $\mathcal{H}$, les hyperplans orientés d'une même direction étant dits <u>parallèles</u>. $\mathcal{H}$ est dit rationnel si sa direction l'est. Si w est un représentant de $d \in \Sigma$, tout hyperplan orienté de direction d est défini par un couple convenable (w,u) et si $u \neq u'$, (w,u) et (w,u') définissent des hyperplans orientés distincts. Si $u' > u$, l'hyperplan orienté de direction d défini par $z' = (w,u')$ est dit <u>plus haut</u> que celui défini par $z = (w,u)$. Si $v \in V$, il existe un et un seul hyperplan orienté de direction d passant par v, à savoir celui défini par $(w, \langle v,w \rangle)$. On dira que le vecteur $z = (w,u) \in W^* \times \mathbb{R}$ définit un hyperplan (non orienté) H s'il définit un hyperplan orienté $\mathcal{H}$ tel que $H = H(\mathcal{H})$. Un $z = (w,u)$ définit $H(\mathcal{H})$ ssi il définit $\mathcal{H}$ ou $-\mathcal{H}$.

On va élargir au B- étendu V° de V la notion d'hyperplan (non orienté) défini par $z = (w,u) \in W^* \times R$. On va d'abord définir la forme bilinéaire $\langle v,w \rangle$ pour certains $v = ((\ell_i)) \in V^\circ$ et $w = ((\lambda_i)) \in W^\circ$, en la considérant comme définie ssi $\sum_i \ell_i \lambda_i$ définie au sens des opérations de $\mathbb{R}^\circ$ (chaque terme $\ell_i \lambda_i$ de cette somme est toujours défini, mais peut être fini ou avoir une des valeurs $-\infty, +\infty$; quant à la somme, elle l'est ssi il n'existe aucune paire d'indices i,j tels que $\ell_i \lambda_i = +\infty$; $\ell_j \lambda_j = -\infty$), auquel cas on posera $\langle v,w \rangle = \sum_i \ell_i \lambda_i$. Cette somme, supposée définie, a une des valeurs $+\infty$ ou $-\infty$ ssi il existe un indice i tel que $\lambda_i \neq 0$ et $\ell_i = \pm\infty$. Si un tel indice n'existe pas (auquel cas la somme est définie) et si $I(w)$ est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\lambda_i \neq 0$, on a $\ell_i \lambda_i = 0$ quand $z = (w,u) \in W^0 \times R$ l'ensemble H des $v \in V^\circ$ tels que $\langle v,w \rangle$ est définie et $\langle v,w \rangle = u$ (donc, en particulier, $\langle v,w \rangle$ est finie et il est visible que $H = (H \cap V_{I(w)})$, $V^\circ_{I\ldots I(w)})$ (on peut écrire, par abus d'écriture inoffensif, $H = (H \cap V_{I(w)} \oplus V^\circ_{I..I(w)})$. On peut aussi définir la notion de l'hyperplan orienté de V^o défini par un $z = (w,u) \in (W^o \,..\, \{0\}) \times \mathbb{R}$, mais alors, en plus des dessus, hyperplan et dessous de $\mathcal{H}$, il y a une quatrième classe, dite domaine d'indétermination. Bien que ces notions présentent de l'intérêt pour étendre autant que possible les notions de convergence et de valeur d'une série de Laurent ultramétrique, je n'en parlerai pas dans le présent exposé, où elles sont superflues

On dira qu'un espace $\mathbb{R}$-vectoriel V est verticalisé quand est fixée une décomposition directe $V = \bar{V} \oplus V'$ de V, où $\bar{V}$, V' sont des sous-espaces de V de codimension 1, resp. de dimension 1, appelés ses composantes horizontale, resp. verticale. Les composantes $\bar{v}, v'$ d'un $v \in V$ dans $\bar{V}$, resp. V', en seront dites aussi composantes horizontale, resp. verticale. Une base B de V sera dite une base de l'espace verticalisé V (ou une base verticalisée de V) si elle est la juxtaposition $(\bar{B}, B' = \{b'\})$ d'une base $\bar{B}$ de $\bar{V}$ et d'une base $B' = \{b'\}$ de V'. On va supposer que la dimension de l'espace verticalisé V est un nombre fini $n+1 \geqslant 2$ et qu'on en fixe une base verticalisée $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$, où $\bar{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est une base de $\bar{V}$ et $B' = \{b' = b_{n+1}\}$ en est une de V' (b' sera dit le générateur vertical de V). Les V_i $(i=1,2,\ldots,n)$ seront dits les axes de coordonnées horizontales de V, tandis que $V_{n+1} = V'$ en sera dit l'axe vertical. De même si, $v = ((\ell_i))$, les $\ell_1, \ldots, \ell_n$ en seront dites les coordonnées horizontales, tandis que $\ell' = \ell_{n+1}$ en sera dite la coordonnée verticale.

La donnée de la décomposition directe $V = \bar{V} \oplus V'$ en détermine une $W = W'' \oplus \bar{\bar{W}}$, où $W'', \bar{\bar{W}}$ sont les espaces orthogonaux des V' resp. $\bar{V}$. Ce sont des sous-espaces de W de dimension n, resp. 1, dites ses composantes coverticale, resp. cohorizontale, et si $w \in W$, ses composantes w'', $\bar{\bar{w}}$ dans W'', resp. $\bar{\bar{W}}$, en seront dites les composantes coverticale, resp. cohorizontale. Si $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ est la base de W duale de B, $\beta'' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ en est une de W'' et $\bar{\bar{\beta}} = (\bar{\bar{\beta}} = \beta_{n+1})$ en est une de $\bar{\bar{W}}$.

Soit $\Sigma = \Sigma(W)$ la sphère de W. Si $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda_{n+1}$ est la coordonnée cohorizontale d'un $w = ((\lambda_i, i = 0,1,\ldots,n+1))$, $\bar{\bar{\lambda}}$ est > 0 ou $= 0$ ou < 0 en même temps pour tous les représentants w d'un $d \in \Sigma$. On dira que d est supérieur si $\bar{\bar{\lambda}} \geqslant 0$ et qu'il est strictement supérieur si $\bar{\bar{\lambda}} > 0$. On appelera l'hémisphère supérieure, resp. strictement supérieure, de W l'ensemble Σ^+, resp. Σ^{++}, des $d \in \Sigma$ de même nom. Les $d \in \Sigma^+ \,..\, \Sigma^{++}$ sont les $d \in \Sigma$, qui sont coverticaux (c'est-à-dire tels que, pour tout $w \in d$, on ait $\bar{\bar{\lambda}} = 0$).

Si $d \in \Sigma^{++}$, il existe un seul représentant $w(d)$ de d, qui soit de la forme $(w''(d), \bar{\bar{\beta}})$ donc $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda_{n+1} = 1$. La composante coverticale $w''(d)$ de ce représentant de d sera appelée <u>l'antipente</u> de d. Si $v = (\bar{v}, v') = ((\ell_i; i=1,2,\dots,n+1))$, on a $\langle v, w(d)\rangle = \langle \bar{v}, w''(d)\rangle + \langle v', \bar{\bar{\beta}}\rangle = (\sum_{1\leq i\leq n} \ell_i \lambda_i) + \ell_{n+1}$, où $w''(d) = ((\lambda_i; i=1,2,\dots,n))$. Si $d \in \Sigma$ est covertical, $-d$ l'est aussi. Sinon, un et un seul des d, $-d$ est supérieur (et il l'est strictement).

Soient $\mathcal{H}$ un hyperplan orienté de V et $d = d(\mathcal{H})$ sa direction. $\mathcal{H}$ (et aussi $H(\mathcal{H})$) est dit <u>vertical</u> si d est coverticale (c'est en effet la condition pour que $H(\mathcal{H})$ soit parallèle à V'). Il est dit <u>supérieur</u> resp. <u>strictement supérieur</u> si $d = d(\mathcal{H})$ l'est, et, dans le second cas, $w''(d)$ est aussi notée $w''(\mathcal{H})$ et dite <u>l'antipente</u> de $\mathcal{H}$. Si H est un hyperplan non-orienté, qui n'est pas vertical, il y a un et un seul hyperplan orienté supérieur $\mathcal{H}$ tel que $H = H(\mathcal{H})$. On l'appelera l'hyperplan supérieur orienté de H et on le notera $\mathcal{H}_{sup}(H)$. On appelera les <u>demi-espaces supérieur</u>, <u>supérieur fermé</u>, <u>inférieur</u>, <u>inférieur fermé</u> de H les ensembles $\mathcal{H}_{sup}(H)^{sup}$, $\mathcal{H}_{sup}(H)^{sup} \cup H$, $\mathcal{H}_{sup}(H)^{inf}$, $\mathcal{H}_{sup}(H)^{inf} \cup H$ respectifs, c'est-à-dire respectivement le dessus, le dessus fermé, le dessous et le dessous fermé de $\mathcal{H}_{sup}(H)$. Si $(\bar{v}, h'(\bar{v}) = h(\bar{v})\, b')$ **est** le point de H (non vertical) donc la composante horizontale est $\bar{v}$, ces demi-espaces sont les ensembles de $v = (\bar{v}, v' = \ell' b')$ tels que respectivement $\ell' >, \geq, <, \leq h(\bar{v})$, autrement dit qui sont respectivement strictement plus haut , plus haut au sens large, strictement plus bas, plus bas au sens large que le point de H de même projection horizontale. Si H est vertical, il y a deux hyperplans orientés sypérieurs $\mathcal{H}$ tels que $H(\mathcal{H}) = H$, et on ne peut pas parler de leurs dessus et dessous en termes de H.

Si H n'est pas vertical, soit $(0, h(H)\, b')$ le point où H coupe l'axe vertical V'. Si $z(d) = (w(d), u)$ est le seul vecteur $z = (w,u)$ définissant $\mathcal{H}_{sup}(H)$ et tel que $w = w(d)$, on a $\langle (0, h(H) b'), w(d) = (w''(d), \bar{\bar{\beta}})\rangle = \langle 0, w''(d)\rangle + \langle h(H)\, b', \bar{\bar{\beta}}\rangle =$
$= h(H)$, donc $h(H) = u$. On appelle $h(H)$ la <u>hauteur</u> de H, et aussi la d-hauteur $h_d(v)$ de tout $v \in H$; où $d = d(\mathcal{H}_{sup}(H))$. On a visiblement, si $v = ((\ell_i; i=1,\dots,n+1))$ et si $w''(d) = ((\lambda_i; i=1,2,\dots,n))$, $h_d(v) = u = \langle v, w(d)\rangle = \langle \bar{v}, w''(d)\rangle + \langle v', \bar{\bar{\beta}}\rangle =$
$= (\sum_{1\leq i\leq n} \ell_i \lambda_i) + \ell_{n+1}$ (on peut étendre la notion de d-hauteur d'un $v \in V$ aux $d \in \Sigma^{+}$ coverticaux et même, aux cas plus généraux, mais cette extension est sans utilité pour cet exposé).

Soit $M \neq \emptyset$ un sous-ensemble d'un espace $\mathbb{R}$-vectoriel verticalisé $V = \bar{V} \oplus V'$. Un $d \in \Sigma^+$ est dit une <u>direction admissible</u> pour M si, pour tout hyperplan orienté $\mathcal{H}$ de direction d, $\mathcal{H}^{\inf} \cap M$ est fini. L'ensemble des $d \in \Sigma^+$ admissibles pour M sera noté Adm (M). Nous allons supposer que Adm $(M) \cap \Sigma^{++}$ a (sur Σ) un intérieur non vide. Si $d \in$ Adm (M), il existe l'hyperplan orienté $\mathcal{L}_d(M)$ de direction d, qui est le plus haut hyperplan orienté de cette direction dont le dessus fermé contient (au sens large) M. Son hyperplan $L_d(M) = H(\mathcal{L}_d(M))$ sera dit <u>l'hyperplan d-tangent</u> à M. Si $d \in$ Adm $(M) \cap \Sigma^{++}$, on note $\varphi_M(w''(d))$ la hauteur $h(L_d(M))$ de $L_d(M)$. Si $d \in$ Adm (M), $L_d(M) \cap M \neq \emptyset$, et si, en plus, $d \in \Sigma^{++}$, les $v \in L_d(M) \cap M$ coïncident avec les points de M dont la d-hauteur est minimale. Ainsi, dans ce cas, $\mathrm{Min}_{v \in M} h_d(v)$ existe et est $\varphi_M(w''(d))$. On peut montrer que Adm (M) est un ensemble convexe de $\Sigma = \Sigma(W)$ (démonstration analogue à celle du cas $n = 1$).

Soit $N(M)$ l'intersection des dessus fermés de tous les hyperplans orientés $\mathcal{H}$ de direction admissible $d(\mathcal{H}) \in$ Adm (M) tels que ces dessus contiennent M. Il est évident que $N(M)$ est aussi l'intersection des dessus fermés des $\mathcal{L}_d(M)$, où d parcourt Adm (M), ou, comme on peut montrer, seulement Adm $(M) \cap \Sigma^{++}$. $N(M)$ est un sous-ensemble convexe de V (ayant, en plus, la propriété que si $v \in N(M)$, tout point plus haut de même composante horizontale est aussi $\in N(M)$), en général de dimension $n+1$, mais pouvant, dans les cas de dégénérescence, être de dimension plus petite. La frontière $\Pi(M)$ de $N(M)$, qui est un polyèdre infini convexe de V, (on le prouve en se servant, en particulier, de la convexité de Adm (M)) s'appelle le <u>polyèdre de Newton</u> de M. Les sommets de ce polyèdre sont forcément des points $\in M$, et tout $L_d(M)$, où $d \in$ Adm (M), touchent M en un ou plusieurs points. On appelle Reg(M) et $Z(M)$ les ensembles des $w''(d)$, $d \in$ Adm $(M) \cap \Sigma^{++}$, tels que $L_d(M)$ touche M en un seul, resp. en au moins deux points, et $d \in$ A dim$(M) \cap \Sigma^{++}$ (et aussi $w''(d)$ correspondant) sera dit <u>régulier</u> ou <u>exceptionnel</u> selon que $w''(d) \in$ Reg(M) ou $w''(d) \in Z(M)$. Si $v = ((\ell_i; i=1,\dots,n+1))$ est un sommet de $\Pi(M)$, on notera Δ_v l'ensemble des $w''(d)$ tels que $L_d(M)$ touche M en v. On peut montrer que Δ_v est un polyèdre convexe fermé de W'', dont les faces sont contenues dans $Z(M)$ tandis que son intérieur est une composante connexe de Reg(M), et $\varphi_M(w'')$ y est la fonction linéaire $\ell' + \langle \bar{v}, w'' \rangle$, car, si $\mathcal{H}$ est un hyperplan orienté de direction d tel que $v \in H(\mathcal{H})$, on a $h_d(v) = \langle v, (w''(d), \bar{\bar{\beta}}) \rangle = \ell' + \langle \bar{v}, w''(d) \rangle$.

Ainsi, la fonction $\varphi_M(w'')$ a les propriétés suivantes :

α) elle est continue ;

β) son domaine de définition $w''(\mathrm{Adm}\ (M) \cap \Sigma^{++})$ admet un recouvrement par une famille de polyèdres fermés à intérieurs disjoints deux à deux, tel que $\varphi_M(w'')$ soit linéaire sur chacun de ces polyèdres.

γ) Elle est concave, c'est-à-dire si, sur quelque ouvert du domaine de définition de φ_M, on a $\varphi_M(w'') = \ell' + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \ell_i \lambda_i$, où $w'' = ((\lambda_i ; i=1,\dots,n))$ et $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \ell'$ sont des constantes réelles, on a, partout sur ce domaine, $\varphi_M(w'') \geqslant \ell' + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \ell_i \lambda_i$.

Si $M \neq \emptyset$ est fini, on a $\mathrm{Adm}\ (M) = \Sigma^{+}$, donc $w''(\mathrm{Adm}(M) \cap \Sigma^{++}) = w''(\Sigma^{++}) = W''$ et les Δ_v forment un recouvrement fini de W''.

$Z(M)$ est l'ensemble des $w''(d)$ pour les $d \in \mathrm{Adm}\ (M) \cap \Sigma^{++}$ tels que $L_d(M)$ touche M en au moins deux points distincts $v = ((\ell_i))$ et $v^* = ((\ell_i^*))$, ce qui implique $\ell_{n+1} + \langle \bar{v}, w''(d) \rangle = \ell_{n+1}^* + \langle \bar{v}^*, w''(d) \rangle$. Ainsi, chaque $w'' \in Z(M)$ appartient à un hyperplan d'équation $\langle \bar{v} - \overline{v^*}, w'' \rangle = \ell_{n+1}^* - \ell_{n+1}$ de W'', et ces hyperplans sont rationnels si les projections horizontales $\bar{v}$ des $v \in M$ le sont toutes. Si M est fini, le nombre de ces hyperplan "exceptionnels" de W'' l'est aussi et $Z(M)$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini d'hyperplans de W''.

§ 2. Géométrie dans k'^n

Soit $k' = k \cup \{\infty\}$ le projectivisé d'un corps densement valué k, dont soient $\Gamma(k)$ le groupe de valuation (et $m(k) = \mathrm{Log}\ \Gamma(k)$ le module de valuation) et $\bar{k}$ le corps résiduel. Etant donné deux points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de k'^I (où $I = \{1,2,\dots,n\}$; on notera k'^I aussi k'^n quand cela ne risque pas de créer les confusions), le vecteur $d(x,y) = (d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \dots, d(x_n, y_n)) \in \mathbb{R}_+^{\circ I}$ (où $\mathbb{R}_+^{\circ} = \{r \in \mathbb{R}^{\circ} ; r \geqslant 0\}$) sera dit la polydistance (ou, simplement, la distance) des x,y, et $|x| = d(x,0) = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ sera appelée la valuation de x. Comme cela a été déjà dit au §1, on considerera $\mathbb{R}^{\circ n}$, et aussi sa partie $\mathbb{R}_+^{\circ n}$, comme ensembles partiellement ordonnés par leur ordre produit, et ces ensembles partiellement ordonnés sont des treillis complets. En particulier, si $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ et $r' = (r'_1, r'_2, \ldots, r'_n)$ sont $\in \mathbb{R}^{\circ I}$, on a $\mathrm{Sup}(r,r') = (\mathrm{Max}(r_1,r'_1), \mathrm{Max}(r_2,r'_2), \ldots, \mathrm{Max}(r_n,r'_n))$ et $\mathrm{Inf}(r,r') = (\mathrm{Min}(r_1,r'_1), \mathrm{Min}(r_2,r'_2), \ldots, \mathrm{Min}(r_n,r'_n))$. Ceci posé, la distance qu'on vient de définir satisfait bien aux axiomes des espaces ultramétriques :

I) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$; II) $d(x,y) = d(y,x)$; III) $d(x,z) \leqslant \sup[d(x,y), d(y,z)]$

Un tel espace, ou la distance prend ses valeurs dans un ensemble partiellement ordonné, qui est un demi-treillis supérieur, sera dit, selon la terminologie de mon élève, M. Guennoun, un <u>espace hièrarchimétrique</u>. On appellera <u>proximité</u> des x,y le vecteur $p(x,y) = -\mathrm{Log}\, d(x,y) = (-\mathrm{Log}\, d(x_1,y_1), -\mathrm{Log}\, d(x_2,y_2), \ldots, -\mathrm{Log}\, d(x_n,y_n))$, et on appelera <u>ordre valuatif</u> de x le vecteur $\omega(x) = p(x,0) = (\omega(x_1), \omega(x_2), \ldots, \omega(x_n))$. Si $a \in k^I$: considérons les applications $\theta_a : x \longrightarrow d(a,x)$ $(x \in k^I)$ et $\pi_a : x \longrightarrow p(a,x)$. Si $A \subseteq k'^I$ et $a \in k^I$, $\theta_a A$ et $\pi_a A$ seront dit les ensembles des <u>distances</u> resp. <u>des proximités</u> de A par rapport à a. L'ensemble $A \subseteq k'^n$ sera dit a-<u>saturé</u> (terminologie de Robba), si $A = \theta_a^{-1}.(\theta_a A)$.

Ordonnons également, la puissance cartésienne $\underset{\sim}{S}^I$ (qu'on écrira aussi $\underset{\sim}{S}^n$) de la droite semi-réelle $\underset{\sim}{S}$ par son ordre produit (c'est aussi un treillis complet). Si $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) \in \underset{\sim}{S}^I$, $r(\rho) = (r(\rho_1), r(\rho_2), \ldots, r(\rho_n))$ sera dit la <u>valeur réelle</u> de ρ et $\xi(\rho) = (\xi(\rho_1), \xi(\rho_2), \ldots, \xi(\rho_n))$ son <u>espèce</u>. On dira que l'espèce de ρ est <u>non-positive</u>, resp. <u>non-négative</u>, si, parmi les $\xi(\rho_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ il n'y en a aucun, qui soit $= +$, resp. $= -$. Si $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^\circ \cdot\cdot \{-\infty\})^I$, on posera $r^{(-)} = (r_1^-, r_2^-, \ldots, r_n^-)$.

On appelera <u>polycercle</u> (ou simplement <u>cercle</u> quand cela ne conduira pas aux confusions) de centre $a \in k'^n$ et de rayon $\rho \in \underset{\sim}{S}^n$, tel que $\xi(\rho)$ soit non-positive, l'ensemble, $C(a,\rho) = \{x \in k'^n \; ; \; d(a,x) \leqslant \rho\}$. Si $\rho \in (\Gamma(k) \cup \{0,+\infty\})^n$, $C(a,\rho)$ est dit <u>circonférencié</u>, sinon il est dit non-circonférencié. Il est dit <u>anti-circonférencié</u> si $\rho = r^{(-)}$ ou $r \in \mathbb{R}^{\circ n}$, un ensemble $\tilde{\sigma} \in k'^n$ est dit un <u>pseudo-polycercle de centre</u> $a \in k^n$ si $\tilde{C} = \{x \in k'^n \; ; \; d(a,x) \in \tilde{\sigma}\}$, où $\tilde{\sigma}$ est un segment terminalement tronqué de $\mathbb{R}_+^{\circ n}$ d'origine 0.

Comme dans le cas $n = 1$, chaque point d'un poly-cercle en est un centre (avec le même rayon) et deux poly-cercles non-disjoints sont concentriques. Mais, contrairement à ce cas, deux polycercles concentriques ne se contiennent pas toujours l'un l'autre (ceci à lieu si leur rayons sont comparables). Mais deux polycercles d'un même rayon sont toujours disjoints ou égaux. D'ailleurs bien d'autres propriétés d'espaces hyperultramétriques, dont la distance prend ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné sont en défaut dans les espaces analogues, dont la distance prend, comme ici, ses valeurs dans un ensemble, qui n'est ordonné que partiellement tout en étant un demi-treillis supérieur (c'est-à-dire possédant le suprémum de ses deux éléments quelconques) : ainsi, les triangles ne sont pas forcément isocèles, ce qui ne permet pas de conclure de $d(b,c) < d(a,c)$ à $d(a,b) = d(a,c)$; les distances d'un point en dehors d'un cercle aux points du cercle ou les distances mutuelles de points de deux cercles disjoints ne sont pas forcément toutes égales, etc...
Comme conséquence, si l'intersection d'une famille de polycercles non-disjoints est encore un polycercle, par contre la réunion d'une telle famille n'en est pas toujours un. [Toutefois, la réunion d'une famille de polycercles totalement ordonnée par inclusion en est encore un, ce qui montre que les polycercles forment une famille inductive]. Une telle réunion (qu'on peut aussi définir comme réunion d'une famille de polycercles concentriques) sera dite un <u>multicercle</u>, et les multicercles d'un centre fixe (on appelle un centre d'un multicercle tout son point a tel que le multicercle considéré est une réunion de polycercles de centre a; contrairement au cas des polycercles, n'importe quel point du multicercle n'en est, en général, pas un centre) forme un treillis complet par rapport à l'intersection et la réunion. Un pseudo-polycercle est en général un multicercle. En effet, si I est l'ensemble des indices i tels que, pour un $\rho \in S^n$ donné d'espèce non-positive on ait $\xi(\rho_i) = 0$, et si, pour $i \in I$, $\rho' = \rho^{(-,i)} = (\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n)$ est tel que $\rho'_j = \rho_j$ si $j \neq i$ et $\rho'_i = \rho^-_i$, on a $\tilde{C}(a;\rho) = \bigcup_{i \in I} C(a;\rho^{(-i)})$. On a, visiblement,

$C(a;\rho) = C(a_1;\rho_1) \times C(a_2;\rho_2) \times \dots \times C(a_n;\rho_n)$. Si $\rho < \rho'$, $C(a;\rho')$ est une réunion de cercles (forcément disjoints) de rayon ρ. On notera $C(a,\rho')/C(0,\rho)$ l'ensemble des cercles de rayon ρ contenus dans $C(a,\rho')$. Visiblement, il s'identifie avec le produit cartésien $C(a_1,\rho'_1)/C(0;\rho_1) \times C(a_2;\rho'_2)/C(0;\rho_2) \times \dots$ $\dots \times C(a_n;\rho'_n)/C(0;\rho_n)$. En particulier, $C(0;\rho')/C(0;\rho)$ s'organise ainsi en groupe additif, somme directe $\bigoplus_i C(0;\rho'_i)/C(0;\rho_i)$ des groupes additifs

$C(0;\rho'_i)/_{C(0,\rho_i)}$ et si $\rho' = (1,1,\dots,1)$, [donc

$\rho < (1,1,\dots,1)]$, $C(0;(1,1,\dots,1))/_{C(0;\rho)}$ devient un anneau, somme directe des anneaux $C(0;1)/_{C(0;\rho_i)}$. En particulier, si $\rho' = (1,1,\dots,1)$ et $\rho = \rho'^{(-)} = (1^-, 1^-,\dots,1^-)$, $C(0;(1,1,\dots,1))/_{C(0;(1^-,1^-,\dots,1^-))}$

s'identifie avec $\bar{k}^n = \underbrace{\bar{k} \oplus \bar{k} \oplus \dots \oplus \bar{k}}$ et peut être considéré comme une $\bar{k}$-algèbre. Si $r \in \Gamma(k)^n$ et si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in k^n$ est tel que $|u| = r$, l'auto-application $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de k'^n telle que $x'_i = u_i^{-1} x_i$ induit une bijection de $C(0,r)/_{C(0,r^-)}$ sur $C(0;(1,1,\dots,1))/_{C(0;(1^-,1^-,\dots,1^-))}$.

Si $r \in (\Gamma(k) \cup \{+\infty, 0\})^n$ et si $a \neq \infty$, on appelle <u>polycirconférence</u> (qu'on dira souvent circonférence) <u>de centre</u> a <u>et de rayon</u> r l'ensemble $S(a, r)$ des $x \in k'^n$ tels que $d(a,x) = r$. Visiblement, si $\rho < r$, $S(a,r)$ est une réunion de cercles de rayon ρ et si, pour tout i, $d(a_i,a'_i) < r_i$, on a $S(a',r) = S(a,r)$. En particulier, quand on identifie $C(0;(1,1,\dots,1))/_{C(0;(1^-,1^-,\dots,1^-))}$ avec $\bar{k}^n$,

$S(0;(1,1,\dots,1))/_{C(0;(1^-,1^-,\dots,1^-))}$ s'idenditife avec $\bar{k}^{*n} = \bar{k}^* \times \bar{k}^* \times \dots \times \bar{k}^*$.

Si $A \subseteq k'^n$ et $a \in k^n$, on appele <u>rayon</u> (que, dans le cas où A est un cercle, on fera suivre du mot "propre") de A par rapport au centre a le supremum, sur $\underline{S}^n$,

$$r_a(A) = \operatorname{Sup}_{x \in A} d(a,x)$$

de la distance $d(a,x)$ entre a et x, où x parcourt A. De même, le supremum sur $\underline{S}^n$

$$d(A) = \operatorname{Sup}_{(x,y) \in A \times A} d(x,y)$$

de la distance mutuelle des points x,y de A sera dit le <u>diamètre</u> de A. Visiblement, $r_a(A)$ est le rayon propre du plus petit cercle de centre a contenant A, donc, si

$a \in A$, il ne dépend pas du choix de a et, par suite, est aussi égal à

$\operatorname{Sup}_{a \in A} r_a(A) = \operatorname{Sup}_{a \in A} \operatorname{Sup}_{x \in A} d(a,x) = \operatorname{Sup}_{(a,x) \in A \times A} d(a,x) = d(A)$.

$\pi_a : x \longrightarrow p(a,x)$ est une application de k'^n sur $\mathbb{R}^{o\,n}$, qu'on considèrera comme l'étendu V^o de l'espace vectoriel réel $V = \underline{R}^n$ de dimension n. Si l'on fixe comme base de $\underline{V}$ le système de vecteurs $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ tel que b_i (en tant qu'élément du produit cartésien $\mathbb{R}^{o\,n}$) soit $(\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{ni})$ un élément $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ de $\mathbb{R}^{o\,n}$ est aussi $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i b_i$, donc a r_i comme i-ième coordonnée [et peut donc aussi s'écrire $((r_1, r_2, \dots, r_n))$, ce qui rend inutile cette écriture dans le cas considéré]. Un ensemble $A \subseteq k'^n$ sera dit un <u>hyperplan</u> a-<u>proximal</u> s'il est a-saturé et son ensemble de proximités $p_a(A)$ par rapport à a est un hyperplan H de V^o. On dira que A est rationnel si H l'est. Si W est le dual de V muni de la base $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ duale de B, et si $z = (w,u) \in W^* \times \mathbb{R}$ est un vecteur définissant H (ou plus précisément, un des hyperplans orientés $\mathcal{H}$ tels que $H = H(\mathcal{H})$), ce sera donc l'ensemble des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de k'^n tels que $\langle p(a,x) = \omega(x-a), w \rangle = u$, ou, sous une forme plus détaillée, si $w = ((c_i; i=1,2,\dots,n))$, tels que $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i\, \omega(x_i - a_i) = u$. On peut aussi formuler cette condition en terme de distance (ou de valuation) : x appartient à l'ensemble considéré ssi

$\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - a_i|^{c_i} = e^{-u}$. On notera Q_z cet hyperplan a-proximal. Il est à remarquer qu'un $v \in V$ tel que $r_i = +\infty$ ou $-\infty$ appartient à H ssi $c_i = 0$, auquel cas l'appartenance de $v \in V$ à H ne dépend pas de sa i-ième coordonnée ℓ_i, ceci signifie qu'un $x \in k'^n$ tel que $x_i = 0$ ou $x_i = \infty$ n'appartient à Q_z que si l'appartenance d'un $x \in k'^n$ quelconque à Q_z ne dépend pas de sa coordonnée x_i.

Si $I_o \subset I$, l'hyperplan a-proximal Q de k'^I sera dit <u>parallèle</u> à k^{I_o} si l'hyperplan correspondant H de $V \simeq \mathbb{R}^{o\,I}$ l'est à V_{I_o} (autrement dit si l'appartenance d'un $x \in k'^n$ à Q ne dépend pas des valeurs des x_i, $i \in I_o$). On dira aussi, dans ce cas, que Q est parallèle à X_{I_o}.

§ 3. Polyèdre de Newton et fonction φ d'une série de Taylor. Convergence, séries de Taylor, leurs fonctions φ, $\tilde{M}$,M, inégalités de Cauchy. Zéros des séries de Taylor. Fonctions méromorphes.

Nous allons considérer les fonctions de n variables ultramétriques, variant dans un corps valué complet k (généralement supposé algébriquement clos, donc à corps résiduel $\bar{k}$ infini et à valuation dense). D'ailleurs, dans certaines questions pourront intervenir plusieurs systèmes de tels variables (variant dans un même k) : X_1, X_2, ..., X_n ; Y_1, Y_2, ..., Y_n, ... Quelquefois, on considérera les valeurs de ces variables dans l'ensemble un peu plus grand, à savoir dans le projectivisé $k' = k \cup \{\infty\}$ de k.

Du point de vue des notations, nous allons adopter les conventions suivantes déjà anciennes (introduites indépendemment par moi-même[25] et par M. Laurent Schwartz[26], à moins que quelqu'un ne l'ait fait auparavant) : on notera X,Y,... les vecteurs $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, ... Si $X_i = x_i$ est un système de valeurs des X_i dans k', on notera, également, x le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et on dira que x est une valeur de X. Les valeurs possibles du vecteur (ou "système") X occupent évidemment k'^I où $I = \{1,2,\ldots,n\}$. On aura, d'ailleurs, à considérer les vecteurs de nature intermédiaire, dont certaines coordonnées sont des variables et d'autres constantes $\in k'$, tel le vecteur $U = (X_1, X_2, \ldots, X_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$. Quels que soient les vecteurs de ce type, on définit leur addition et multiplication comme addition et multiplication par composantes); par exemple,

$X+x = (X_1+x_1, X_2+x_2, \ldots, X_n+x_n)$, $Xx = (X_1x_1, X_2x_2, \ldots, X_nx_n)$.

$Z^n = Z^I$ étant considéré comme un $\mathbb{Z}$-module , muni, en plus, de son ordre produit, soit $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in Z^n$. Si $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$, où les U_i sont des expressions quelconques pouvant se multiplier commutativement, on posera $U^i = U_1^{i_1} U_2^{i_1} \ldots U_n^{i_n}$. Visiblement, on a $U^{i'+i''} = U^{i'} U^{i''}$ et, pour tout $z \in Z$, $U^{zi} = (U^i)^z = (U^z)^i$, où $U^z = (U_1^z, U_2^z, \ldots, U_n^z)$.

[Bien que je ne m'en servirai pas, je mentionne encore les notations suivantes, qui peuvent être utiles dans l'étude formelle des série de puissances : on pose $i! = i_1! \, i_2! \ldots i_n!$ et si $i \in Z^n$ est $\geqslant 0 = (0,0,\ldots,0)$, on a la formule de binôme

(25) Voir [12], p. 128-129.
(26) Voir [20], p. 14-15.

$(X+Y)^i = \sum_{0 \leq i' \leq i} \frac{i!}{i'!(i-i')} X^{i'} Y^{i-i'}$ ainsi que les formules analogues pour le "multinôme" $(X+Y+Z+\dots)^{i'}$] .

Soit $f(X) = \sum_{i \in \mathcal{P}_n} a_i X^i$ une série de Taylor en $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, où $\mathcal{P}_n$ est l'hyperquadrant principal $\{i \in \mathbb{Z}^n, i \geqslant 0\}$ de $\mathbb{Z}^n$ (on écrira aussi $i \geqslant 0$ au lieu de $i \in \mathcal{P}_n$ quand il sera clair qu'il s'agit des $i \in \mathbb{Z}^n$), dont on va supposer qu'elle converge dans un voisinage de 0. Soit $m(k) = -\operatorname{Log} \Gamma(k)$ le module de valuation de k. Considérons le produit cartésien (dans un certain ordre) $\mathbb{R}^{n+1}$ de n+1 exemplaires de $\mathbb{R}$. On va le considérer comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V avec une base canonique $(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} = b')$ telle que $b_q = (\delta_{jq}, 1 \leq j \leq n+1)$. On va verticaliser cet espace en prenant comme sa composante horizontale son sous-espace linéaire $\bar{V} = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}) \in V ; v_{n+1} = 0\}$ engendré par les $b_1, b_2, \dots, b_n$, et, comme sa composante verticale son sous-espace $V' = \{v \in V ; v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0\}$ engendré par $b' = b_{n+1}$. Faisons correspondre à tout terme non nul $a_i X^i$ de $f(X)$ $(i \in \mathcal{P}_n)$ le point $P_i = (i, \omega(a_i))$ de $V = \bar{V} \oplus V'$, dont la composante horizontale est l'exposant $i \in \mathcal{P}_n$ du terme, et dont la composante verticale est l'ordre $\omega(a_i) = -\operatorname{Log} |a_i| \in m(k)$ de son coefficient a_i [ainsi P_i appartient toujours à $\mathcal{P}_n \times m(k) \subseteq \mathbb{Z}^n \times m(k)$] . Ce point sera dit le <u>point représentatif</u> du terme, et $M^{(f)} = \{P_i ; i \in \mathcal{P}_n, a_i \neq 0\}$ sera dit <u>l'ensemble représentatif</u> de f. Visiblement, si $f \neq 0$, $M^{(f)} \neq \emptyset$. Si $W = W'' \oplus \bar{\bar{W}}$ est le dual (coverticalisé) de l'espace verticalisé V, soient $\Sigma = \Sigma(W)$ sa sphère, Σ^+ et Σ^{++} ses hémisphères supérieure et strictement supérieure .

On appelera <u>ensemble d'admissiblité générique</u>, <u>polygone de Newton</u>, <u>fonction</u> φ et on notera respectivement $\mathrm{Adm}_{gen}(f)$, $\pi(f)$, $\varphi_f(w'')$ les objets correspondants $\mathrm{Adm}(M^{(f)})$, $\pi_{M^{(f)}}$, $\varphi_{M^{(f)}}(w'')$ de l'ensemble représentatif $M^{(f)}$ de f. Si $d \in \mathrm{Adm}_{gen}(f) \cap \Sigma^{++}$, l'hyperplan d-tangent $L_d(M^{(f)})$ à $M^{(f)}$ sera aussi noté $L_d^{(f)}$.

L'hypothèse de convergence de f dans un voisinage de 0 implique que l'intérieur de $\mathrm{Adm}_{gen}(f) \cap \Sigma^{++}$ n'est pas vide. Considérons un système $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in k^{*n}$ où $k^* = k \setminus \{0\}$, des valeurs des systèmes $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ des variables $X_1, \dots, X_n$ tel qu'aucun x_i $(i=1,2,\dots,n)$ ne soit 0 ou ∞ . Cherchons l'ordre

$\omega(a_i x^i)$ d'un terme non-nul $a_i X^i$ de f pour X = x. On a $\omega(a_i X^i) =$
$= \omega(a_i x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}) = \omega(a_i) + \sum_{1 \leq q \leq n} i_q \omega(x_q)$. Si

$w'' = ((\omega(x_1), \omega(x_2), \dots, \omega(x_n))) \in W''$, on a visiblement, puisque
$P_i = ((i_1, i_2, \dots, i_n, \omega(a_i)))$, $\omega(a_i x^i) = \langle \bar{P}_i, w'' \rangle + P_i' = \langle P_i, w \rangle$, où
$w = (w'', \bar{\bar{\mathcal{E}}}) = ((\omega(x_1), \omega(x_2), \dots, \omega(x_n), 1))$. Si d est la classe de w(mod $\equiv$)
(cette classe est $\in \sum^{++}$, car la coordonnée cohorizontale de w est $1 > 0$), on a
donc $\omega(a_i x^i) = h_d(P_i)$. La série $f = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} a_i X^i$ converge pour X = x si, et seulement
si, $h_d(P_i) = \omega(a_i x^i)$ tend vers $+\infty$, sur $\mathbb{R}^\circ$, c'est-à-dire, si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, il
n'y a qu'un nombre fini de termes $a_i X^i \neq 0$ de f tels que $h_d(P_i) < c$, autrement dit
si, en dessous de l'hyperplan de V de direction d (ou d'antipente $\omega(x)$), il n'y a
qu'un nombre fini des points $P_i \in M^{(f)}$. Mais ceci singifie précisément que d est une
direction admissible. Ainsi, f(x), où $x \in k^{*n}$, converge si, et seulement si $\omega(x)$
est l'antipente w"(d) d'un $d = d(x) \in \mathrm{Adm}_{gen}(f) \cap \sum^{++}$. Les $d \in \mathrm{Adm}_{gen}(f) \dots \sum^{++}$
admettent aussi une interprétation, dont je ne vais pas parler ici.

On peut d'ailleurs considérer les valeurs $x \in K^{*n}$, où $K^\bullet$ est une extension valuée arbitraire de k. On peut, en particulier, considérer K tel que $\Gamma(K) = \mathbb{R}_+$, ce qui permet d'interpréter $\mathrm{Adm}_{gen}(f) \cap \sum^{++}$ comme l'ensemble des $d \in \sum^{++}$ tel que f(x) converge si un système de valeurs $x \in K$, où K est une extension valuée de k, est tel que $\omega(x) = w''(d)$

Si $d \in \sum''$ et si $w''(d) = ((c_1, c_2, \dots, c_n))$ est l'antipente de d, posons $r(d) = e^{-w''(d)} = ((e^{-c_1}, e^{-c_2}, \dots, e^{-c_n}))$. Visiblement $d \longrightarrow w''(d)$ est une bijection de $\sum^{++}$ sur l'espace vectoriel réel W" de dimension n, et $w'' \longrightarrow r = e^{-w''}$ est la bijection de cet espace sur son hyperquadrant principal ouvert $\mathcal{P}(W'')$. Nous avons ainsi trois arguments possibles pour décrire les phénomènes dans l'ensemble des hyperplans orientés de l'espace verticalisé $V = \bar{V} \oplus V'$ qu'y détermine la donnée de la série de Taylor f : d, $w'' = w''(d)$, $r = e^{-w''}$. Il ne fait pas de doute que, pour chacun de ces arguments, il existe des situations où, pour des raisons surtout psychologiques dues à nos habitudes mathématiques (linéaristes, métriques, topologiques d'un certain type), son emploi parait préférable à celui de deux autres. Dans le cas n=1, il n'y a pratiquement pas de différence entre d et w"(d) (qui est plus simple), et, comme il s'agit en fait (par exemple, pour le domaine de définition et les régions de linéairté de la fonction φ_f) d'intervalles de la droite W" et de leur partition à l'aide des points isolés, l'application $w'' \longrightarrow e^{-w''}$ les transforme en objets de même forme, le léger avantage qu'a l'argument w" du fait que $\varphi_f(w'')$ est linéaire par morceaux ne contre balance pas les avantages intuitifs de l'argument $r = e^{-w''}$ du point de vue des espaces métriques. C'est pourquoi, dans le chapitre I, j'avais employé surtout cet argument. Par contre, si $n > 1$, les avantages de l'argument w" par rapport à r deviennent beaucoup plus grands. Par exemple si $M \neq \emptyset$ est un sous-ensemble de V, le recouvrementde $w''(\mathrm{Adm}(M) \cap \Sigma^{++})$ par les régions de linéarité de $\varphi_M(w'')$ en est un recouvrement par les polyèdres fermés, séparés par des morceaux d'hyperplans de W" , tandis que leurs images par $w'' \longrightarrow e^{-w''}$ sont des "polyèdres exponentiels", objets géométriques beaucoup moins intuitifs. Pour cette raison, de même que M. Robba, dans l'exposé qui suit, je vais généralement employer l'argument w", mais sans tomber dans le dogmatisme de s'interdire l'emploi des autres arguments (d,r) dans des cas appropriés. Quand un sous-ensemble de W" sera défini et noté d'une certaine manière, les ensembles correspondants en arguments d,r seront notés de la même manière, mais en ajoutant comme indice supérieur cet argument. Ainsi, on va noter $\mathrm{Conv}_{\mathrm{gen}}(f)$ le transformé $w''(\mathrm{Adm}\,(f) \cap \Sigma^{++})$ de $\mathrm{Adm}\,(f) \cap \Sigma^{++}$ par $d \longrightarrow w''(d)$, et on va noter $\mathrm{Conv}^{(d)}_{\mathrm{gen}}(f)$ et $\mathrm{Conv}^{(r)}_{\mathrm{gen}}(f)$ les ensembles correspondant $\mathrm{Adm}\,(f) \cap \Sigma^{++}$ et $e^{-\mathrm{Conv}_{\mathrm{gen}}(f)}$ en arguments d, resp. r. Avec cette notation, f(X) converge pour $x \in k^{*n}$ ssi $\omega(x) \in \mathrm{Conv}_{\mathrm{gen}}(f)$ [ou, ce qui est équivalent, $|x| \in \mathrm{Conv}^{(r)}_{\mathrm{gen}}(f)$] si $d = d(x)$, on a alors $d \in \mathrm{Adm}\,(f) \cap \Sigma^{++}$ et le minimum des $\omega(a_i x^i) = h_d(P_i)$ existe et est $\varphi_f(w''(d)) = \varphi_f(\omega(x))$. Donc,

$$\tilde{M}_f(w''(d)) = \mathrm{Max}_i\, |a_i x^i| = \mathrm{Max}_i\, e^{-\omega(a_i x^i)} = e^{-\mathrm{Min}_i\, \omega(a_i x^i)}$$

existe aussi et est $e^{-\varphi_f(\omega(x))}$. On a ainsi les fonctions $\varphi_f(w'')$ et $\tilde{M}_f(w'')$ définies sur $\mathrm{Conv}_{\mathrm{gen}}(f)$. On peut aussi considérer $M_f(r) = \mathrm{Max}_i\, |a_i| r^i$, qui est la transformée de $\tilde{M}_f(w'')$ par $w'' \longrightarrow r = e^{-w''}$ et est définie sur $\mathrm{Conv}^{(r)}_{\mathrm{gen}}(f) \subseteq \mathcal{S}\,(W'')$. Chacune de ces fonctions a ses avantages : $\varphi_f(w'')$ est linéaire par morceaux, tandis que $\tilde{M}_f(w'')$ et $M_f(r)$ sont de même type que les normes des fonctions de l'Analyse classique (en particulier de l'Analyse fonctionnelle). En plus, $M_f(r)$ a la forme monomiale par morceaux en r, très proche de la forme monomiale $a_i X^i$ (en X) des termes de f. Il me semble que, du point de vue des valeurs de ces fonctions, les avantages des $\check{M}_f$ et M_f sont plus sérieux que ceux de φ_f. Ainsi, j'emploierai généralement, la fonction

$M_f(w'')$, sans toutefois m'interdire l'emploi de $\varphi_f(w'')$ ou de $M_f(r)$. On a visiblement: si $\omega(x) \in \mathrm{Conv}_{gen}(f)$, $|f(x)| \leq \tilde{M}_f(\omega(x))$ et si $\omega(x) \in \mathrm{Reg}(f)$ [c'est-à-dire $L^{(f)}_{d(x)}$ touche $M^{(f)}$ en un seul point], on a $|f(x)| = \tilde{M}_f(\omega(x))$.

La série $f(X)$ peut converger pour certaines valeurs $x = (x_1,\dots,x_n)$ telles que certains x_q soient $= 0$, et on peut même donner un sens à $f(x)$ pour certains $x \in k'^n$ tels que certains x_q soient $= \infty$. Visiblement, la fonction $M_f(r) = \mathrm{Max}_i |a_i| r^i$ a un sens pour $r = |x|$ correspondant. Ainsi, pour prendre en considération de telles valeurs de X, il faut étendre Conv(f) à certaines parties de l'étendu $(W'')^o$ de W'' [rappelons que $|0| = 0$, $|\infty| = +\infty$, $\omega(0) = +\infty$, $\omega(\infty) = -\infty$]. Etant donné un $w'' = ((c_1, c_2, \dots, c_n)) \in (W'')^o$, notons $I_{-\infty}(w'')$ l'ensemble des q tels que $c_q = -\infty$, (donc, si $x \in k'^I$ est tel que $\omega(x) = w''$, $I_{-\infty}(w'')$ est l'ensemble des q tels que $x_q = \infty$). De même notons $I_{+\infty}(w'')$ l'ensemble des q tels que $c_q = +\infty$ (donc $x_q = 0$). On dira que $f(X)$ converge pour $X = x$, où certaines x_q peuvent être égaux à ∞, si : a) tous les termes non-nuls $a_i X^i$ de f (autrement dits, tels que $a_i \neq 0$) sont finis (en vertu des règles de multiplication dans k'), ce qui a lieu ssi, pour tout q tel que $x_q = \infty$, on a $i_q = 0$. Si $J \subseteq I$, considérons les termes $a_i X^i$ de $f(X)$ tels que $i_q = 0$ pour tout $q \notin J$. La somme de ces termes est une série de Taylor en $X_J = (X_q; q \in J)$, qui sera notée $f_J(X_J)$ et qui converge aussi sur un voisinage de $0 = 0_J$ de k^J. Ceci posé, décrivons, sans entrer dans les détails de démonstration, l'ensemble $\mathrm{Conv}(f) \subseteq (W'')^o$ tel que $f(x)$, où $x \in k'^I$, converge ssi $\omega(x) \in \mathrm{conv}(f)$.

Soient $I^{(0)}$, $I^{(\infty)}$ deux sous-ensembles disjoints arbitraires de I. Soit $\mathrm{Conv}(f; I^{(0)}, I^{(\infty)}) = \{w'' \in \mathrm{Conv}(f)'', I_{+\infty}(w'') = I^{(0)}, I_{-\infty}(w'') = I^{(\infty)}\}$.
On a, visiblement, $\mathrm{Conv}(f) = \bigcup_{I^{(0)}, I^{(\infty)} \subseteq I, I^{(0)} \cap I^{(\infty)} = \emptyset} \mathrm{Conv}(f; I^{(0)}, I^{(\infty)})$, les $\mathrm{Conv}(f; I^{(0)}, I^{(\infty)})$ forment une partition de Conv(f) et $\mathrm{Conv}(f;\emptyset,\emptyset) = \mathrm{Conv}_{gen}(f)$.
Soient $J_\infty = I \mathbin{..} I^{(\infty)}$, $J = I \mathbin{..} (I^{(0)} \cup I^{(\infty)})$. Alors, on a

$$\mathrm{Conv}(f; I^{(0)}, I^{(\infty)}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } f(X) \neq f_{J_\infty}(X_{J_\infty}) \\ \mathrm{Conv}_{gen}(f_J(X_J)) \oplus \{(+\infty)_{I^{(0)}}\} \oplus \{(-\infty)_{I^{(\infty)}}\} & \text{si } f(X) = f_{J_\infty}(X_{J_\infty}) \end{cases}$$

En particulier $\bigcup_{I^{(0)} \subseteq I} \mathrm{Conv}(f; I^{(0)}, \emptyset)$ s'appelle le domaine de convergence de f <u>dans le fini</u> et sera noté $\mathrm{Conv}_{fin}(f)$. Il est à remarquer que $\mathrm{Conv}_{fin}(f)$ n'est forcement contenu dans la fermeture $\overline{\mathrm{Conv}_{gen}(f)}$ de $\mathrm{Conv}_{gen}(f)$ dans $(W'')^{\circ}$. Prenons, par exemple $I^{(0)} = \{2,3,\ldots,n\}$, et posant $f(X) = \sum_{\substack{i\in Z^{I_0}\\ i\geqslant 0}} A_i(X_1)X^i_{I^{(0)}}$, où $A_i(X_1)$ est une série de Taylor en X_1 , choisissons $A_0(X_1)$ convergeant partout dans k (par exemple, $A_0(X_1) = 0$), et $A_1(X)$ ayant un cercle de convergence fini $C(0,\rho)$, $\rho < +\infty$. Alors, $\mathrm{Conv}_{gen}(f) \subsetneq [-\mathrm{Log}\,\rho,+\infty^-]_{W''_1} \oplus W''_{I_0}$, donc

$\overline{\mathrm{Conv}_{gen}(f)} \subsetneq [-\mathrm{Log}\,\rho,+\infty]_{W''^{\circ}_1} \oplus (W''_{I_0})^{\circ}$, tandis que $\mathrm{Conv}(f;I^{(0)},\emptyset) \supseteq W''_1 \oplus \{(+\infty)_{I_0}\}$.

Si $I(f)$ est l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $f(X)$ dépende effectivement de X_i , on a visiblement $\mathrm{Conv}(f_{I(f)}(X_{I(f)})) = \mathrm{Conv}_{fin}(f_{I(f)}(X_{I(f)}))$ et

$\mathrm{Conv}(f) = \mathrm{Conv}(f_{I(f)}) \oplus (W''_{J(f)})^{\circ}$, où $J(f) = I \,..\, I(f)$.

Si f est un polynôme, $M^{(f)}$ est fini, $\mathrm{Conv}_{gen}(f) = W''$, $\mathrm{Conv}_{fin}(f) = (W'')^{\circ +} =$

$= \{w'' = ((\ell_i; 1\leqslant i\leqslant n))\ ;\ (\forall i)\,[\ell_i \neq -\infty]\}$, $\mathrm{Conv}(f) = (W''_{I(f)})^{\circ +} \oplus (W''_{J(f)})^{\circ}$, donc $\mathrm{Conv}^{(r)}_{gen}(f) = \mathcal{P}(W'')$, $\mathrm{Conv}^{(r)}_{fin}(f) = \overline{\mathcal{P}(W'')}$, $\mathrm{Conv}^{(r)}(f) = \overline{\mathcal{P}(W''_{I(f)})} \oplus \mathcal{P}((W''_{J(f)})^{\circ})$, où

$\mathcal{P}(W'')$, $\mathcal{P}(W''_{I(f)})$, $\mathcal{P}(W''_{J(f)})$, $\mathcal{P}((W''_{J(f)})^{\circ})$ sont des hyperquadrants principaux ouverts des espaces indiqués et $\overline{\mathcal{P}(W'')}$, $\overline{\mathcal{P}(W''_{I(f)})}$ sont les fermetures de $\mathcal{P}(W'')$, resp. $\mathcal{P}(W''_{I(f)})$, dans W'', resp. $W''_{I(f)}$.

Les fonctions $\varphi_f(w'')$, $\tilde{M}_f(w'')$ [et $M_f(r)$] sont définies sur l'ensemble $\mathrm{Conv}(f)$, resp. $\mathrm{Conv}^{(r)}(f)$, tout entier. On a $\varphi_f(w'') = \varphi_{f_{I(f)}}(w''_{I(f)})$ et les égalités analogues pour $\tilde{M}(\ldots)$ et $M(\ldots)$. Pour voir le comportement de ces fonctions, il suffit de se borner au cas $I(f) = I$. On a, sur $\mathrm{Conv}(f;I^{(0)},\emptyset) = \mathrm{Conv}_{gen}(f_{I..I^{(0)}}) \oplus \{(+\infty)_{I_0}\}$,

$\varphi_f((w''_{I..I^{(0)}}, (+\infty)_{I^{(0)}})) = \varphi_{f_{I..I^{(0)}}}(w''_{I..I^{(0)}})$.

Or, on a vu que si $f \neq 0$, il existe un recouvrement de $\mathrm{Conv}_{gen}(f)$ par des polyèdres convexes <u>fermés</u> de W'', qui sont les domaines de linéarité de $\varphi_f(w'')$. Ces

polyèdres sont séparés par des morceaux d'hyperplans $H^{(i,j)}$ $(i,j \in \mathcal{S}_n)$ tels qu'il existe des point $w'' \in \mathrm{Conv}_{gen}(f)$ tels que pour $\omega(x) = w''$ les termes distincts (forcément non nuls) $a_i x^i$ et $a_j x^j$ de $f(x)$ aient une valuation égale $|a_i x^i| = |a_j x^j|$ et soient parmi ses termes maximaux. L'équation de cet hyperplan est $\langle w'',i \rangle + \omega(a_i) = \langle w'',j\rangle + \omega(a_i)$, autrement dit $\langle w'',i-j\rangle = \omega(a_j) - \omega(a_i)$, ce qui montre que cet hyperplan est rationnel (et a sa hauteur $\in \Gamma(k)$). Il coupe l'ensemble (Convexe) $\mathrm{Conv}_{gen}(f)$ selon une section de dimension $n_{i,j} \leqslant n$ (autrement dit, $n_{i,j}$ est la dimension de la plus petite variété linéaire $\Lambda^{(i,j)}$ de W'' contenant $H^{(i,j)} \cap \mathrm{Conv}_{gen}(f)$) et $\mathrm{Conv}_{gen}(f) \cap H^{(i,j)}$ contient **certainement**, étant convexe, un ouvert de $\Lambda^{(i,j)}$. Dès lors, si $Z(M^{(f)}) \cap \mathrm{Conv}_{gen}(f)$ contient un ouvert d'une variété linéaire $\Lambda \subseteq W''$ d'une dimension $n(\Lambda) > 0$, il existe un hyperplan $H^{(i,j)}$ (de tels hyperplans non-disjoints avec Conv(f) seront dits les <u>hyperplans exceptionnels</u> de f) tel que $\Lambda \subseteq H^{(i,j)}$.
En effet, l'ensemble des $H^{(i,j)}$ est au plus dénombrable et si $V \subseteq \Lambda$ est un ouvert $\subseteq Z(M^{(f)}) \cap \mathrm{Conv}_{gen}(f)$, on a, en tout cas, $V \subseteq Z(M^{(f)}) \subseteq \bigcup_{i,j} H^{(i,j)}$, donc les $H^{(i,j)} \cap V \subseteq H^{(i,j)} \cap \Lambda$ forment un recouvrement de V. Si aucun $H^{(i,j)}$ ne contient V, $H^{(i,j)} \cup V$ est une partie d'une sous-variété linéaire de Λ, dont la dimension est inférieur à celle $n(\Lambda)$ de Λ, et l'ouvert V de Λ ne peut pas être recouvert par une famille de tels ensembles dont la cardinalité soit inférieure à la puissance du continu, ce qui est absurde dans le cas considéré.

On peut appliquer ce qui précède à $f_{I..I^{(0)}}(X_{I..I^{(0)}})$, où $I^{(0)} \subseteq I$, ce qui montre que, sur $\mathrm{Conv}(f;I^{(0)},\emptyset) = \mathrm{Conv}_{gen}(f_{I..I^{(0)}}) \oplus (+\infty)_{I^{(0)}}$, les domaines de linéarité de $f(X) = f_{I..I^{(0)}}(X_{I..I^{(0)}})$ sont les **produits** cartésiens de ceux de $f_{I..I^{(0)}}$ sur $\mathrm{Conv}_{gen}(f_{I..I^{(0)}})$ par $\{(+\infty)_{I^{(0)}}\}$, séparés par les "hyperplans" $\tilde{H}^{(i,j)} \oplus \{(+\infty)_{I^{(0)}}\}$ de $W''_{I..I^{(0)}} \oplus \{(+\infty)_{I^{(0)}}\}$, où $\tilde{H}^{(i,j)}$ est un hyperplan de $W''_{I..I_0}$ défini, comme précédemment, par deux termes non-nuls convenables $a_i X^i$ et $a_j X^j$ de $f_{I..I^{(0)}}(X_{I..I^{(0)}})$, autrement dit par deux termes de $f(X)$ tels que, pour tout $q \in I^{(0)}$, on ait $i_q = j_q = 0$. L'équation de $\tilde{H}^{(i,j)}$ est donc $\langle w''_{I..I^{(0)}}, (i-j)_{I..I^{(0)}}\rangle = \omega(a_j) - \omega(a_i)$. Visiblement, $\tilde{H}^{(i,j)} \oplus \{(+\infty)_{I^{(0)}}\}$ est l'intersection de $W''_{I..I^{(0)}} \oplus \{(+\infty)_{I^{(0)}}\}$ avec l'hyperplan $H^{(i,j)}$ de W''^{o} d'équation $\langle w'',(i-j)\rangle = \omega(a_j) - \omega(a_i)$, i.e avec l'étendu de l'hyperplan $H^{(i,j)}$. Or, si $\tilde{H}^{(i,j)} \oplus \{(+\infty)_{I(0)}\}$ contient un point $w'' = (w''_{I..I(0)},(+\infty)_{I(0)})$, qui soit dans l'adhérence dans W''^{o} de $\mathrm{Conv}_{gen}(f)$ sans être dans l'adhérence de sa frontière, a_iX^i et a_jX^j, maximaux en w'', le restant encore sur $\{w''_{I..I(0)}\} \oplus V_{I(0)}$, où $V_{I(0)}$ est un voisinage convenable de $(+\infty)_{I(0)}$ sur $(W''_{I(0)})^{o}$, et, puisque $i_{I(0)} = j_{I(0)} = 0_{I(0)}$, y ont des valuations égales. Ainsi $H^{(i,j)}$ est aussi un hyperplan exceptionnel de f non disjoint avec $\mathrm{Conv}_{gen}(f) = \mathrm{Conv}(f) \cap W''$, qui est, en plus, parallèle à $W''_{I(0)}$. Et on voit que la partie $Z(M^{(f)})$ contenue dans $\overline{\mathrm{Conv}_{gen}(f)} .. (\overline{W'' .. \mathrm{Conv}_{gen}(f)})$ est contenue dans la réunion des hyperplans exceptionnels $H^{(i,j)}$ tels que $H^{(i,j)} \cap Z(M^{(f)}) \cap \mathrm{Conv}_{gen}(f) \neq \emptyset$.

Si $I(f) \neq I$, il est visible que les domaines de linéarité de $\varphi_f(X) = \varphi_{f_{I(f)}}(X_{I(f)})$ et les hyperplans de $(W'')^{o}$, qui les séparent, sont les produits cartésiens de $(W''_{J(f)})^{o}$ par les objets analogues de $(W''_{I(f)})^{o}$ relatifs à $f_{I(f)}(X_{I(f)})$.

Il est immédiat que si Λ est une sous-variété linéaire de W''^{o} (c'est-à-dire l'ensemble de solutions d'un système linéaire, où on admet aussi les équations comme $w''_q = +\infty$ et $w''_q = -\infty$; la dimension d'une telle sous-variété est définie d'une manière évidente), et $Z(M^{(f)}) \cap \Lambda$ contient un ouvert de Λ , il existe un hyperplan exceptionnel $H^{(i,j)} \supseteq \Lambda$ de f.

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> f <u>une série de Taylor telle que</u> $f(0) \neq 0$. <u>Soient</u> $v'' \in \mathrm{Conv}_{gen}(f)$ <u>et</u> $\tilde{v}'' = v''_{I..\{q\}}$. <u>Alors, il existe un</u> $u''_q(\tilde{v}'') \in W''_q$ <u>tel que</u>, <u>si</u> $\hat{v}'' = (\tilde{v}'', u''_q(\tilde{v}''))$, <u>la partie</u> $Z(M^{(f)}) \cap [\hat{v}'',(+\infty)_I]_{W''^{o}} = \{w'' \in Z(M^{(f)});\ w'' \geqslant \hat{v}''\}$ <u>de</u> $Z(M^{(f)})$ <u>est contenue dans une réunion des hyperplans exceptionnels</u> $H^{(i,j)}$ <u>parallèles</u> à W''_q , <u>c'est-à-dire tels que</u> $i_q = j_q$.

<u>Démonstration</u>. Posons $\bar{r} = \mathrm{Exp}(-v'')$, $\eta_q = \mathrm{Exp}(-u''_q(\tilde{v}''))$, $\hat{r} = \mathrm{Exp}(-\hat{v}'')$. f(X) converge sur le cercle circonférencié $C(0,\bar{r})$, donc la valuation $|a_iX^i|$ de ses termes a_iX^i y est bornée supérieurement par une constante M. Posons $f(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(X_{I..\{q\}})X_q^i$. Par

hypothèse $f(0) \neq 0$, on a $f_o(0)$. Si $\omega(x) \geqslant \hat{v}''$, autrement dit $|x| \leqslant \hat{r}$ et si $\theta = \eta_q \bar{r}_q^{-1} < 1$, on a $C(0,\hat{r}) \leqslant C(0,\bar{r})$ et tous les termes de $f_i(X_{I..\{q\}})X_q^i$ y ont la valuation $\leqslant M\theta^i$. Si $\theta < |f(0)| M^{-1} \leqslant 1$, tous les termes de tout $f_i(X_{I..\{q\}})X_q^i$, où $i > 0$, ont leurs valuations $\leqslant M\theta^i \leqslant M\theta < |f(0)|$, ce qui montre que les termes maximaux de $f(X)$ se trouvent parmi ceux de $f_o(X_{I..\{q\}})$. Par conséquent, ou bien $\omega(x)$ est telle qu'il y a, parmi ces termes, un seul maximal, auquel cas $\omega(x) \notin Z(M^{(f)})$, ou bien il y en a au moins deux, $a_i X^i$ et $a_j X^j$, auquel cas puisqu'il s'agit de termes de $f_o(X_{I..\{q\}})$, on a $i_q = j_q = 0$. On a $\omega(x) \in H^{(i,j)}$ et $H^{(i,j)}$ est un hyperplan exceptionnel parallèle à W''_q et $Z(M^{(f)}) \cap [\hat{v}'';(+\infty)_{W''_q}]_{W''^o}$ est contenu dans la réunion de tels hyperplans $H^{(i,j)}$.

Appelons <u>domaine de convergence</u> de $f(X)$ l'ensemble $DC(f)$ des $x \in k'^I$ tels que $f(x)$ converge, autrement dit tels que $\omega(x) \in Conv(f)$; c'est donc l'image de $Conv(f)$ par π_o^{-1}. Soit $x \in DC(f)$ et soient $I^{(0)}$, $I^{(\infty)}$ les ensembles des $q \in I$ tels que $x_q = 0$, resp. $x_q = \infty$, et $J = I..(I^{(0)} \cup I^{(\infty)})$. Quand x est-il un point intérieur de $DC(f)$? Puisque $Conv(f) = Conv(f_{I..I(\infty)}(X_{I...I(\infty)})) \oplus (W''_I(\infty))^o \supseteq$
$\supseteq Conv_{fin}(f)_{I..I(\infty)}(X_{I..I(\infty)})) \oplus (W''_I(\infty))^o$, il est évident que x est un point intérieur de $Conv(f)$ ssi $x_{I..I(\infty)}$ en est un de $DC(f_{I..I(\infty)})$ ou, même, de $DC(f_{I..I(\infty)}) \cap k^{I..I(\infty)}$. Or, puisque $DC(f)$ est 0-saturé, le fait, pour $x_{I..I(\infty)} \in DC(f_{I..I(\infty)}) \cap k^{I..I(\infty)}$, d'être ou de ne pas être un point intérieur de $DC(f_{I..I(\infty)})$ ne dépend que de $\omega(x)$, et x l'est ssi $DC(f_{I..I(0)})^o$ contient un voisinage $0_{I..I(\infty)}$-saturé de $x_{I..I(\infty)}$. Par ailleurs puisque $(W''_{I..I(0)})^o$ est le produit topologique de W''^o_J et de $W''^o_{I(0)}$, on peut prendre, comme un tel voisinage $U_J \times U_{I(0)}$, où U_J est un voisinage 0_J-saturé de x_J et $U_{I(0)}$ est un voisinage $0_{I(0)}$-saturé de $0_{I(0)}$ dans les espaces correspondants. Or, puisque $S(0_J, |x_J|)$ est plus petit voisinage 0_J-saturé de x_J dans k^J (cette circonférence est un ouvert, car, pour tout $q \in J$, $x_q \neq 0$ et $x_q \neq \infty$) et $U_{I(0)}$ contient quelque cercle $C(0_{I(0)}, r_{I(0)})$, où $r_{I(0)} > (0_{I(0)})^+$, on voit que x est intérieur ssi, il existe un tel $r_{I(0)}$ de manière que, si

$\omega_{I(0)} = -\operatorname{Log} r_{I(0)}$, $\{\omega(x_J)\} \oplus [\omega_{I(0)},(+\infty)_{I(0)}]_{W''^o_{I(0)}}$ soit contenu dans

$Conv_{fin}(f_{I...I(\infty)})$.

Ceci implique que $\omega(x) = (\omega(x_j), 0_{I^{(0)}})$ appartient à $\overline{\mathrm{Conv}_{gen}(f_{I..I^{(\infty)}})}$. D'autre part, si $\omega(x)$ est, sur l'espace $W''_J \oplus \{0_{I^{(0)}}\}$, un point intérieur de son intersection avec $\overline{\mathrm{Conv}_{gen}(f_{I..I^{(\infty)}})}$, la condition précédente est satisfaite. Par ailleurs, si $I^{(0)} \neq \emptyset$, x est certainement intérieur.

DC(f) est un multicercle de centre $0 = 0_I$. Soit $C(0,\rho)$ un sous-cercle maximal de DC(f) et soit $a \in C(0,\rho)$. Considérons le changement de variable $t_a : X \longrightarrow X' = X-a$ et posons $f^{(a)}(X') = f^{(a)}(X-a) = f(X)$, autrement dit $f^{(a)}(X) = f(X+a)$. Par les méthodes formelles habituelles, on voit que $f^{(a)}(X)$ est une série de Taylor en X, qui converge partout sur $C(0,\rho)$. Par suite $f^{(a)}(X')$ converge, en tant que fonction de $X = t_a^{-1}.X'$, sur $t_a^{-1}.C(0,\rho) = C(a,\rho) = C(0,\rho)$ et, plus généralement, sur $DC(f)_{0,a} = \bigcup_{x \in DC(f);|x| \geqslant |a|} C(0,|x|)$. Mais si $C(0,\rho)$ est un sous-cercle maximal de DC(f) tel que certaines coordonnées ρ_q de ρ soit strictement inférieures aux $|a|_q$ correspondantes, on voit immédiatement que, pour les valeurs x' de X' telles que, pour de tels q, on ait $|x'|_q = |a|_q$ (ce qui a toujours lieu si $|x|_q = |x'+a|_q < |a|_q$), $f^{(a)}(x')$ converge ssi $x' \in t_a^{-1}.C(0,\rho) \cap DC(f)_{0,a}$. Ainsi, $f^{(a)}(X')$ ne converge pas partout ni sur DC(f), ni sur $t_a^{-1}.DC(f)$, mais seulement, dans chacun de ces deux ensembles, sur sa partie $DC(f)_{0,a}$, qui est à la fois leur intersection et la partie maximale a-saturée de DC(f). Ceci montre, par symétrie, que $DC(f)_{0,a} = DC(f^{(a)})_{0,a}$ et que $f^{(a)}(X')$ converge dans un ensemble, en général plus grand que $DC(f^{(a)})_{0,-a}$, mais tel que $DC(f)_{0,a}$ soit la partie maximale 0-saturée de $t_a^{-1}.DC(f^{(a)})$. Ainsi, le développement $f^{(a)}$ de f autour de a permet, en général, dans le cas de plusieurs variables, de "sortir un peu" de DC(f), en y ajoutant un ensemble $t_a^{-1}.DC(f^{(a)})$ .. DC(f), dont aucune partie n'est 0-saturée, et qu'on va appeler <u>la</u> a-<u>barbe</u> de DC(f). On appelera <u>la barbe</u> de DC(f) la réunion de toutes ses a-barbes, où a parcourt DC(f). L'existence des barbes montre que, dans le cas de plusieurs variables, la méthode de prolongement analytique de Weiertrass n'est pas aussi totalement inefficace que dans le cas d'une seule variable. On peut itérer la construction des barbes, mais **l'efficacité de l'itération reste à prouver.**

Soit $f(X) = \sum_{i \in \mathcal{P}_n} a_i X^i$ une série de Laurent à coefficients dans un corps complet et algébriquement clos k, et considérons une circonférence $S(0,r) \subseteq k$ de son domaine de convergence. Supposons que $r = (0_{I^{(0)}} \times \infty_{I^{(\infty)}} \times r_J)$, où $J = I..(I^{(0)} \cup I^{(\infty)})$. Soit $u = (0_{I^{(0)}}, \infty_{I^{(\infty)}}, u_J) \in S(0,r)$ et soit $\lambda = \lambda^{(r)}$ la transformation $x \longrightarrow \lambda.x = y$, où $y_q = x_q$ ou $= u_q^{-1} x_q$ selon que $q \notin J$ ou $q \in J$. Soit $f'(X) = \sum_{i \in U} a_i X^i$ la somme des termes de f, qui sont maximaux sur $S(0,r)$, donc tels que $a_i r^i = M_f(r)$. La transformation λ transforme f(X) en une série de Taylor $F(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i Y^i$ en Y, qui converge sur $\lambda.S(0,r) = S(0,0_{I^{(0)}} \times \infty_{I^{(\infty)}} \times 1_J)$ et f'(X) en somme $F'(Y) = \sum_{i \in U} b_i Y^i$ des termes maximaux de F(Y) sur cette circonférence, et on a pour tout $i \in U$, $|b_i| = M_f(r)$. Supposons que $M_f(r) \neq 0$, autrement dit $f_J(X_J) \neq 0$. Choisissons un $b \in k$ tel que $|b| = M_f(r)$. Alors, si $b_i' = b^{-1} b_i$, on a $F'(Y) = bG(Y)$, où $G(Y) = \sum_{i \in U} b_i' Y^i$ et $|b_i'| = 1$ pour tout $i \in U$. Or, puisque f(X) est $= f_J(X_J)$ sur $S(0,r)$, $i \in U$ implique $i_q = 0$ si $q \notin J$. Donc, si $x \in S(0,r)$ et $y = \lambda^{(r)}.x$, $i \in U$ implique $b_i' y^i = b_i' y_J^{i_J}$ et, pour tout $q \in J$, on a $|y_q| = |u_q^{-1} x_q| = r_q^{-1} r_q = 1$, donc $|b_i' y^i| = 1$. Il en résulte que, si $x \in S(0,r)$, on a $|f(x)| < M_f(r)$ ssi $G(y) < 1$, ce qui a lieu ssi le reste $\overline{G(y)}$ de G(y) est $\overline{0}$. Or $\overline{G(y)} = \overline{\sum_{i \in U} b_i' y^i} = \overline{\sum_{i \in U} b_i' y_J^{i_J}} = \sum_{i \in U} \overline{b_i'}\, \overline{y}_J^{i_J}$, où $\overline{y}_J = (\overline{y}_q\ ;\ q \in J) = \overline{(y_q)}$. C'est donc, si $J \neq \emptyset$, la valeur, pour $Y_J = \overline{y}_J$, du polynôme non identiquement nul $\overline{G}(Y_J) = \sum_{i \in U} \overline{b_i'}\, Y_J^{i_J} \in \overline{k}[Y_J]$. Or, quand x parcourt $S(0,r)$, y_J parcourt $S(0,1_J)$, donc, $\overline{y}_J$ parcourt $\overline{k}^{*J}$, où $\overline{k}^* = \overline{k}..\{\overline{0}\}$. Mais puisque $\overline{k}$ est algébriquement clos, donc infini, il existe des $\overline{y}_J \in \overline{k}^{*J}$ tels que $\overline{G}(\overline{y}_J) \neq 0$, donc $M_f(r) = \mathrm{Max}_{|x|=r}|f(x)|$. Cette égalité est encore vraie si $J = \emptyset$, car $S(0,r)$ se réduit alors au singleton $\{x = 0_{I^{(0)}} \times \infty_{I^{(\infty)}}\}$, et si $r \in \mathrm{Conv}^{(r)}(f)$, on a $f(x) = a_0$ et $M_f(r) = |a_0|$. Il est à remarquer que si $-\operatorname{Log} r \in \operatorname{Reg}(M^{(f)})$, $f(X)$ a un seul terme maximal sur $S(0,r)$, donc $f'(X)$ et aussi $F'(Y)$, $G(Y)$ et $\bar{G}(Y_J)$ sont des monômes, donc, quel que soit $\bar{y}_J \in \bar{k}^{*J}$ on a $\bar{G}(\bar{y}_J) \neq \bar{0}$ et on a $|f(x)| = M_f(r)$ pour tout $x \in k'^I$ tel que $|x| = r$.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble (forcement propre) $J' \neq \emptyset$ de J et un système de valeurs $\bar{y}_{J'}^{(0)} \in \bar{k}^{J'}$ de $Y_{J'}$ tel que $\bar{G}(Y_J)$ s'annule pour toutes les valeurs $\in \bar{k}^*$ des autres variables. Alors $\bar{G}(Y_J)$ doit être de la forme $\sum_{q \in J'} (Y_q - \bar{y}_q^{(0)})\, \bar{G}_q(Y_J)$, où $\bar{G}_q(Y_J) \in \bar{k}\,[Y_J]$. En effet $\bar{G}(Y_J) - \bar{G}((\bar{y}_{J'}^{(0)}, Y_{J..J'}))$ est un polynôme de la forme précédente. Or, si $\bar{y}_J = (\bar{y}_{J'}^{(0)}, \bar{y}_{J..J'})$, où $\bar{y}_{J..J'}$ est un élément arbitraire de $\bar{k}^{*\, J..J'}$, on a $\bar{G}((\bar{y}_{J'}^{(0)}, Y_{J..J'}))_{(Y_{J..J'} = \bar{y}_{J..J'})} = \bar{G}((\bar{y}_{J'}^{(0)} \bar{y}_{J..J'})) = \bar{0}$ et, par suite $\bar{G}(\bar{y}_{J'}^{(0)}, Y_{J..J'})$ est identiquement nul.

Les résultats précédents restent valables si l'on remplace k par une extension valuée complète et algébriquement close arbitraire K de ce corps, auquel cas la condition $r \in (\Gamma(k) \cup \{0,+\infty\})^I$ se remplace par $r \in (\Gamma(K) \cup \{0,+\infty\})^I$.

On tire de ce qui précède (en remarquant que seule l'infinité de $\bar{k}$ intervenait dans les raisonnement) les deux conséquences suivantes :

I. <u>Inégalités de Cauchy</u>. <u>Si</u> $\bar{k}$ <u>est infini et si</u> $r \in \operatorname{Conv}^{(r)}(f) \cap (\Gamma(k) \cup \{0,+\infty\})^I$, <u>on a</u>

$$M_f(r) = \operatorname{Max}_{x \in S(0,r)} |f(x)| ,$$

<u>donc, pour tout</u> $i \in \mathbb{N}^I$,

$$|a_i| \leqslant \frac{\operatorname{Max}_{x \in S(0,r)} |f(x)|}{r^i} .$$

<u>Remarque</u> : Ce théorème, sous la forme

$$M_f(r) = \operatorname{Sup}_{x \in S(0,r)} |f(x)|$$

reste vrai pour tout k complet, qui n'est pas localement compact. La démonstration, dans le cas de valuation dense, se fait par le même raisonnement que dans le cas $n=1$. Ce même raisonnement établit que, si la valuation est dense, $M_f(r)$ est déjà le suprémum de $|f(x)|$ sur tout sous-cercle anti-circonférencié maximal $C(a,r^{(-)})$, $|a| = r$, de $S(0,r)$.

II. <u>Si</u> $-\mathrm{Log}\, r \in \mathrm{Reg}(M^{(f)})$, f <u>n'a dans aucune extension valuée</u> K <u>de</u> k <u>aucun zéro</u> z <u>tel que</u> $|z| = r$ <u>sauf si</u> $f_J(X_J)$ <u>est identiquement nulle, où</u> $J = \{q \in I \; ; \; r_q \neq 0 \text{ et } r_q \neq +\infty \}$.

<u>Par contre, si</u> $v = -\mathrm{Log}\, r \in Z(M^{(f)}) = \mathrm{Conv}(f) \setminus \mathrm{Reg}(M^{(f)})$ <u>et si</u> k <u>est complet, algébriquement clos et tel que</u> $v \in m(k) \cup \{0 \;\; +\infty\}$, <u>il existe des zéros</u> z <u>de</u> f <u>dans</u> k <u>tels que</u> $|z| = r$ (26)

<u>Démonstration</u>. Pour $n = 1$, ce théorème résulte du lemme de Hensel pour les séries de Taylor. Supposons le prouvé pour $n - 1$ et prouvons-le pour n. Posons $X' = (X_1, \dots, X_{n-1})$, $f(X) = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} a_i X^i = \sum_{s \in \mathbb{N}} f_s(X')X_n^s = \sum_{i' \in \mathcal{S}_{n-1}} f_{i'}(X_n)X'^{i'}$

Supposons que, pour $|x| = r$, les termes maximaux soient les $a_i x^i$, où i parcourt un ensemble, forcément fini, U. Si $v = -\mathrm{Log}\, r \in \mathrm{Reg}(M^{(f)})$, U est un singleton, et quel que soient l'extension valuée K de k et $x \in K'^I$ tel que $|x| = r$, on a $|f(x)| = M_f(r) \neq 0$, à moins que $f_J(X_J)$ soit identiquement nulle, et il n'existe aucun $z \in K$ tel que $f(z) = 0$ et $|z| = r$. Si $r \in Z(M^{(f)})$, U est forcément de cardinal $\geqslant 2$. Supposons d'abord que pour tous les $i \in U$, i_n ait une même valeur s, autrement dit que les termes maximaux sur $S(0,r)$ sont tous des termes de $f_s(X')X_n^s$. Alors, si $i = (i',i_n)$, où $i' = (i_1, \dots, i_{n-1})$ posons $U' = \{i' ; (i',s) \in U\}$. Si $i' \in U'$ et $|x_n| = r_n$, $a_{(i',s)}x_n^s$ est l'unique terme maximal de $f_{i'}(x_n)$ et $|f_{i'}(x_n)| = |a_{(i',s)}|r_n^s$. Par suite, les termes maximaux de $g(X') = f((X',x_n))$, ou $|X'| = r'$, sont les $f_{i'}(x_n)X'^{i'}$, où i' parcourt U'. Comme $i \longrightarrow i'$ est une bijection de U sur U', card $U' \geqslant 2$, donc $r' = (r_1, \dots, r_{n-1}) \in Z(M^{(f)})$ et il existe une valeur z' de X' dans k'^{n-1} telle que $|z'| = r'$ et $g(z') = 0$, donc $z = (z',x_n)$ est un zéro de f tel que $|z| = r$. S'il existe des $i \in U$, pour lesquels leurs i_n sont différents soit $U_n = \{i_n ; (\exists\, i \in \mathcal{S}_{n'}) \, [(i,i_n) \in U]\}$. On a, si $r = (r',r_n)$, $M_f(r) = \mathrm{Max}_{s \in \mathbb{N}}[M_{f_s}(r')r_n^s]$

(26) Ce théorème a été également prouvé par Robba dans [17], I, p. 11.

et $M_{f_s}(r')r_n^s = M_f(r)$ ssi $s \in U_n$. Soit $\varphi(X') = \prod_{s\in U_n} f_s(X')$. Il résulte facilement des raisonnements précédents que $M_\varphi(r') = \prod_{s\in U_n} M_{f_s}(r')$ et, en vertu des inégalités de Cauchy pour k algébriquement clos, il existe une valeur $x' \in k'^{n-1}$ de X' telle que $|x'| = r'$ et que $|\varphi(x')| = M_\varphi(r')$. Mais alors $|f_s(x')| \leq M_{f_s}(r')$ implique que, pour tout $s \in U_n$, on doit avoir $|f_s(x')| = M_{f_s}(r')$, donc les termes $f_s(x')X_n^s$ de $g(X_n)=f((x',X_n))$ tels que $s \in U_n$ sont les termes maximaux de cette série de Taylor en X_n. Comme Card $U_n \geq 2$, on a $-\text{Log } r_n \in Z(M^{(g)})$, donc il existe un zéro $z_n \in k'$ de $g(X_n)$ tel que $|z_n| = r_n$. Mais alors $z = (x',z_n)$ est un zéro de f tel que $|z| = r$. Tout est prouvé

III. Conservons les notations de la discussion qui précède I et II, et supposons que $f_J(X_J) \neq 0$ et que $r_{J..J'} > 0_{J..J'}$. Alors, si, pour un système de valeurs $\bar{y}^{(0)}_{J'} \in \bar{k}^{*J'}$, $\bar{G}((\bar{y}^{(0)}_{J'}, Y_{J..J'}))$ est identiquement nul, il existe un hyperplan exceptionnel de f contenant la variété linéaire L définie par le système d'équations $(\forall q \in J')\ [w''_q = v_q]$, où $v_q = -\text{Log } r_q$.

Démonstration. Soit $v_J = -\text{Log } r_J = (-\text{Log } r_q;\ q \in J)$. Alors, si $w''_J \geq v_J$ et si $w'' = (A(\infty)_{I(0)}, (-\infty)_{I(\infty)}, w''_J)$, $r \in \text{Conv}^{(r)}(f)$ implique $w'' \in \text{Conv}(f)$. Si aucun hyperplan exceptionnel ne passe par $L \ni v = ((+\infty)_{I(0)}, (-\infty)_{I(\infty)}, v_J)$, il existe (27) un $\hat{w}''_{J..J'} > v_{J...J'}$ fini tel que pour tout $w''_{J..J'}$ tel que $\tilde{w}_{J..J'} \geq w''_{J..J'}\ v_{J..J'}$, $w'' = (0_{I(0)}, \infty_{I(\infty)}, v_{J'}, w''_{J..J'})$ soit $\in \text{Reg}(M^{(f)})$ [auquel cas f(X) a, pour les valeurs $x \in k'^I$ telles que $\omega(x) = w''$, un seul terme maximal $a_{i(w'')}X^{i(w'')}$] et que les termes de f(X) maximaux sur S(0,r) [c'est-à-dire quand $\omega(x) = v$] restent strictement supérieurs à ses autres termes quand $\omega(x) = w''$. La condition $\bar{G}(\bar{y}^{(0)}_{J'}, Y_{J..J'}) = 0$ implique, comme on a vu, que $\bar{G}(Y_J) = \sum_{q\in J'} (Y_q - \bar{y}^{(0)}_q)\ \bar{G}_q(Y_J)$, où $\bar{G}_q(Y_J) \in \bar{k}[Y_J]$ et pas tous les $\bar{G}_q$ sont identiquement nuls. Choisissons, pour chaque $q \in J'$, un $y^{(0)}_q \in k$ tel que $|y^{(0)}_q| = 1$ et que $\bar{y}^{(0)}_q$ soit son reste et un polynôme $G_q(Y_J) = \sum c_{q,i} Y_J^i \in k[Y_J]$ tels que tous les $|c_{q,i}|$ soient ≤ 1, que $\bar{G}_q(Y_J)$ soit le polynôme reste de $G_q(Y_J)$ et qu un terme de $G_q(Y_J)$ soit nul si le terme de même degré de $\bar{G}_q(Y_J)$ l'est. Alors, $G^*(Y_J) = \sum_{q\in J'} (Y_q - y^{(0)}_q)\ G_q(Y_J)$ est un polynôme $\in k[Y_J]$ à coefficients entiers, dont le polynôme reste est $\bar{G}(Y_J)$, ce qui montre que les termes de $\overset{*}{G}(Y_J) - G(Y_J)$ sont tous de valuation < 1 sur $S(0_J,1_J)$. Mais alors, si $bG^*(Y_J) = F'^*(Y_J) = F'^*(u_J^{-1}X_J) = f_J'^*(X_J) = f'^*(X)$, on voit que tous les termes de $F'^*(Y_J) - F'(Y_J)$ ont la valuation $< M_f(r)$ sur la même circonférence, donc aussi ceux de $f_J'^*(X_J) - f'(X_J)$ sur $S(0_J,r_J)$ et ceux de $f'^*(X) - f'(X)$ sur $S(0,r)$. Mais la valuation de ceux de $f'(X) - f(X)$ est aussi $< M_f(r)$ sur la même circonférence et, par suite aussi la valuation de ceux de $f'^*(X) - f(X)$. Par suite, si $G^*(Y_J) = \sum c_i Y_J^i$, les termes maximaux de $f(x)$ quand $|x| = r$ (autrement dit, $\omega(x) = v$) sont les $bc_i u_J^{-1} X^i$ provenant des termes de $G^*(Y_J)$ tels que $|c_i| = 1$, et, en choisissant $\tilde{w}''_{J\ldots J'}$ convenable, on peut être certain que ces termes restent aussi maximaux dans le polynôme $f'^*(x)$ pour $\omega(x) = w''$.

Considérons $\hat{w}'' = ((+\infty)_{I^{(0)}}, (-\infty)_{I^{(\infty)}}, v_{J'}, w''_{J\ldots J'})$ tel que $\tilde{w}''_{J\ldots J'} \geqslant w''_{J\ldots J'} > v_{J\ldots J'}$ et $\hat{r} = (0_{I^{(0)}}, (+\infty)_{I^{(\infty)}}, r_{J'}, e^{-w''_{J\ldots J'}})$ correspondant. Considérons la transformation $\hat{\lambda} = \lambda^{(\hat{r})}: X \longrightarrow \hat{Y}$ telle que $\hat{Y}_q = \hat{u}_q^{-1} X_q$, où $\hat{u}_q = u_q$ (donc $\hat{Y}_q = Y_q$) si $q \in I^{(0)} \cup I^{(\infty)} \cup J'$ (ceci est obligatoire pour $q \in I^{(0)} \cup I^{(\infty)}$ et permis pour $q \in J'$, car on a alors $r_q = r_q$) et, bien entendu, $|u_q| = \hat{r}_q$ si $q \in J\ldots J'$. Alors, les termes maximaux de $f^{*\prime}(X) = bG^*(u_J^{-1}X_J)$ pour les valeurs x de X telles que $\omega(x) = w''$ sont les mêmes que ceux de $f(X)$, donc, par hypothèse, il n'y a qu'un seul tel terme, et ce terme ne peut pas dépendre du choix d'un tel x. Il en résulte, en particulier, que $f^{*\prime}(X)$ ne peut s'annuler pour aucun $x \in k^I$ tel que $\omega(x) = \hat{w}''$. Mais si l'on prend un x tel que $x_q = u_q y_q^{(0)}$ pour tout $q \in J'$, on a $f^{*\prime}(x) = bG^*(u_J^{-1}x_J) = b\sum_{q\in J'}(y_q - u_q^{-1}x_q)\,G_q(u_J^{-1}x_J) = 0$, ce qui est absurde et prouve l'affirmation.

Des propriétés de la fonction $\varphi_M(w'')$ et de ce qu'on vient de prouver résultent les propriétés suivantes de la fonction $\tilde{M}_f(w'')$ (en supposant k algébriquement clos):

1°) $\tilde{M}_f(w'')$ est définie sur $\mathrm{Conv}(f) \subseteq (W'')^\circ$ et, si $f \neq 0$, ne peut être nul que si $w'' \notin W''$.

2°) $\tilde{M}_f : \mathrm{Conv}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si l'on munit $\mathrm{Conv}(f)$ de topologie induite par celle de $(W'')^\circ$ et $\mathbb{R}$ de sa topologie habituelle.

3°) Conv(f) est convexe admet un recouvrement par des polyèdres convexes [si l'on donne à ce mot un sens convenable dans $(W'')^o$] aux intérieurs mutuellement disjoints, qui sont des domaines de monomialité maximaux de $M_f(w'')$ dans **Conv**(f). **La réunion des frontières de ces polyèdres [en donnant un sens convenable à ce mot dans** $(W'')^0$**], qui** est $Z(M^{(f)})$ précédemment défini qu'on va appeler le <u>domaine exceptionnel propre</u> de f, est contenue dans la réunion d'un ensemble au plus dénombrable d'hyperplans de $(W'')^o$, dits <u>hyperplans proprement exceptionnels</u> de f. On appelle variété <u>exceptionnelle impropre</u> de f toute variété linéaire $(+\infty)_{I^{(0)}} \oplus (W)^o_{I^{(\infty)}} \oplus W''_J$ où $I^{(0)}$, $I^{(\infty)}$, J sont disjoints et $I^{(0)} \cup I^{(\infty)} \cup J = I$, telle que

$f(X) = f_{I^{(0)} \cup J}(X_{I^{(0)} \cup J})$ et $f_J(X_J) = 0$ et que cette variété n'est pas $\subsetneq Z(M^{(f)})$. La réunion de $\tilde{Z}(M^{(f)})$ avec toutes ces variétés linéaires sera dite le <u>domaine exceptionnel large</u> de f. Si $f(0) \neq 0$, on a $\tilde{Z}(M^{(f)}) = Z(M^{(f)})$ et il existe, pour tout $q \in I$ et pour tout $a \in DC(f)$, une constante $c_q^{(a)} \in \mathbb{R}$ (qui ne dépend que de $\omega(a)_{I \cdot\cdot \{q\}}$) telle que $\{w'' \in Z(M^{(f)});\ w'' \geqslant (\omega(a)_{I \cdot\cdot \{q\}}, c_q^{(a)})\}$ soit contenu dans une réunion des hyperplans éxceptionnels qui sont tous parallèles à W''_q. Si f est un polynôme, l'ensemble des hyperplans proprement exceptionnels de f est fini, et $Z(M^{(f)})$ et $\tilde{Z}(M^{(f)})$ sont contenus dans les réunions d'un nombre fini d'hyperplans de $(W'')^o$.

4°) $\widetilde{Reg}(M^{(f)}) = \mathrm{Conv}(f) \cdot\cdot\ \tilde{Z}(M^{(f)})$, dit <u>le domaine de régularité stricte</u> de f ($Reg(M^{(f)})$ sera dit le <u>domaine de régularité</u> de f tout court) se caractérise comme l'ensemble des $w'' \in$ Conv(f) tels que pour toute valeur x de X dans quelque sur-extension valuée K de k telle que $\omega(x) = w''$, f(x) a un et un seul terme maximal non-nul, ce qui entraîne $|f(x)| = \tilde{M}_f(w'') \neq 0$.

5°) Si $w'' \in \check{Z}(M^{(f)})$, et si $K \supset k$ est une extension valuée algébriquement close de k telle que $w'' \in (m(K) \cup \{-\infty, +\infty\})^I$, il existe un zéro $z \in K^n$ de f tel que $\omega(z) = w''$.

Ainsi, si Z(f) est l'ensemble des zéros $z \in DC(f)$ de f(X), $\tilde{Z}(M^{(f)})$ est l'image de Z(f) par l'application $\pi_0 : x \longrightarrow \omega(x) = p(0,x)$.

6°) Si $w'' \in \mathrm{Conv}(f)$, on a $\tilde{M}_f(w'') = \mathrm{Max}_{\omega(x)=w''} |f(x)|$. Si $x \in DC(f)$ est tel qu'il n'existe aucun zéro z de f tel que $|z| = d(0,z) < |x|^{(-)}$ [un tel zéro est dit <u>proche</u> de x <u>par rapport</u> à a ; d'une manière générale, un $y \in k^I$ est dit proche d'un $x \in k^I$ par rapport à un $a \in k^I$ si $d(x,y) < d(a,x)^{(-)}$], on a $|f(x)| = \tilde{M}_f(\omega(x))$.

7°) Si sur un ouvert d'un $\mathrm{Conv}(f;I^{(0)},I^{(\infty)})$ on a $\tilde{M}_f(w'') = cr_J^{i_J}$, où $r = e^{-w''}$, et $J = I\,..(I^{(0)} \cup I^{(\infty)})$ on a partout sur $\mathrm{Conv}(f)$, $\tilde{M}_f(w'') \geqslant cr_J^{i_J}$ (il en résulte, en particulier, que $\tilde{M}_f(w'')$ est une fonction décroissante (au sens large) de w'').

8°) Si $w'' \in \mathrm{Conv}(f) \cap \mathrm{Conv}(g)$, on a $w'' \in \mathrm{Conv}(f+g)$, $w'' \in \mathrm{Conv}(fg)$ $\tilde{M}_{f+g}(w'') \leqslant \mathrm{Max}\,[\tilde{M}_f(w''), \tilde{M}_g(w'')]$ et $\tilde{M}_{fg}(w'') = \tilde{M}_f(w'')\,\tilde{M}_g(w'')$. En particulier, si en plus, $w'' \in W''$, $|f|_{w''} = M_f(w'')$ est une valuation de l'anneau $T(w'')$ des séries de Taylor f en X telles que $w'' \in \mathrm{Conv}(f)$.

Il faut ajouter à ces propriétés, encore une qui n'a qu'un analogue partiel dans le cas $n = 1$. Soient $a \in DC(f) \cap k^I$, $w'' \in (W'')^\circ$, $\hat{w}'' = \mathrm{Min}\,[\omega(a),w'']$, $\tilde{M}_f^{(a)}(w'') = M_{f(a+X)}(w'')$. Supposons que $w'' \in \mathrm{Conv}(f)$. Alors:

9°) On a $\tilde{M}_f^{(a)}(w'') \leqslant \tilde{M}_f(\hat{w}'')$. Si $w'' \leqslant \omega(a)$ [auquel cas on a $\hat{w}'' = w''$] , on a $\tilde{M}_f^{(a)}(w'') = \tilde{M}_f(w'') = \tilde{M}_f(\hat{w}'')$. Si $\tilde{M}_f^{(a)}(w'') < M_f(\hat{w}'')$, il existe un hyperplan proprement exceptionnel H de f, qui passe par $\omega(a)$.

<u>Démonstration</u> : Posons $r = e^{-w''}$, $\hat{r} = e^{-\hat{w}''}$ $(= \mathrm{Max}\,(|a|,r))$. On a $\tilde{M}_f^{(a)}(w'') = M_f^{(a)}(r)$ et $\tilde{M}_f(\hat{w}'') = M_f(\hat{r})$. Si $w'' < \omega(a)^{(-)}$, donc $r > |a|^{(+)}$, on a $S(0,\hat{r}) = S(0,r) = S(a,r)$. Or, on a $M_f^{(a)}(r) = \mathrm{Max}_{x \in S(a,r)} |f(x)|$ et $M_f(r) = \mathrm{Max}_{x \in S(0,r)} |f(x)|$, d'où résulte $M_f^{(a)}(r) = M_f(r) = M_f(\hat{r})$. Si $w'' \leqslant \omega(a)$, w'' est la limite d'éléments de W'', qui sont $< \omega(a)^{(-)}$, donc, à cause de continuité de $\tilde{M}_f^{(a)}(w'')$, on a encore la même égalité pour un tel w''.

$S(0,\hat{r}) \cap S(a,r)$ n'est pas vide. En effet, si $r_q \neq |a_q|$ et si $x_q \in S(a_q,r_q)$, on a $d(0,x_q) = \mathrm{Max}(|a_q|,r_q) = \hat{r}_q$. Et si $r_q = |a_q|$, $C(0,r_q)$ contient une infinité de cercles de rayon r_q^-, et il existe des $x_q \in C(0,r_q)$ tels que $C(x_q,r_q^-) \neq C(0,r_q^-)$ et $\neq C(a,r_q^-)$,
ce qui implique $d(0,x_q) = d(a_q,x_q) = r_q$. Ainsi, si $x = (x_1,\dots,x_n) \in k'^n$ est tel que, pour tout q, $x_q \in S(a_q,r_q)$ et, en plus, $r_q = |a_q| \Rightarrow |x_q| = r_q$, on a $x \in S(0,\hat{r}) \cap S(a,r)$.

Supposons que $x \in S(0,\hat{r}) \cap S(a,r)$. Alors $C(x,r^{(-)}) \subseteq C(x,\hat{r}^{(-)})$. Comme la valuation de k est dense, on a $M_f(\hat{r}) = \sup_{y \in C(x,\hat{r}^{(-)})} |f(y)|$ et $M_f^{(a)}(r) = \sup_{y \in C(x,r^{(-)})} |f(y)|$, on a bien $M_f^{(a)}(r) \leqslant M_f(\hat{r})$.

Considérons un cercle $C = C(x,\hat{r}^{(-)}) \subseteq S(0,\hat{r})$, on a

$$C \cap S(a,r) = \prod_{q=1}^{n} \left[C(x_q,\hat{r}_q^-) \cap S(a_q,r_q)\right].$$ Si $r_q < \hat{r}_q$ $(=|a_q|)$, on a

$C(x_q,\hat{r}_q) \cap S(a_q,r_q) \neq \emptyset$ ssi $a_q \in S(x_q,\hat{r}_q^-)$. Et si $r_q = \hat{r}_q (\geqslant |a_q|)$,

$C(x_q,\hat{r}_q) \cap S(a_q,r_q) \neq \emptyset$ ssi $a_q \notin S(x_q,\hat{r}_q^-)$.

En notant, comme d'habitude, $I^{(0)}$ et $I^{(\infty)}$ les ensembles des $q \in I$ tels que $\hat{r}_q = 0$ resp. $\hat{r}_q = +\infty$, et $J = I \setminus (I^{(0)} \cup I^{(\infty)})$ et en désignant par J' l'ensemble des $q \in J$ tels que $r_q < \hat{r}_q$, considérons la transformation $\lambda : X \longrightarrow Y$, où $Y_q = u_q^{-1} X_q$ avec $u_q = 1$ quand $q \notin J$ et $u_q \in k$ tel que $|u_q| = \hat{r}_q$ quand $q \in J$. Alors, si $x \in S(0,\hat{r})$ et si $y = \lambda.x$, on a $\lambda.C(x,\hat{r}^{(-)}) = C(y, 0_{I^{(0)}} \times (+\infty)_{I^{(\infty)}} \times 1_J^{(-)}) =$
$= 0_{I^{(0)}} \times \infty_{I^{(\infty)}} \times \bar{y}_J$, où $\bar{y}_J = C(y_J, 1_J^{(-)}) \subset k^{*J}$, où $\bar{k}^* = \bar{k} \setminus \{\bar{0}\}$. En vertu de ce qui précède, on a $C(x,\hat{r}^{(-)}) \cap S(a,r) \neq \emptyset$ ssi $\bar{y}_q = \overline{(\lambda.a)}_q = \overline{u_q^{-1} a_q}$ pour tout $q \in J'$ et $\bar{y}_q \neq \overline{u_q^{-1} a_q}$ pour tout $q \in J \setminus J'$.

Soit, comme précédemment, b un élément de k tel que $|b| = M_f(\hat{r})$ et, $f'(X) = f_J'(X_J)$ étant la somme des termes de $f(X)$ maximaux sur $S(0,\hat{r})$, soit $\bar{G}(Y_J)$ le polynôme reste de $G(Y_J) = b^{-1} F'(Y_J) = b^{-1} f_J'(u_J Y_J)$. Alors, il est clair que le reste $\overline{b^{-1}f(x)}$ de $b^{-1}f(x)$, où $|x| = \hat{r}$, est égal à $\bar{G}(\bar{y}_J)$, où $y = \lambda.x$. Supposons que $\tilde{M}_f^{(a)}(w'') = M_f^{(a)}(r)$ est $< M_f(\hat{r}) = \tilde{M}_f(\hat{w}'')$. Alors, on a $J' \neq \emptyset$, car autrement on aurait $r = \hat{r} \geqslant |a|$. Alors, si $x \in S(0,\hat{r}) \cap S(a,r)$, on a

$|f_J(x_J)| = |f(x)| \leqslant M_f^{(a)}(r) < M_f(\hat{r})$, et, si $y = \lambda.x$, $|G(Y_J))| = |b^{-1}f'(x)| \leqslant$ $\leqslant |b^{-1}| \operatorname{Max}(|f(x)|, |f(x) - f'(x)|) < 1$, d'où résulte $\bar{G}(\bar{y}_J) = \overline{G(y_J)} = \bar{0}$. Or, quand x parcourt $S(0,\hat{r}) \cap S(a,r)$, $\bar{y}_J$ parcourt l'ensemble des vecteurs $(\bar{y}_q; q \in J) \in \bar{k}^{*J}$ tels que $\bar{y}_q = \overline{(\lambda.a)_q} = \overline{u_q^{-1}a_q}$ si $q \in J'$ et $\bar{y}_q \neq \overline{u_q^{-1}a_q}$ si $q \notin J'$. Ainsi, si $\bar{A} = \bar{k}^* .. \{\overline{u_q^{-1}a_q}; q \in J..J')$, cet ensemble contient $\{\overline{(\lambda.a)_{J'}}\} \times \bar{A}^{J..J'}$. Par suite, $\bar{G}(\overline{\lambda.a})_{J'}, Y_{J..J'})$ s'annule pour toutes les valeurs $\bar{y}_q$ des Y_q, $q \in J..J'$, prises dans $\bar{A}$. Comme $\bar{A}$ est infini, le polynôme $\bar{G}(\lambda.a)_{J'}, Y_{J..J'})$ de $Y_{J..J'}$ doit être identiquement nul.

Si $J..J' = \emptyset$, cela signifie, en vertu de la propriété 6°) de $\tilde{M}_f(w'')$, que $C(a_J;\hat{r}_J^{(-)}) = C(a_J, a_J^{(-)})$ contient des zéros z_J de f_J, donc, puisque $\omega(a_J) \in W''_J$, $\omega(a_J) \in Z(M^{(f_J)})$, ce qui implique que $\omega(a_J)$ appartient à quelque hyperplan proprement exceptionnel de $f_J(X_J)$. Si $J..J' \neq \emptyset$, en vertu de III, il existe un hyperplan proprement exceptionnel H_J de f_J, qui contient la variété linéaire $L = \{w'' \in (W''_J)^o ; w''_{J'} = \omega(a)_{J'}\}$. Or $\omega(a)_J$ appartient à L, donc aussi à H_J. Ainsi, dans tous les cas, il existe un hyperplan proprement exceptionnel H_J de f_J passant par $\omega(a)_J$. Mais alors, $(+\infty)_{I(0)} \times H_J$ est un hyperplan proprement exceptionnel de $f_{J \cup I_0}(X_{J \cup I_0})$ passant par $(+\infty)_{I(0)}; \omega(a)_J) = (\omega(a))_J$. Comme $\hat{w}'' = (\hat{w}''_{I(0) \cup J}, (-\infty)_{I(\infty)})$ est $\in \operatorname{Conv}(f)$, on a identiquement $f(X) = f_{I^{(0)} \cup J}(X_{I^{(0)} \cup J})$ et $Z(M^{(f)}) =$ $= Z(M^{(f_{I^{(0)} \cup J})}) \times (W''_{I(\infty)})^o$, d'où résulte que $(+\infty)_{I(0)} \times H_J \times (W''_{I(\infty)})^o$ est un hyperplan proprement exceptionnel de f passant par $(\omega(a)_{I^{(0)} \cup J}, (-\infty)_{I(\infty)}) = \omega(a)$

c.q.f.d.

Si $f(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}^I} a_i X^i$ est une série de Laurent en $X = (X_1, \ldots, X_n)$, elle se représente comme la somme $\sum_{\varepsilon \in \{+1,-1\}^I} f_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)}(X^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)})$ de 2^n séries de Taylor $f_\varepsilon(X^\varepsilon)$ en $X^\varepsilon = (X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \dots, X_n^{\varepsilon_n})$, où $f_\varepsilon(X^\varepsilon) = \sum_{i \in \mathbb{N}^I,\ \varepsilon i \in \mathcal{P}_n} a_i X^i$.

Bien entendu, certaines f_ε peuvent être nulles. Le domaine de convergence DC(f) de f est encore O-saturé et est l'intersection $\bigcap_\varepsilon DC(f_\varepsilon(X^\varepsilon)) = \bigcap_\varepsilon DC(f_\varepsilon)^\varepsilon$ des $DC(f_\varepsilon(X^\varepsilon))$ des $f_\varepsilon(X^\varepsilon)$ [considérées comme fonctions de X], et son image Conv(f) par π_0 est $\bigcap_\varepsilon \varepsilon \mathrm{Conv}(f_\varepsilon)$. Si $w'' \in \mathrm{Conv}(f)$, on peut encore définir $\tilde{M}_f(w'') = \mathrm{Min}_i\,[w(a_i) + iw'']$ qui est égal au $\mathrm{Min}_\varepsilon \tilde{M}_{f_\varepsilon}(\varepsilon w'')$ [et, de même $M_f(r) = \mathrm{Max}_i\,|a_i| r^i$ est $= \mathrm{Max}_\varepsilon M_{f_\varepsilon}(r^\varepsilon)$. Conv(f) et $\tilde{M}_f(w'')$ ont, pour les séries de Laurent, les propriétés analogues à celles qu'elles ont quand f est une série de Taylor, mais je n'y insiste pas, car ces séries ne seront pas employées dans le présent exposé quand $n > 1$.

Par contre, on se servira (dans un cas particulier) de fonctions méromorphes . Une fonction f(X) définie sur une partie A^* d'un ensemble $A \subsetneq k'^I$ sera dite méromorphe sur A s'il existe deux série de Taylor g(X), h(X), qui convergent sur A et sont telles que $\{x \in A\ ;\ h(x) \neq 0\} = A^*$ et $f = gh^{-1}$ sur A^* (une notion plus générale de fonction méromorphe de X peut être définie en remplaçant les séries de Taylor par les séries de Laurent). On considère comme identiques deux fonctions méromorphes $f : gh^{-1}$ et $f' = g'h'^{-1}$ si formellement $gh' = g'h$ et (g,h) telle que $f = gh^{-1}$ sera dite une représentation de f.

On pose $\mathrm{Conv}_h(f) = \mathrm{Conv}(g) \cap \mathrm{Conv}(h)$, et on définit d'une manière analogue $\mathrm{Conv}_h^{(r)}(f)$, $\mathrm{Conv}_h^{(d)}(f)$, DC(f). Bien entendu, la fonction f sera étendu à l'aide de $f = gh^{-1}$ à $\mathrm{Conv}_h(f)$ tout entier, même si initialement elle a été définie sur un support plus petit. On posera $\mathrm{Conv}(f) = \bigcup_h \mathrm{Conv}_h(f)$, où gh^{-1} parcourt toutes les représentations possibles de f. Les gh^{-1}, définies sur les DC(f) correspondants, forment une famille cohérente de fonctions, et on considérera leur superposition comme extension naturelle maximale de f avant tout véritable prolongement analytique. Bien entendu, on pose $\mathrm{Conv}^{(r)}(f) = \bigcup_h \mathrm{Conv}_h^{(r)}(f)$, $\mathrm{Conv}^{(d)}(f) = \bigcup_h \mathrm{Conv}_h^{(d)}(f)$ et $DC(f) = \bigcup_h DC_h(f)$.

On pose, sur $\mathrm{Conv}_h(f)$, $\varphi_{f,h}(w'') = \varphi_g(w'') - \varphi_h(w'')$, $\tilde{M}_{f,h}(w'') = \tilde{M}_g(w'')\, \tilde{M}_h(w'')^{-1}$ et, sur $\mathrm{Conv}_h^{(r)}(f)$, $M_{f,h}(r) = M_g(r)\, M_h(r)^{-1}$. Si $w'' \in W''$ (ou $r \in \mathcal{S}(W'')$), $\varphi_{f,g}(w'')$ est finie et $\tilde{M}_{f,h}(w'')$ et $M_{f,h}(r)$ sont finis et $\neq 0$. Ces fonctions, dépendant du paramètre h, forment des familles cohérentes, dont les superpositions $\varphi_f(w'')$, $\tilde{M}_f(w'')$, $M_f(r)$ seront appelés <u>l'ordre normal</u> pour $\omega(x) = w''$, et la <u>valuation normale</u> pour $\omega(x) = w''$ resp. $|x| = r$ <u>de</u> f. Si $f = gh^{-1}$, $\tilde{P}_h(f) = \tilde{Z}(M^{(h)})$, $P_h(f) = Z(M^{(h)})$, $\mathrm{Reg}_h^{(p)}(f) = \mathrm{Reg}(M^{(f)})$ et $\tilde{\mathrm{Reg}}_h^{(p)}(f) = \tilde{\mathrm{Reg}}(M^{(h)})$ les h-<u>domaines de</u> resp. <u>polarité</u>, <u>polarité propre</u>, <u>régularité</u>, <u>régularité stricte</u> de f. On appelera <u>domaine de polarité</u>, resp. de <u>régularité polaire stricte</u> de f les ensembles

$\tilde{P}(f) = \bigcap_h \left[\tilde{P}_h(f) \cup (\mathrm{Conv}(f) \,..\, \mathrm{Conv}_h(f))\right]$ et $\tilde{\mathrm{Reg}}^{(p)}(f) = \bigcup_h \tilde{\mathrm{Reg}}_h^{(p)}(f)$ et on définit d'une manière analogue P(f) et Reg(f). Un $p \in k'^I$ est dit un h-pôle de f si $h(p) = 0$, et il est dit un pôle absolu de f, s'il est un h-pôle pour tout h qui est le dénominateur d'une représentation de f.

L'intersection non-vide d'un polyèdre de l'inéarité de $\varphi_g^{(w'')}$ et d'un polyèdre de linéarité de $\varphi_h^{(w'')}$ est certainement un domaine de linéarité de $\varphi_f(w'')$ (et de monomialité de $\hat{M}_f(w'')$), mais les domaines connexes maximaux de linéarité de $\varphi_f(w'')$ peuvent être des réunions d'une famille de telles intersections.

Si f(X) est une fraction rationnelle, elle en est aussi une de X^{ε}, où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,+1\}^I$. Si $x \in k'^I$ et si $I^{(\infty)}(x) = \{q \in I; x_q = \infty\}$, on a $I^{(\infty)}(x^{\varepsilon}) = \emptyset$ si $\varepsilon_q = +1$ ou -1 selon que $q \notin I^{(\infty)}(x)$ ou $q \in I^{(\infty)}(x)$. Si $f(X) = f_{\varepsilon}(X^{\varepsilon})$, on définira, dans ce cas particulier comme Conv(f) la réunion des ε $\mathrm{Conv}(f^{\varepsilon})$ au sens précédent, qui est, visiblement, $(W'')^{\circ}$ et un $p \in W''^{\circ}$ sera considéré comme <u>pôle absolu</u> de f ssi, pour tout ε, p^{ε} en est un de f_{ε}

On peut déduire des propriétés 1°) - 9°) de $\tilde{M}_f(w'')$ pour les séries de Taylor f, à peu près comme dans le cas n = 1, les propriétés modifiées de $\tilde{M}_f(w'')$ valables quand f est une fonction méromorphe. Je me borne à indiquer ici les modifications mentionnées des énoncés, analogues à celles du cas n = 1. Dans 1°), $\check{M}_f(w'')$ est défini en tout $w'' \in \mathrm{Conv}(f)$ tel qu'il existe une représentation gh^{-1} de f telle que

$\tilde{M}_h(w") \neq 0$. 2°) subsiste tel quel. Dans 3°), les polyèdres mentionnés sont seulement les domaines de monomialité de $\tilde{M}_f(w")$, mais pas forcément maximaux ni même connexes maximaux, le reste de 3°) se modifiant d'une manière évidente. 7°) n'est vrai que si l'on se limite au domaine de monomialité maximal d'un h et $\tilde{M}_f(w")$ n'est pas, en général, décroissante. Les inégalités de Cauchy $\tilde{M}_f(w") = \sup_{\omega(x)=w"} |f(x)|$ subsiste si $w" \notin P(f)$, et on a $|f(x)| \leqslant \tilde{M}_f(\omega(x))$ s'il existe une représentation gh^{-1} de f telle qu'il n'existe aucun h-pôle proche de x. 8°) subsiste tel que, ce qui montre que $M_f(w")$ est un ordre valuatif du corps des fonctions méromorphes sur $C(0,e^{-w"})$ [avec une définition plus générale des fonctions méromorphes, aussi du corps plus grand des fonctions méromorphes sur $S(0,r)$]. Quant à 9°), $r \geqslant |a|$ implique encore $M_f^{(a)}(r) = M_f(r)$ et $M_f^{(a)}(r) \neq M_f(\mathrm{Max}\,|a|\,,r))$ implique que $\omega(a)$ se trouve, pour toute représentation gh^{-1} sur quelque hyperplan exceptionnel (pour 0) de g ou de h, car cela implique ou bien $M_g^{(a)}(r) < M_g(\mathrm{Max}(|a|,r))$, ou bien $M_h^{(a)}(r) < M_h(\mathrm{Max}(|a|,r))$

§ 4. Ensembles quasi-connexes. Elements analytiques. Théorème d'unicité.

Supposons toujours que k est complet et algébriquement clos, soit $E \subsetneq k'^I$ un ouvert non-vide et soit $a \in E \cap k^I$. L'ensemble E sera dit <u>ultra-ouvert</u> en a si :

1°) Pour tout $b \in E$, le complément $C(a,d(a,b))\ldots E$ de E dans $C(a,d(a,b))$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini d'hyperplans a-proximaux rationnels de k'^I de hauteur $\in m(k)$ $[= \mathrm{Log}\ \Gamma(k)]$, <u>dits hyperplans a-proximaux exceptionnels de</u> E. (Les images de ces hyperplans a-proximaux par $\pi_a : x \longrightarrow p(a,x)$ seront dits les <u>hyperplans exceptionnels de</u> E <u>pour</u> a).

2°) Si $b \in E \cap k^I$, il existe, pour tout $q \in I$, une constante $\varepsilon_q(b) > 0$ telle que l'ensemble $\{x \notin E \ ;\ x \in C(a,d(a,b)),\ d(a,x) \leqslant \varepsilon_q(b)\}$ soit contenu dans la réunion des seuls hyperplans a-proximaux exceptionnels de E qui sont parallèles à la coordonnée $X_q = (k'^I)_q$ de k'^I.

E est dit K-quasi-connexe élémentaire (abréviation : Kqce)(28) s'il est ultra-ouvert en tout $a \in E \cap k^I$. Il est évident que si $a \in E \cap k^I$, la section d'un tel E par l'hyperplan $X_q = a_q$ (qui passe par a) est un ensemble Kqce par rapport aux variables $X_{I \dots \{q\}} = (X_j ; j \neq q)$. On peut prouver le lemme suivant, dont je donnerai ailleurs la démonstration (assez compliquée).

Lemme : La réunion $L_a(E) = \bigcup_{b \in E} C(a,d(a,b))$ des cercles de centre $a \in E \cap k^I$, dont la circonférence (de centre a) n'est pas disjointe avec E, est un pseudo-cercle de centre a (c'est, visiblement, le plus petit pseudo-cercle de centre a contenant E), qui sera appelé l'enveloppe pseudo-circulaire de E de centre a.

On posera $N_a(E) = d_o.L_a(E)$. Donc $N_a(E)$ est un segment terminalement tronqué de W" d'origine O. La fermeture $\overline{N_a(E)}$ de $N_a(E)$ est donc un segment $[0,r]_{(W")^o}$ et $C(a,r)$ est le plus petit cercle circonférencié contenant E, donc il ne dépend pas de $a \in E$ et sera noté CC(E). Si C(E) est le plus petit cercle contenant E, on a $L_a(E) \subseteq C(E) \subseteq CC(E)$. En ce qui concerne $L_a(E)$ (et $N_a(E)$), cet ensemble peut dépendre de $a \in E$. Les cercles C(E) et CC(E) seront dits enveloppes circulaire, resp. circulaire circonférenciée de E.

L'intersection non-vide de deux (et d'un nombre fini) Kqce en est encore un. Mais la réunion d'une famille enchainée de tels ensembles n'en est plus, en général, un, contrairement à ce qui a lieu quand n = 1. Voici un exemple pour n = 2. Soient $r = (r_1,r_2)$ et $r' = (r'_1,r'_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 < r_1 < r'_1$ et $0 < r'_2 < r_2$. $A = C(0,r)$ et $B = C(0,r')$ sont évidemment des Kqce, dont les images par d_o sont respectivement $[0,r]_{(W")^o}$ et $[0,r']_{(W")^o}$, donc $d_a.(A \cup B) = [0,r]_{(W")^o} \cup [0,r']_{(W")^o}$. Visiblement, on a $L(A \cup B)) = A \cup B$, donc $N = d_0.L_0(A \cup B) = d_a(A \cup B)$. Or, $(r'_1,0) \in N$ et $(0,r_2) \in N$, donc si N est un

(28) Afin de distinguer de tels ensembles de ceux que Robba appelle, dans [18], II p. 210, quasi-connexes élémentaires et qu'on va appeler R-quasi-connexes élémentaires (abréviation : Rqce.)

segment terminalement tronqué, on doit avoir $\bar{N} = [0,(r'_1,r_2)]_{(W'')^\circ}$. Or, si $\hat{r} = (\hat{r}_1,\hat{r}_2)$ est tel que $r_1 < \hat{r}_1 < r'_1$ et $r'_2 < \hat{r}_2 < r_2$, $\hat{r}$ est un point intérieur de $[0,(r'_1,r_2)]_{(W'')^\circ}$ tel que $\hat{r} \notin A \cup B$ et il existe un voisinage de $\hat{r}$ disjoint avec N, ce qui montre que $\bar{N} \neq [0,(r'_1,r_2)]_{(W'')^\circ}$, contrairement au lemme.

Toutefois, la réunion d'une famille filtrante, et, en particulier, d'une famille totalement ordonnée par inclusion, de Kqce est encore un Kqce, ce qui montre que les Kqce de k'^I forment une famille inductive.

On appelle <u>ensembles</u> <u>K-quasi-connexes</u> (abréviation : Kqc) les réunions des familles enchaînées des Kqce(29). Par construction, la réunion d'une famille enchaînée de Kqc en est encore un. Les Kqc ont les propriétés formelles des ensembles connexes. Ainsi si A est un ouvert, et si $a \in A$, il existe le plus grand Kqc $Cqc_a(A) \subseteq A$ auquel appartient a, dit <u>composante quasi-connexe de</u> a <u>dans</u> A, et les $Cqc_a(A)$, où a parcourt A, forment une partition de A. Si A et B sont ouverts, toute composante quasi-connexe de $A \cap B$ est dite une <u>valence</u> des A et B. Mais si A,B sont des Kqc, $A \cap B$ peut ne pas l'être, comme le montre l'exemple qui suit :

En conservant les conditions précédentes pour $r = (r_1,r_2)$ et $r' = (r'_1,r'_2)$ choisissons $a \in S(0,r)$ et $a' \in S(0,r')$. Posons $A = C(0,r) \cup C(0,r')$ et $B = C(a',r) \cup C(a,r')$ on a $a + a' \in C(a',r)$ et $\in C(a,r')$, donc $C(a,r') \cap C(a',r) \neq \emptyset$ et comme les cercles sont des Kqce, A et B sont des Kqc. Mais $A \cap B = (C(0,r) \cap C(a',r)) \cup (C(0,r) \cap C(a,r')) \cup$ $\cup (C(0,r) \cap C(a,r')) \cup (C(0,r') \cap C(a',r))$. Puisque

$|a|_2 = |a_2| = r_2 > r'_2$ et $|a'|_1 = |a'_1| = r'_1 > r_1$, on a

$C(0,r) \cap C(a',r) = C(0,r') \cap C(a,r') = \emptyset$. D'autre part, puisque

$a \in C(0,r)$ et $a' \in C(0,r')$, on a $C(0,r) \cap C(a,r') = C(a,r) \cap C(a,r') = C(a,(r_1,r'_2))$ et $C(0,r') \cap C(a',r) = C(a',r') \cap C(a',r) = C(a',(r_1,r'_2))$. Mais $|a_1| = r_1 < r'_1 = |a'_1|$

(29) Robba appelle ensembles quasi-connexes les réunions des familles enchaînées de Rqce. On appellera ces ensembles (qui sont à peine plus généraux que les Kqc) les ensembles R-quasi-connexes, et on les notera Rqc. Voir [18], II p. 210.

donc $d(a_1,a'_1) = r'_1 > r_1$ et, de même, $d(a_2,a'_2) = r_2 > r'_2$, ce qui montre, si $b \in C(a,(r_1,r'_2))$, que $d_b \cdot (A \cap B) = \cdot [C(a,(r_1,r'_2)) \cup C(a',(r_1,r'_2))] =$ $= [0,(r_1,r'_2)]_{(W'')^\circ} \cup \{(r'_1,r_2)\}$. Donc, si $A \cap B$ est Kqc, il doit exister un Kqce U tel que $U \cap C(a,(r_1,r'_2)) \neq \emptyset$ et $U \cap C(a',(r_1,r_2)) \neq \emptyset$. Donc, si $b \in U \cap C(a,(r_1,r'_2))$, on a $d_b \cdot U \subseteq [0,(r_1,r'_2)]_{(W'')^\circ} \cup \{(r'_1,r_2)\}$ et $(r'_1,r_2) \in d_b \cdot U$, sans que $d_b \cdot U = \{(r'_1,r_2)\}$, ce qui est absurde. Prouvons encore une propriété (négative) des Kqc : Il est possible de trouver des recouvrements enchainés d'un Kqc quelconque E (même élémentaire, même un cercle) par deux familles enchaînées F et F' (dont les ensembles peuvent être aussi ses intersections avec des cercles) tels que Int(F,F') ne soit pas enchaînée.

Démonstration : Conservant les notations précédentes, posons $E = C(0,(r'_1,r'_2))$ $F = \{C(0,r)\} \cup \{C(x,r');\ x \in C(0,r)\}$, $F' = \{C(0,r')\} \cup \{C(y,r);\ y \in C(0,r')\}$.
Il est clair que F et F' sont des recouvrements enchaînés de E. Int(F,F') est la famille des ensembles non vides de $\{C(0,r) \cap C(0,r')\} \cup$

$$\cup \{C(x,r') \cap C(0,r')\ ;\ x \in C(0,r)\} \cup \{C(0,r) \cap C(y,r)\ ;\ y \in C(0,r')\} \cup$$

$$\cup \{C(x,r') \cap C(y,r)\ ;\ (x,y) \in C(0,r) \times C(0,r')\} = \{C(0,(r_1,r'_2)),\ C(0,r), C(0,r')\} \cup$$

$$\cup \{C(z,(r_1,r'_2))\ ,\ z \in E\}$$

car, pour tout $z \in E$, $C(z,r') \cap C(0,r) \neq \emptyset$ et $C(z,r) \cap C(0,r') \neq \emptyset$. Or, si $r_1 < |z_1| \leq r'_1$ et $r'_2 < |z_2| \leq r_2$, $C(z,(r_1,r'_2))$ est disjoint avec $C(0,r)$ et $C(0,r')$, et il l'est toujours avec tout autre $C(z',(r_1,r'_2))$. Donc la famille Int(F,F') n'est pas enchaînée.

$E \subseteq k'^I$ étant un Kqc, une fonction $f : E \longrightarrow k$ est dite un élément analytique de k de support E s'il existe une suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ où $f_n \in k(X)$ n'a aucun pôle dans E, qui converge uniformément vers f sur E. f est dit K-élémentaire si son support E est un Kqce.

Théorème : Tout Kqc E est analytique (autrement dit, si un élément analytique f de support E est nul sur un ouvert de E, il y est nul partout.)

<u>Démonstration</u> : Ce théorème est déjà prouvé pour $n = 1$, et on va le prouver par récurrence sur n. On le supposera donc prouvé pour $n - 1$. D'autre part, on peut visiblement supposer E élémentaire. Supposons donc que $a,b \in E$ sont tels qu'un élément analytique $f : E \longrightarrow k$ soit nul dans un voisinage de a. Remarquons que si $x \in E \cap k^I$ et si $J \subset I$, la section de E par la variété $(\forall j \in J)\ [X_j = x_j]$ est un Kqce par rapport aux variables non-fixées et f y est un élément analytique de ces variables. Si a et b ont au moins une ordonnée égale $a_q = b_q$, il suffit, pour prouver le théorème, de considérer f sur la section de E par $X_q = a_q = b_q$. Egalement, si f ne dépend pas de quelque variable X_q, il suffit encore de considérer f sur la section de E par quelque $X_q = x_q$, où $x \in E$.

On peut donc supposer que, pour tout $q \in I$, on a $a_q \neq b_q$. Considérons un indice q et posons $I' = I \mathrel{..} \{q\}$, $a' = a_{I'}$, $b' = b_{I'}$. Les $y \in C(a,d(a,b)) \mathrel{..} E =$ $= C(b,d(a,b)) \mathrel{..} E$ sont contenus dans la réunion d'un ensemble fini d'hyperplans a-proximaux et aussi dans la réunion d'un ensemble fini d'hyperplans b-proximaux. Soit $x \in E$ et soient $E_q(x)$ la section de E par l'hyperplan $X_q = x_q$ et $E'_q(x)$ sa projection sur $k'^{I'}$. Alors, en vertu de la condition 2°) de quasi-connexité, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que les points de $C(a,d(a,b)) \mathrel{..} E$ tels que $d(a_q,x_q) \leq \varepsilon$, resp. $d(b_q,x_q) \leq \varepsilon$, soient contenus dans une réunion d'hyperplans a-proximaux, resp. b-proximaux, tous parallèles à X_q. Soient P'_a, P'_b les projections des réunions de ces hyperplans sur $k'^{I'}$. Alors, pour tout x tel que $d(a_q,x_q) \leq \varepsilon$ resp. $d(b_q,x_q) \leq \varepsilon$, $E'_q(x)$ est contenu dans $C(a',b') \mathrel{..} P'_a$, resp. $C(a',b') \mathrel{..} P'_b$, et ces deux ensembles sont ouverts, et non vides. Leur intersection $C(a',b') \mathrel{..} [P'_a \cup P'_b]$ l'est encore. Il existe donc un cercle $C(u',r')$ tel que $a' \notin C(u,r)$ et $b' \notin C(u',r')$, où $u' \in k'^{I'}$ et $r' \in (W''_{I'})^\circ$, $r' > 0_{I'}$, tel que $C(u',r') \subseteq C(a',b') \mathrel{..} [P'_a \cup P'_b]$ ce qui implique $C(a_q,\varepsilon) \times C(u',r') \subseteq E$ et $C(b_q,\varepsilon) \times C(u',r') \subseteq E$.

Soit $V \subseteq E$ un voisinage de a tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in V$. Si l'on prend ε assez petit pour tout x_q tel que $d(a_q,x_q) \leq \varepsilon$, l'hyperplan $X_q = x_q$ n'est pas disjoint avec V, donc le coupe selon un ouvert $V(x_q)$ de cet hyperplan contenu dans la section de E par cet hyperplan de $k'^{I'}$. Cette section est un Kqce par rapport aux n-1 coordonnées non-fixées $X_{I'}$, donc un ensemble analytique et $f(((X_{I..\{q\}}, x_q)$ est, sur cette section, un élément analytique de ces coordonnées, qui s'annule sur un ouvert. Donc $f((X_{I'}, x_q)$ est identiquement nul, et par suite $f(x) = 0$ en tout $x \in E$ tel que $d(a_q, x_q) \leq \mathcal{E}$. Donc, si $U' = C(u', r')$, on a $f(x) = 0$ si $x \in U' \times C(a_q, \varepsilon) \subsetneq E$. La section $E_{x'}$ de E par la droite $X_{I'} = x'$ de k'^I est quand il n'est pas vide un ensemble Kqce, donc un ensemble analytique par rapport à la seule coordonnée non-fixée X_q. Donc, si $x' \in U'$, $f((x', X_q))$ y est un élément analytique, qui est nul si la valeur x_q de $\mathbf{X}_q$ est $\in C(a_q, \varepsilon)$. Cet ensemble analytique est donc nul identiquement et, en particulier, puisque $U' \times \{b_q\} \subsetneq E$, on a $f((x', b_q)) = 0$, pour tout $x' \in U'$. Mais la section $E_q(b)$ de E par $X_q = b_q$ est un Kqce par rapport aux n - 1 coordonnées X_I, donc un ensemble analytique, et $f((X', b_q))$ est un élément analytique par rapport à ces coordonnées, qui s'annule sur l'ouvert $U' \times \{b_q\}$ de $E_q(b)$. Donc $f(X)$ est identiquement nul sur $E_q(b)$ et, en particulier, $f(b) = 0$. Si $b \in E .. k^I$, comme E est ouvert, b est dans l'adhérence de $E \cap k^I$, et $f(b) = 0$ résulte de la continuité de f.

<u>Théorème d'unicité</u>. <u>Soient</u> f,f' <u>deux éléments analytiques</u> (<u>de dimension</u> n), <u>dont les supports, supposés non-disjoints</u>, E <u>resp</u>. E' <u>sont des</u> Kqce. <u>Si</u> f = f' <u>sur un ouvert de</u> $E \cap E'$, <u>on a</u> f = f' <u>partout sur</u> $E \cap E'$.

<u>Démonstration</u> : f - f' est un élément analytique sur $E \cap E'$, qui est un Kqce, donc analytique. Par hypothèse, f - f' = 0 sur un ouvert de $E \cap E'$, donc partout sur $E \cap E'$. c.q.f.d.

<u>Définition</u> : Si f = f' sur $E \cap E'$, on dira que chacun de ces éléments analytiques <u>prolonge</u> l'autre ou en est un <u>prolongement analytique</u>.

<u>Remarque</u> : Si f et f' sont deux éléments analytiques de supports non-disjoints E,E' qui sont des Kqc, et si f = f' sur un ouvert U de $E \cap E'$, on a f = f' sur toute la valence V(U) des E,E' contenant U, car f - f' est un élément analytique sur le Kqc V(U), qui est nul sur un ouvert. Si f = f' sur une valence V des E,E', on dira que

chacun des f, f' prolonge l'autre (ou en est un prolongement analytique) à travers la valence V.

§ 5. Fonctions analytiques et leurs propriétés.

Une fois établi le théorème d'unicité pour les éléments analytiques K-élémentaires, on peut les employer pour le prolongement analytique et la construction des "surfaces de Riemann" de la même manière que les développements de Taylor sur les polycercles sont employés dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes quand on applique la méthode de Weierstrass. On pourrait, également, employer, pour le prolongement analytique, les éléments analytiques quelconques, mais alors, pour deux éléments analytiques f, f' de supports Kqc E, E', qui se prolongent, il faut préciser à travers quelle valence des E, E' se fait le prolongement.

D'une manière précise, si A est un ensemble quelconque $\subseteq k'^n$, une fonction $g : A \longrightarrow k$ est dite une fonction analytique uniforme sur A s'il existe un ensemble F d'éléments analytiques K-élémentaires f, dont les supports E_f forment une famille enchaînée telle que $\bigcup_{f \in F} E_f \supseteq A$, et qui soit une famille cohérente de fonctions telle que g soit la restriction à A de sa superposition. On dira qu'un ensemble d'éléments analytiques K-élémentaires de dimension n est une famille analytique Kqc si pour deux éléments analytiques quelconques $f, f' \in F$ on peut trouver une chaîne $f = f_o, f_1, \ldots, f_s = f'$ d'éléments analytiques $f_i \in F$ tels que deux éléments consécutifs f_{i-1}, f_i $(i=1,2,\ldots,s)$ aient des supports non-disjoints et se prolongent. On appelera une fonction analytique Kqc toute famille analytique Kqc maximale. Il est évident que deux familles analytiques maximales ou bien coïncident, ou bien sont disjointes, auquel cas elles seront considérées comme fonctions analytiques Kqc différentes. Ainsi, si F et F' sont deux fonctions analytiques différentes et si $f \in F$ et $f' \in F'$ sont deux éléments analytiques K-élémentaires dont les supports E et E' ne sont pas disjoints, f et f' ne se prolongent pas, autrement dit il n'existe aucun ouvert $\subseteq E \cap E'$ où $f = f'$.

On appelera un <u>point</u> (ou <u>germe</u>) <u>analytique</u> un couple $p = (x, \varphi)$, où $x \in k'^n$ (x est dit la k'^n-projection de p) où $\varphi = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i (X-x)^i$ est une série de Taylor en $X - x$ qui converge dans quelque voisinage de x. La valeur $(p) = \varphi(x) = a_o$ de φ pour $X = x$ sera dite la <u>valeur</u> du point p.

Bien entendu, il peut arriver que deux points différents aient une même valeur. Si f est un élément analytique (K-élémentaire ou Kqc quelconque), dont soit E le support, un point analytique $p = (x, \varphi)$ en sera dit un point (ce qui sera noté, par abus d'écriture, $p \in f$) si $x \in E$ et si φ coïncide avec le développement taylorien de f autour de x. F étant une fonction analytique Kqc, on appele son <u>riemannien</u> l'espace hierarchimétrique Riem(F) défini comme suit: son support sera l'ensemble des points analytiques p tels que $p \in f$ pour quelque $f \in F$. Etant donné deux points $p, p' \in$ Riem(F), considérons des éléments analytiques K-élémentaires $f, f' \in F$ tels que $p \in f$, $p' \in f'$ et une chaîne $f = f_o, f_1, \dots, f_s = f'$ d'éléments analytiques K-élémentaires $f_i \in F$ tels que, pour tout $i = 1, 2, \dots, s$, f_i prolonge f_{i-1}, on dira qu'une telle chaîne est une chaîne de F reliant p et p'. Si E_i est le support de f_i, on appelera la <u>longueur</u> de la chaîne considérée des f_i le suprémum sur $\underline{S}^I$ (organisé par son ordre produit, par rapport auquel $\underline{S}^I$ est un treillis complet) des diamètres (semi-réels) $d_i : d(E_i)$ des E_i $(i=0,1,\dots,s)$. Et on appelera la <u>distance</u> $d(p,p')$ des points p, p' de Riem(F) l'infimum des longueurs des chaînes de F reliant p et p'; ce peut être un élément arbitraire de $\underline{S}^I$. Riem(F) est, précisement, l'espace hierarchimètrique, qu'on vient de décrire. Il est clair qu'il est localement isomorphe à k'^I.

On peut identifier une fonction analytique F avec une fonction définie sur Riem(F) et à valeurs dans k, en posant, pour tout $p = (x, \varphi) \in$ Riem F, $F(p) = (p) = \varphi(x)$. Il est évident qu'il existe un voisinage V de p sur Riem(F) tel que, pour tout $p' = (x', \varphi') \in V$, on ait $F(p') = \varphi'(x') = \varphi(x')$. Un tel voisinage de Riem(F) en sera dit un <u>voisinage taylorien</u> et la série de Taylor φ en $X - x$ de support V est $\in F$. Donc, une fonction analytique peut être considérée localement comme une fonction taylorienne de $X = (X_1, \dots, X_n)$. Si F et F' sont deux fonctions analytiques distinctes, en vertu de ce qui précéde, il n'existe pas de voisinages $V \subseteq \mathrm{Riem}(F)$ et $V' \subseteq \mathrm{Riem}(F')$ ayant une même k'^I-projection $\tilde{V}$ et où F et F' sont représentées par une même série entière en X-x, où $x \in \tilde{V}$. Ainsi, la donnée de la fonction F(p) sur un voisinage taylorien de Riem(F) détermine complètement F (en tant que famille d'éléments analytiques K-élémentaires), ce qui justifie l'identification de F et de F(p) : $p \longrightarrow (p)$ $[p \in \mathrm{Riem}(F)]$. On notera $\widetilde{\mathrm{Riem}}(F)$ la k'^I-projection du riemannien Riem(F) et on l'appelera k'^I-support de F.

Une fonction analytique F est dite globalement uniforme si la k'^I-projection $p \longrightarrow \tilde{p}'$ est une bijection de Riem(F) sur $\widetilde{\mathrm{Riem}}(F)$, autrement dit si, pour tout $x \in \widetilde{\mathrm{Riem}}(F)$, il existe un seul $p \in \mathrm{Riem}(F)$ tel que $\tilde{p} = x$. Une telle fonction peut être considérée comme une fonction de variable X dont les valeurs parcourent $\widetilde{\mathrm{Riem}}(F) \subsetneq k'^I$ en posant $F(\tilde{p}) = F(p)$. Pour n = 1, toute fonction analytique Kqc est, comme on a vu, globalement uniforme. Mais les raisons géométrique, qui ont permis de le prouver, sont absentes si $n \geqslant 2$. En effet, soient f,f' deux éléments analytiques Kqc à supports non disjoints E,E' tels que $E \cap E'$ ne soit pas quasi-connexe (condition impossible si n = 1 et réalisable si $n \geqslant 2$), qui se prolongent **à travers** une valence V des E,E'. On peut considérer f et f' comme superposition de certaines familles cohérentes F_f et $F_{f'}$ d'éléments analytiques K-élémentaires et, du fait que f et f' se prolongent à travers V résulte que $F_f \cup F_{f'}$ est une sous familllle d'une fonction analytique F. Mais si F est globalement uniforme, f et f' sont les restrictions de $F(\tilde{p})$ sur E et sur E', donc f et f' doivent coïncider sur $E \cap E'$ et pas seulement sur V. Or, il n'y a aucune raison a priori pour qu'il en soit ainsi.
Donc, le problème de globale uniformité des fonctions analytiques Kqc reste ouvert.

Ceci n'empêche pas de définir la notion de domaine d'analyticité et de poser le problème (certainement difficile et actuellement ouvert) de caractérisation géométrique de ces domaines. Un ensemble Kqc E est dit un domaine d'analyticité s'il existe une fonction analytique Kqc globalement uniforme F telle que $E = \widetilde{\mathrm{Riem}}(F)$ M. Robba a donné, à la fin de sa thèse,[16],quelques exemples de tels domaines. On peut, également, prouver une condition nécessaire pour que E soit un domaine d'analyticité, qui pour n = 1, devient celle de régularité et qu'on appelera du même nom pour n > 1. Afin de ne pas allonger l'exposé, je ne l'indique pas ici.

Considérons les fonctions analytiques uniformes d'un même support Kqc E. Leur ensemble est-il fermé par rapport à l'addition, la multiplication, les dérivations partielles $\frac{d}{dX_q}$ et la convergence uniforme sur E ? L'inverse f^{-1} d'une fonction analytique f sur E, est-il une fonction analytique sur $E^* = \{x \in E \; ; \; f(x) \neq 0\}$? La réponse est positive dans le cas des opérations à un seul argument ($\frac{d}{dX_q}$ et f^{-1}) et, dans les autres cas, quand il s'agit d'éléments analytiques. Si f,g sont deux fonctions analytiques uniformes sur E, qui sont les superpositions de deux familles cohérentes d'éléments analytiques, dont les familles de supports soient F, resp. G, on peut démontrer que f+g et fg sont des fonctions analytiques si Int(F,G) est une famille enchaînée. On a vu que ce n'est pas malheureusement toujours le cas quand $n \geqslant 2$, même si F et G sont des familles de cercles. Ainsi, le problème : l'ensemble Anal(E) des fonctions analytiques uniformes de support E est-il un anneau ? est, pour le moment, ouvert. Toutefois, comme on verra, le support E étant donné, il existe des classes spéciales, mais très larges de telles fonctions, qui forment effectivement un anneau, qui est aussi stable par dérivations partielles. En ce qui concerne la convergence uniforme, la connaissance de singularités des fonctions (et d'éléments) analytiques est, trop insuffisante pour $n > 1$ pour qu'on puisse aller au-dela du cas des éléments analytiques (ou du cas, qui s'en déduit trivialement, de fonctions analytiques décomposables en éléments analytiques, dont la famille des supports est fixe).

Supposons donc d'abord que f,g sont deux éléments analytiques d'un même support Kqc E. En répétant mot à mot les raisonnements du cas $n = 1$, on voit que $f \pm g$ est toujours un élément analytique, fg l'est si f et g sont bornés sur E, ce qui a lieu si E est fermé, et que $\frac{\partial f}{\partial X_q}$ l'est si f est bornée sur E (en particulier si E est fermé) et s'il existe un ensemble fini $\{a', a'', \ldots, a^{(\rho)}\}$ de points de E tel que, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Min}_i \, d(a_q^{(i)}, x_q) > c > 0$, où c est une constante positive convenable. Donc fg et $\frac{\partial f}{\partial X_q}$ sont fonctions analytiques s'il existe un recouvrement enchaîné de E par des ensembles Kqc fermés ayant, en plus, la propriété indiquée. Il suffit de prouver l'existence d'un tel recouvrement pour les Kqce. On obtient un tel recouvrement en définissant, pour les Kqce E, les sous-ensembles de E analogues aux $E_{a,b}$ du cas $n = 1$, bien que plus compliqués. Soient $a,b \in E$ tels que aucun des $d(a_q, b_q)$

ne soit = 0. Appelons $E_{a,b}$ le sous-ensemble suivant de $E \cap C(a,d(a,b))$: soient, d'abord, $E'_{a,b}$ le plus grand sous-ensemble a-saturé de $E \cap C(a,d(a,b)^{(-)}$, $E'_{a,b}$ le plus grand sous-ensemble b-saturé de $E \cap C(b;d(a,b)^{(-)})$ et $E''_{a,b} = C(a,d(a,b)) .. [C(a,d(a,b)^{(-)} \cup C(b,d(a,b)^{(-)}]$ ou $= \emptyset$ selon que $C(a,d(a,b)) \subseteq$ ou $\not\subseteq E \cup C(a,d(a,b)^{(-)}) \cup C(b,d(a,b)^{(-)})$. Alors, on pose $E_{a,b} = E'_{a,b} \cup E'_{b,a} \cup E''_{a,b}$. On prouve facilement que $E_{a,b}$ est un Kqce et que les $E_{a,b}$, où (a,b) parcourt les éléments de $E \times E$ tels qu'aucun $d(a_q,b_q)$ ne soit nul, forment un recouvrement enchaîné de E.

On prouve, comme dans le cas $n = 1$, que si f est un élément analytique de support E, f^{-1} en est encore un si $|f| \succ c > 0$ partout sur E. Pour prouver que, dans le cas général, f^{-1} est une fonction analytique sur $E^* = \{x \in E \; ; \; f(x) \neq 0\}$, il faut construire un recouvrement enchaîné de E^* par des Kqc convenables tels que $|f|$ soit inférieurement bornée sur chaque ensemble de ce recouvrement par une constante positive convenable (qui peut dépendre de cet ensemble). Il suffit, visiblement de construire un tel recouvrement pour les E, qui sont des Kqce. On le fait exactement comme dans le cas $n = 1$, et il se trouve que ce recouvrement est filtrant et que ses ensembles sont des Kqce. Mais certains points de la démonstration sont plus subtils que pour $n = 1$, et seront, à cause de cela, exposés en détail. On va se borner au cas $E \subseteq k^I$, le cas général ne présentant, d'ailleurs, d'autre difficultés que celles de complication.

Supposons donc E être un Kqce, et soit $d^* = d(E^*)$ le diamètre (semi-réel) de E^*. Soit $a \in E^*$, et soit $r' \in \mathbb{R}_+^{oI}$ tel que $0^{(+)} < r' \leqslant d^*$. Alors, $M_f^{(a)}(r)$ est une fonction continue sur $[0,r']_{\mathbb{R}^{oI}}$ qui ne s'y annule pas. A cause de la compacité du segment de $\mathbb{R}^{oI}$, elle y a un minimum $m^{(a)}_{f,r'} > 0$. Fixons une suite $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_j \leqslant \ldots$ qui tende vers d sur $\underline{S}^I$ et une suite $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \ldots > \mathcal{E}_i > \ldots$ de nombres réels > 0, qui tende vers 0^+ sur $\underline{S}$. Posons $E_{i,j} = \{x \in E^*; \; m^{(a)}_{f,r_j} \succ \mathcal{E}_i\}$ et soient $\mathcal{E}_{i,j} = \{E_{i,j} \cap C(a,r_j) \; ; \; a \in E_{i,j}\}$, et $\mathcal{E} = \bigcup_{i,j} \mathcal{E}_{i,j}$. Il est visible que $|f(x)| \succ \mathcal{E}_i$ sur $E_{i,j}$, donc sur tout ensemble $\in \mathcal{E}_{i,j}$, et que $\mathcal{E}$ est un recouvrement filtrant de E^*. Il reste donc à prouver que tout $E_{i,j} \cap C(a,r_j)$ est un

Kqce, et, comme pour $n = 1$, il suffit de prouver pour cela que $E_{i,j} \cap C(a,r_j)$ est, pour tout $a \in E_{i,j}$, ultra-ouvert en a. Supposons que $y \notin E_{i,j} \cap C(a,r_j)$. Si $y \notin E$, il se trouve sur quelque hyperplan a-proximal exceptionnel de E, et il y en a un nombre fini seulement qui ne sont pas disjoints avec $C(a,r_j)$. D'autre part, si (30) $d(a_q,y_q) \leq \varepsilon_q(r_j)$, y se trouve sur quelque hyperplan a-proximal exceptionnel de E, qui est parallèle à X_q. Supposons que $y \in E$ et ne se trouve sur aucun hyperplan a-proximal mentionné. Alors $m^{(y)}_{f,r_j} < \varepsilon_i$ et il existe $\bar{r}$, $0 < \bar{r} \leq r_j$ tel que $M^{(y)}_f(r) < \varepsilon_i$. Soit $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ une suite approximante de f. Il existe un f_m tel que $|f_m - f|$ est $< \varepsilon_i$ partout sur E. Par suite, $M^{(a)}_{f_m}(r) = M^{(a)}_f(r)$ si $r \leq r_j$ et $M^{(y)}_{f_m}(\bar{r}) \leq \mathrm{Max}\,[M^{(y)}_f(\bar{r}), M^{(y)}_{f-f_m}(\bar{r})] < \varepsilon_i$. Soit $f_m = \frac{g_m}{h_m}$ la représentation irréductible de la fraction rationnelle considérée. Alors, si $\bar{r}' = \mathrm{Max}(\bar{r}, d(a,y))$, on voit facilement, en appliquant convenablement les inégalités de Cauchy, que $M^{(y)}_{h_m}(\bar{r}) \leq M^{(a)}_{h_m}(\bar{r}')$. Donc, puisque $M_{f_m} = \frac{M_{g_m}}{M_{h_m}}$ et $M^{(y)}_{f_m}(\bar{r}) < \varepsilon_i \leq M^{(a)}_{f_m}(\bar{r}')$, on doit avoir $M^{(y)}_{f_m}(\bar{r}) < M^{(a)}_{f_m}(\bar{r}')$. En vertu de la propriété 9°) de la fonction $M_f(r)$ des séries de Taylor, on en déduit qu'on ne peut pas avoir $\bar{r} \geq d(a,y)$ et que y se trouve sur quelque hyperplan a-proximal de f_m, et, puisque f_m est un polynôme, l'ensemble de ces hyperplans est fini. En regardant attentivement la démonstration de la propriété 9°) on voit, en plus, que si $d(a_q,y_q)$ est suffisamment petite, cet hyperplan a-proximal peut être supposé parallèle à X_q, ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> Φ <u>une famille enchaînée d'ensembles et soit</u> Ψ <u>une famille d'ensembles, ayant la même réunion que</u> Φ <u>et telle que, pour tout</u> $E \in \Phi$, <u>la famille</u> Ψ_E <u>des intersections non-vides</u> $E \cap F$ <u>de</u> E <u>avec les</u> $F \in \Psi$ <u>soit filtrante</u>(31). <u>Alors</u> $\mathrm{Int}\,[\Phi, \Psi]$ <u>est enchaînée.</u>

<u>Démonstration</u> : Soient $C = E \cap F$ et $C' = E' \cap F'$. Soit

$$E = E_0, E_1, \dots, E_s = E'$$

une chaîne de Φ reliant E et E'. Soit P_i un élément $\in E_{i-1} \cap E_i$ $(i=1,2,\dots,s)$. Alors il existe un $F_i \in \Psi$ tel que $P_i \in F_i$. D'autre part pour tout $i = 1,2,\dots,s-1$, il

(30) en conservant les notations de la condition 2° de l'ultra-ouverture en a.
(31) par rapport à l'ordre $A \supset B$; autrement dit, quels que soient $F, F' \in \Psi_E$, il existe un $F'' \in \Psi_E$ tel que $F'' \supseteq F \cup F'$.

existe un $\bar{F}_i \in \Psi$ tel que $\bar{F}_i \cap E_i \supseteq (F_i \cap E_i) \cup (F_{i+1} \cap E_i)$. En plus, il existe un $\bar{F}_o \in \Psi$ tel que $\bar{F}_o \cap E_o \supseteq C \cup (F_1 \cap E_o)$ et un $\bar{F}_s \in \Psi$ tel que $\bar{F}_s \cap E_s \supseteq (F_s \cap E_s) \cup C'$.

La suite $C = E \cap F = E_o \cap F$, $\bar{F}_o \cap E_o$, $\bar{F}_1 \cap E_1$, ..., $\bar{F}_{s-1} \cap E_{s-1}$, $\bar{F}_s \cap E_s$, $C' = E' \cap F' = E_s \cap F'$ est une chaîne, car : $C \subseteq \bar{F}_o \cap E_o$; pour tout $i = 1,2,\dots,s-1,s$, $(\bar{F}_{i-1} \cap E_{i-1}) \cap (\bar{F}_i \cap E_i) \supseteq (F_i \cap E_{i-1}) \cap (F_i \cap E_i) =$ $= F_i \cap (E_{i-1} \cap E_i) \neq \emptyset$, car $P_i \in F_i$ et $P_i \in E_{i-1} \cap E_i$; $C' \subseteq \bar{F}_s \cap E_s$. Tout est prouvé.

Soit $E \subseteq k'^I$ un Kqc. Fixons un recouvrement enchaîné $\mathfrak{F}$ de E par des Kqce $F \subseteq E$. Appelons $\mathcal{G}_F$ le recouvrement de $F \in \mathfrak{F}$ par les $F_{a,b}$ $[(a,b) \in F \times F, (\forall q = 1,2,\dots,n)\ [a_q \neq b_q]]$. Alors $\mathcal{G} = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} \mathcal{G}_F$ est encore un recouvrement enchaîné de E par des Kqce, complétement déterminé par la donnée de $\mathfrak{F}$. Une fonction analytique f sur E sera dite $\mathfrak{F}$-<u>filtrante</u> si elle est bornée sur tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ et est une superposition d'un système cohérent d'éléments analytiques K-élémentaires, dont les supports forment une famille $\mathcal{H}$ telle que, pour tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Int}(\{\mathfrak{g}\}, \mathcal{H})$ est une famille filtrante d'ensembles.

<u>Remarque</u> : Il me semble presque certain que si f est une fonction analytique sur un $E_{a,b}$, elle y est bornée (c'est sûrement vrai si n = 1 et k maximalement complet).

<u>Théorème</u> : <u>L'ensemble</u> $An_{\mathfrak{F}}(E)$ <u>des fonctions analytiques</u> $\mathfrak{F}$-<u>filtrantes sur</u> E <u>est un anneau stable par dérivations partielles</u>. <u>Tous les éléments</u> f <u>de son corps des fractions</u> $Mer_{\mathfrak{F}}(E)$ <u>sont des fonctions analytiques sur la partie</u> E^* <u>de</u> E <u>où leur dénominateur ne s'annule pas.</u>

<u>Remarque</u> : Les $f \in Mer_{\mathfrak{F}}(E)$ seront appelées <u>fonctions</u> $\mathfrak{F}$-<u>méromorphes sur</u> E.

<u>Démonstration</u> : Soient f,f' deux fonctions analytiques $\mathfrak{F}$-filtrantes sur E. Alors on peut les représenter comme superpositions de familles cohérentes convenables des éléments analytique K-élémentaires tels que les familles respectives $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ des supports de ces éléments analytiques soient telles que, pour tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Int}(\{\mathfrak{g}\}, \mathcal{H})$ et $\mathrm{Int}(\{\mathfrak{g}\}, \mathcal{H}')$ soient filtrantes. Mais alors, puisque $\mathrm{Int}(\{\mathfrak{g}\}, \mathrm{Int}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')) =$

$= \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(\{\mathcal{G}\}, \mathcal{H}), \mathrm{Int}(\{\mathcal{G}\}, \mathcal{H}'))$, cette famille est encore filtrante. Si $H \in \mathrm{Int}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, f et g sont des éléments analytiques sur H, donc $f \pm g$ et, puisque f et g sont bornées sur g, aussi fg sont des éléments analytiques sur H. Ce sont donc donc des fonctions $\mathcal{F}$-filtrantes, et $An_{\mathcal{F}}(E)$ est bien un anneau. Pour montrer que cet anneau est stable par rapport à $\frac{\partial}{\partial X_q}$, considérons une $f \in An_{\mathcal{F}}(E)$ et, en conservant les notations précédentes, faisons correspondre à tout couple $(H,F) \in \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ la famille

$$\mathcal{U}_{H,F} = \{H \cap F_{a,b} \ ; \ (a,b) \in (H \cap F) \times (H \cap F), (q=1,2,\ldots,n)(a_q \neq b_q)\}$$

et posons $\mathcal{U} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}, F \in \mathcal{F}} \mathcal{U}_{H,F}$.

f est un élément analytique sur tout $U \in \mathcal{U}$. En plus, si $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Int}(\{\mathcal{G}\}, \mathcal{U})$ est une famille filtrante. En effet soient U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$ et un $\mathcal{G} = F_{a,b} \in \mathcal{S}_F$ (où $F \in \mathcal{F}$) tels que $U_1 \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ et $U_2 \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Alors, il existe H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$ tels que $U_1 \subseteq H_1$ et $U_2 \subseteq H_2$ et $H_1 \cap \mathcal{G}$, $H_2 \cap \mathcal{G}$ ne sont pas vides. D'autre part, puisque $\mathrm{Int}(\{\mathcal{G}\}, \mathcal{H})$ est filtrante et $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H = E \supseteq \mathcal{G}$, il existe un $H_3 \in \mathcal{H}$ tel que $H_3 \supseteq \{a,b\}$. Pour la même raison, il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $H \cap \mathcal{G} \supseteq (H_1 \cap \mathcal{G}) \cup (H_2 \cap \mathcal{G}) \cup (H_3 \cap \mathcal{G}) =$ $= (U_1 \cup U_2) \cup \{a,b\}$. Comme $\{a,b\} \subsetneq H$, $H \cap \mathcal{G} = H \cap F_{a,b} \in \mathcal{U}_{H,F} \subseteq \mathcal{U}$, ce qui prouve l'affirmation. Or, f est borné sur tout $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$, donc sur tout $U \subseteq \mathcal{U}$. D'autre part, si $U = H \cap F_{a,b}$ ($H \in \mathcal{H}$; $F \in \mathcal{F}$; $a,b \in H \cap F$), on a $a,b \in U$ et, puisque U est ouvert, il existe un $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$ tel qu'aucun r_q ne soit nul et que $C(a,r) \subseteq U$ et $C(b,r) \subseteq U$. Soient a', b' les points de U tels que $d(a,a') = r$ et $d(b,b') = r$. Comme $C(a,r)$ et $C(b,r)$ sont $\subseteq F_{a,b}$, on a vu déjà (raisonnement analogue à celui du cas n = 1) que, pour tout $x \in F_{a,b}$, $\mathrm{Min}[d(a_q,x_q), d(a'_q,x_q), d(b_q,x_q), d(b'_q,x_q)] \geqslant r_q$, et ceci a lieu, a fortiori, pour tout $x \in U$. Donc $\frac{\partial f}{\partial X_q}$ est un élément analytique sur tout $U \in \mathcal{U}$, et, par suite, une fonction analytique $\mathcal{F}$-filtrante sur E.

Soit $f = gh^{-1}$, où g,h sont $\in An_{\mathcal{F}}(E)$, et soit $E^* = \{x \in E \ ; \ h(x) \neq 0\}$. Si $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \cap E^* = \{x \in \mathcal{G} \ ; \ h(x) \neq 0\}$ est encore un Kqce. On a vu qu'il existe un recouvrement $\mathcal{H}$ de E par des Kqce tel que, $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H = E$ que, pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$,

$\mathrm{Int}(\{\mathcal{G}\}, \mathcal{H})$ soit une famille filtrante et g et h soient tous les deux des éléments analytiques sur tout $\mathcal{G} \cap H$ ($\mathcal{G} \in \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{H}$) non-vide. Mais si $\mathcal{G} \cap H \neq \emptyset$, $(\mathcal{G} \cap H) \cap E^* = \mathcal{G}^* \cap H$ est aussi non vide, car les $x \in \mathcal{G}$ tels que $f(x) \neq 0$ ne peuvent pas former un ouvert. Pour la même raison, les $\mathcal{G}^* \cap H$, où $(\mathcal{G}, H) \in \mathfrak{J} \times \mathcal{H}$, forment une famille enchaînée, donc un recouvrement enchaîné de E^*. Visiblement g est un élément analytique sur tout $\mathcal{G}^* \cap H \subseteq \mathcal{G} \cap H$ et h^{-1} est une fonction analytique sur le même ensemble. Donc $f = gh^{-1}$ est une fonction analytique sur $\mathcal{G}^* \cap H$ et les restrictions $(f / \mathcal{G}^* \cap H)$ de f sur les $\mathcal{G}^* \cap H$ forment un système cohérent de fonctions analytiques. Donc, leur superposition f en est encore une.

Si $\mathfrak{J}'$ est un recouvrement enchaîné de E, qui est un sous-recouvrement de $\mathfrak{J}$, on a $An_{\mathfrak{J}}(E) \subseteq An_{\mathfrak{J}'}(E')$.

Soit g(Y) un élément analytique de m variables $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ sur un support Kqc $D \subseteq k'^m$. Soient d'autre part, $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)$ m fonctions analytiques de n variables $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de même support E appartenant à un même anneau $An_{\mathfrak{J}}(E)$. Soit $E_g = \{x \in E; (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in D\}$ la partie de E que l'application $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow y(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ applique dans D.
Alors on voit par le même raisonnement que dans le cas n = 1 que, si Q est une composante quasi-connexe quelconque de E_g,

$$g \circ (f_1, f_2, \ldots, f_m) : X \longrightarrow g((f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X))$$

est une fonction analytique sur Q.

Chapitre III. Prolongement analytique algébroïde.

Nous avons vu que pour n = 1, le prolongement analytique quasi-connexe ne fournit que des fonctions analytiques globalement uniformes. Il n'est pas certain qu'il en est de même quand n > 1, mais il y a de fortes raisons de penser que, même dans ce cas, le prolongement analytique Kqc (ou Rqc) ne permet pas de passer, par exemple d'une branche d'une fonction algébrique de n variables à une autre branche. Ainsi, si l'on veut étendre le prolongement analytique aux fonctions multiformes les plus usuelles, comme, par exemple, les fonctions algébriques, il faut introduire un autre type de prolongement qu'on peut appeler "algebroïde". J'ai défini(32), pour le cas $n = 1$, un tel prolongement que j'avais appelé "multiforme", mais comme il n'est pas certain que le prolongement Kqc ne fournit pas de fonctions multiformes quand $n \geqslant 2$, ce nom n'est peut être pas adéquat quand $n \neq 1$. La méthode, dans le cas général, est assez proche de celle du cas $n = 1$, mais comporte quelques complications dues à ce qu'on ne sait pas si l'ensemble de toutes les fonctions analytiques sur un Kqc est ou n'est pas un anneau.

Soit $\mathcal{E}$ la famille de tous les ensembles Kqc de k'^n. La méthode présuppose qu'on fait correspondre à tout $E \in \mathcal{E}$ un anneau $A(E)$ de fonctions analytiques sur E, de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

1°) Tout élément du corps des fractions $K(E)$ de $A(E)$ est une fonction analytique sur la partie E^* de E, où il est défini.

2°) Si $E, E' \in \mathcal{E}$ sont telles que $E \subseteq E'$ et si $f' \in A(E')$, la restriction $f = (f'|E)$ de f' à E appartient à $A(E)$.

3°) Si E est un cercle circonférencié, $A(E)$ contient l'ensemble des séries de Taylor en $X-a$, (où $a \in E$), qui convergent sur E. (Si k est maximalement complet, ceci implique que $A(E)$ coïncide avec cet ensemble, vu le théorème de singularité au bord).

Il est à remarquer que l'application $\varphi_{E,E'}: f' \longrightarrow f = (f'|E)$ de $A(E')$ dans $A(E)$ (ou $E \subseteq E'$) est une injection. En effet, E est un ouvert de E' et si $f', g' \in A(E)$ sont tels que $(f'|E) = (g'|E)$, on a, en vertu de l'analyticité de E', $f' = g'$.

Dans le cas $n = 1$, un tel système a été réalisé en prenant comme $A(E)$ l'anneau de toutes les fonctions analytiques sur E, auquel cas le système

$\mathcal{A} = [A(E)\ ;\ \varphi_{E,E'}\ ;\ E \in \mathcal{E}\ ,\ (E,E') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E},\ E \subseteq E']$ a encore la propriété.

4°) Si ϕ est un recouvrement enchaîné d'un $E \in \mathcal{E}$ par les $F \in \mathcal{E}$ tels que $F \subseteq E$, et si $f : E \longrightarrow k$ est une fonction (forcément analytique) telle que, pour tout $F \in \varphi$, on ait $(f|F) \in A(F)$, on a $f \in A(E)$, ce qui rapproche le système $\mathcal{A}$ d'un faisceau, avec

(32) Dans [10] , p. 133-141

la différence que $\mathcal{E}$ ne peut pas être considéré comme la famille des ouverts de quelque topologie de k'^n. Toutefois, cette condition 4°) ne sert pas en vue du prolongement analytique. Si $n > 1$, on ne sait pas, dans l'état actuel de la théorie, si toutes les fonctions analytiques sur un $E \in \mathcal{E}$ forment un anneau et si leurs quotients sont analytiques. Donc, on n'est pas sûr que le système $\mathfrak{A}$ est réalisable de la même manière ni même qu'on peut en réaliser un satisfaisant à la condition 4°). Mais voici une méthode générale pour en réaliser, qui satisfont aux conditions 1°) et 3°).

Un ensemble $\mathfrak{B}$ de Kqce est dit une <u>base</u> des Kqc de k'^n si tout Kqc E peut être représenté comme la réunion d'une famille enchaînée d'ensembles $\in \mathfrak{B}$ (de telles bases $\mathfrak{B}$ existent, par exemple l'ensemble $\mathcal{E}_e$ de tous le Kqce de k'^n). Il suffit, d'ailleurs, pour que $\mathfrak{B}$ soit une telle base, que tout Kqce puisse se représenter ainsi. Si $E \in \mathcal{E}$, posons $\mathfrak{F}(\mathfrak{B};E) = \{F \in \mathfrak{B};\ F \subseteq E.\}$

On pose $A(E) = A_{\mathfrak{F}(\mathfrak{B};E)}(E)$. La condition 1°) est vérifiée en vertu des propriétés des $A_{\mathfrak{F}}(E)$ et la condition 2°) l'est parce que, si $E \subseteq E'$, on a $\mathfrak{F}(\mathfrak{B};E) \subsetneq \mathfrak{F}(\mathfrak{B},E')$, donc si $f' \in An_{\mathfrak{F}(\mathfrak{B}';E')}(E)$, on a bien $(f|E) \in An_{\mathfrak{F}(\mathfrak{B};E)}(E)$,

Les fonctions $f : E \longrightarrow k$ telles que $f \in A_{\mathfrak{F}(B,E)}(E)$, seront dites, quel que soit $E \in \mathcal{E}$, les <u>fonctions</u> $\mathfrak{B}$<u>-analytiques uniformes</u> de $X = (X_1, \dots, X_n)$. Nous allons, en plus, supposer que tout cercle circonférencié de k'^n appartient à $\mathfrak{B}$, ce qui assure 3°). Quoi qu'il en soit, soit $\mathfrak{A} = [A(E), \varphi_{E,E'}]$ un système satisfaisant aux conditions 1°) et 2°). Soit $\mathfrak{K}(E)$ la clôture algébrique du corps des fractions K(E) de A(E). Si $E \subsetneq E'$ $(E,E' \in \mathcal{E})$, l'injection $\varphi_{E,E'} : f' \longrightarrow (f'|E)$ de A(E') dans A(E) est un isomorphisme d'anneau. Elle se prolonge, et d'une manière unique, en un isomorphisme du corps K(E') dans le corps K(E), et on notera cet isomorphisme de corps par le même signe $\varphi_{E,E'}$. Cet isomorphisme peut se prolonger (de multipes manières) en un isomorphisme de $\mathfrak{K}(E')$ dans $\mathfrak{K}(E)$, et quel que soit ce prolongement, l'image de $\mathfrak{K}(E)$ est la clôture algébrique de $\varphi_{E,E'} \cdot K(E)$, donc ne dépend pas du choix de ce prolongement et peut-être noté $\varphi_{E,E'} \cdot \mathfrak{K}(E)$. Si $\Psi_{E,E'}$ est l'ensemble des isomorphismes de $\mathfrak{K}(E')$ dans

$\mathfrak{K}(E)$ prolongeant $\varphi_{E,E'}$ et si $\mathcal{G}_{L/\ell}$ désigne le groupe de Galois d'une extension algébrique normale L/ℓ, on a visiblement, si $\psi \in \Psi_{E,E'}$,

$$\Psi_{E,E'} = \psi\, \mathcal{G}_{\mathfrak{K}(E')/K(E')} = \mathcal{G}_{\varphi_{E,E'}\cdot \mathfrak{K}(E')/\varphi_{E,E'}\cdot K(E')}\psi .$$

En particulier, si E est un cercle $C(a,r)$ $(0^{(+)} < r, r \in R_n^o)$, (33), $A(E)$ contient l'anneau T_E des séries de Taylor en $X-a$ qui convergent sur $C(a,r)$ et $K(E)$ contient le corps M_E des fonctions méromorphes sur E. On écrira $A_{a,r}$, $K_{a,r}$, $\mathfrak{K}_{a,r}$ $T_r^{(a)}$ $M_r^{(a)}$ au lieu de $A(C(a,r))$, $K(C(a,r))$, $\mathfrak{K}(C(a,r))$ $T_{C(a,r)}$, $M_{C(a,r)}$ et, si $0^+ < r \leqslant r'$, on écrira $\varphi^{(a)}_{r,r'}$ au lieu de $\varphi_{C(a,r),C(a,r')}$.

Il est visible que si $r \leqslant r' \leqslant r''$, on a $\varphi^{(a)}_{r,r''} = \varphi^{(a)}_{r,r'}\ \varphi^{(a)}_{r',r''}$.

Puisque toute $f \in A(E)$ est taylorienne en tout $a \in E$, il existe pour tout $f' \in A_{a,r'}$ un r, $0^{(+)} < r \leqslant r'$, tel que $\varphi_{r,r'}\ f' \in T_r^{(a)}$. La famille

$A_{a,r}$ (resp. $K_{a,r}$) $(r \in R^n,\ r > 0^{(+)})$ munie d'injections $\varphi^{(a)}_{r,r'}$ $(r \leqslant r')$ est un système injectif, dont la limite injective qui est la même que celle de la famille $T_r^{(a)}$ (resp. $M_r^{(a)}$), est un anneau A_a (resp. un corps K_a), dit l'<u>anneau analytique local en</u> a resp. <u>corps analytique local</u> en a. Visiblement, A_a est l'anneau des séries de Taylor en $X-a$ qui convergent dans quelque voisinage de a (brièvement des séries convergentes en $X-a$), et K_a, qui est le corps des fractions de A_a, est celui des fonctions, méromorphes dans quelque voisinage V de a. Soit $\mathfrak{K}_a$ la clôture algébrique de K_a. On peut prolonger les $\varphi^{(a)}_{r,r'}$ par des $\psi^{(a)}_{r,r'} : \mathfrak{K}_{a,r'} \to \mathfrak{K}_{a,r'}$ $(r \leqslant r')$ de manière que : si $r \leqslant r' \leqslant r''$, on ait toujours $\psi^{(a)}_{r,r''} = \psi^{(a)}_{r,r'}\ \psi^{(a)}_{r',r''}$, et $\mathfrak{K}_a$ peut être considéré comme la limite inductive des $\mathfrak{K}_{a,r}$ pour les injections $\psi^{(a)}_{r,r'}$ $(r \leqslant r')$. Une fois les $\psi_{r,r'}$ choisis, ils définissent une injection $\psi_r^{(a)} : \mathfrak{K}_{a,r} \longrightarrow \mathfrak{K}_a$, qui prolonge, d'ailleurs, celle $\varphi_r^{(a)}$ $K_{a,r} \longrightarrow K_a$ définie par les $\varphi_{r,r'}$, et on a si $r \leqslant r'$, $\psi^{(a)}_{r'} = \psi^{(a)}_r \psi^{(a)}_{r,r'}$

(33) La définition qui suit est exacte si $a \in k^n$. Quand certaines coordonnées de a sont $= \infty$, il y a lieu de la modifier d'une manière, d'ailleurs évidente, en remplaçant en particulier, si $a_i = \infty$, X_{i-a_i} par X_i^{-1}

Si E est un Kqc et si $a \in E$, il existe des $C(a,r) \subseteq E$ et tout isomorphisme $\psi : \mathfrak{K}(E) \longrightarrow \mathfrak{K}_{a,r}$ en définit un $(\psi)_{E,a} : \mathfrak{K}(E) \longrightarrow \mathfrak{K}_a$, à savoir $(\psi)_{E,a} = \psi_r^{(a)} \psi$. $(\psi)_{E,a}$, quel que soit ψ, prolonge visiblement $(\varphi)_{E,a} = \varphi_r^{(a)} \varphi_{C(a,r),E}$.

Si $r \leqslant r'$, $\psi' : \mathfrak{K}(E) \longrightarrow \mathfrak{K}_{a,r'}$ et $\psi' = \psi\psi_{r,r'}^{(a)}$, on a $(\psi')_{E,a} = (\psi)_{E,a}$. L'ensemble $\Psi_{E,a}$ des isomorphismes $\mathfrak{K}(E) \longrightarrow \mathfrak{K}_a$ prolongeant $(\varphi)_{E,a}$ est visiblement $\psi_{E,a}\, \mathcal{G}_{\mathfrak{K}(E)/K(E)}$, où $\psi_{E,a} \in \Psi_{E,a}$.

Etant donné un $E \in \mathcal{E}$, on appelera élément analytique algébroïde de support E l'ensemble des zéros dans $\mathfrak{K}(E)$ d'un polynôme unitaire irréductible $f(T) \in K(E)[T]$. On notera aussi cet élément analytique, par un abus d'écriture, $(E;f(T))$. D'une manière analogue, si $a \in k'^n$, on appelera un point (ou un germe) algébroïde de support a l'ensemble des zéros dans $\mathfrak{K}_a$ d'un polynôme unitaire irréductible $f(T) \in K_a(T)$, et on le notera aussi $(a;f(T))$. Ce point sera dit simple si $f(T)$ est un polynôme linéaire, donc de la forme $T - \varphi(X)$ [où, si $a \in k^n$, $\varphi(X)$ est une fonction méromorphe en $X-a$ autour de a] . En particulier, si $\varphi(X) \in A_a$, un tel point sera identifé avec le point $(a, \varphi(X))$ du prolongement quasi-connexe uniforme $(a;f(T))$ sera dit quasi-simple si $f(T)$ est radicielle, soit $f(T) = T^q - g(X)$, ou q est une puissance de la caractéristique p de k (supposée $\neq 0$) et $g(X) \in K_a$. Dans ce cas, $f(T)$ a un unique zéro de la forme $g(X)^{1/q}$ qui est autour de a, une fonction uniforme de X, et, en particulier, si $a \in k^n$, une fonction méromorphe de $(X-a)^{1/q} = X^{1/q} - a^{1/q}$. Un élément analytique $(E;f(T))$, ou un point analytique $(a;f(T))$, sera dit séparable si $f(T)$ est un polynôme séparable.

Si $E,E' \in \mathcal{E}$ sont tels que $E \subseteq E'$ et si $(E',f'(T))$ est un élément analytique algébroïde de support E', notons $\varphi_{E,E'} f'(T)$ le polynôme $\in K(E)[T]$ obtenu en appliquant $\varphi_{E,E'}$ aux coefficients de $f'(T)$. (Autrement dit, en prenant les restrictions de ces coefficients, en tant que fonctions de X, à l'ensemble E). Comme $f'(T)$ est irréductible dans $K(E')$, $\varphi_{E,E'} f'(T)$ l'est dans $\varphi_{E,E'}.K(E')$, mais pas forcément dans son surcorps $K(E)$ (car il n'y a aucune raison pour que $\varphi_{E,E'}.K(E)$

soit algébriquement clos dans K(E)). En général, ce polynôme a, dans K(E), une décomposition non-triviale en facteurs irréductibles

$$\varphi_{E,E'}.f'(T) = [f_1(T)\ f_2(T)\ \dots\ f_m(T)]^q$$

où $f_1(T)$, $f_2(T)$, ..., $f_m(T)$ sont des polynômes irréductibles distincts $\in K(E)[T]$ et q est une puissance de la caractéristique p de k (q = 1 si p = 0). On dira que (E',f'(T)) <u>contient</u> chacun des éléments analytiques $(E,f_j(T))$ (j = 1,2,...,m). De la même manière, si a $\in$ E, et si (E,f(T)) est un élément analytique algébroïde de support E, $(\varphi)_{E,a}.f(T)$ a une décomposition analogue

$$(\varphi)_{E.a}.f(T) = [g_1(T)\ g_2(T)\ \dots\ g_m(T)]^q$$

dans K_a, et on dira que tout point algébroïde $(a,g_j(T))$ <u>appartient</u> à (E,f(T)). Si E,F $\in \mathcal{E}$ sont non-disjoints et si G est une composante quasi-connexe de E $\cap$ F, un élément analytique (G,g(T)) contenu dans un élément analytique (E,f(T)) sera dit une <u>valence</u> de cet élément relativement à F. On dira que deux éléments analytiques (E;e(T)) et (F;f(T)) à supports non-disjoints E,F <u>se prolongent</u> s'il existe un élément analytique (G',g(T)), qui soit à la fois une valence de (E;e(T)) par rapport à F et une valence de (F;f(T)) par rapport à E auquel cas on dira qu'ils se prolongent à travers cette valence. Il est évident que si un élément analytique est contenu dans un autre, tout point du premier est aussi un point du second. Ainsi, si deux éléments analytiques se prolongent à travers une valence, tout point de cette valence en est un point commun. Mais le théorème d'unicité montre que si un point d'une valence de (E,e(T)) relativement à F appartient à (F,f(T)), (E;e(T)) et (F;f(t)) se prolongent à travers cette valence.

L étant un corps et f(T) étant un polynôme irréductible $\in L[T]$, il existe une puissance q de la caractéristique p de L et une extension inséparable L' de L telle que $f(T) = f'(T)^q$, où f'(T) est un polynôme $\in L'[T]$ à zéros simples. Soit D' le discriminant (forcément $\neq 0$) de f'(T). Alors $D = D'^q \in L$ et sera dit le <u>discriminant réduit</u> de f(T).

En particulier, si $(E,f(T))$ est un élément analytique de support E, considérons le polynôme $f_u^*(T) = uf(T) \in A(E)[T]$ qu'on obtient en multipliant f(T) par un $u \in A(E)$, $u \neq 0$. Soit D_u le discriminant réduit de $f_u^*(T)$ et soit $\mathfrak{D}$ l'idéal de A(E) engendré par tous les D_u, $u \in A(E)$. $\mathfrak{D}$ sera dit l'idéal discriminantiel de l'élément analytique consideré, et on appellera variété discriminantielle de cet élément l'ensemble des $a \in E$ tels que $d(a) = 0$ pour tout $d(X) \in \mathfrak{D}$. Il est facile de voir que la variété discriminantielle ne contient aucun ouvert.

Si $a \in E \cap k^n$ n'appartient pas à la variété discriminantielle de $(E;f(T))$, en appliquant le lemme de Hensel dans l'anneau local $A_a = k[[X-a]]$ des séries de Taylor formelles en X-a sur k avec l'idéal maximal $m = (X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$ au polynôme $f_u^*(T) \in K_a[T]$, tel que $D_u(a) \neq 0$, on prouve que $(\varphi)_{E,a}.f_u^*(T)$, donc aussi $(\varphi)_{E,a}.f(T)$ se décompose dans A_a, resp. dans son corps quotient K_a en facteurs radiciels par rapport à T, et le fait que les coefficients de $f_u^*(T)$ sont des séries de Taylor convergentes, permet de prouver la convergence autour de a des coefficients de ce facteurs radiciels, qui, ainsi appartiennent déjà à $K_a[T]$. On prouve le même fait si $a \in E$ n'appartient pas à la variété discriminantielle mais à certaines coordonnées infinies, en appliquant le lemme de Hensel dans l'anneau local, ou $X_i - a_i$ est remplacé par X_i^{-1} quand $a_i = \infty$. Ainsi, si $a \in E$ n'appartient pas à la variété discriminantielle de $(E,f(T))$, tout point de $(E,f(T))$ de support a est quasi-simple (et, en particulier, est simple si l'élément analytique est séparable).

Considérons l'ensemble $Analg_n(k)$ de tous les éléments analytiques algébroïdes $(E;f(T))$, où $E \subseteq k'^n$. Considérons la relation d'équivalence $\equiv$ sur cet ensemble telle que $u = (E,f(T))$ et $u' = (E',f'(T))$ soient équivalents si, et seulement s'il existe une chaîne d'éléments analytiques algébroïdes

$$u = u_o , u_1 , \dots , u_s = u'$$

qui relie u à u' et dont deux éléments consécutifs quelconques se prolongent. (On dira d'une telle chaîne, que c'est une chaîne de prolongement entre u et u'). On appellera longueur d'une telle chaîne le supremum des diamêtres (semi-réels) d_i des supports des u_i $(i=0,1,\dots,s)$. Toute classe d'équivalence F de $\equiv$ sera dite une

<u>fonction analytique algébroïde de</u> $X = (X_1, \dots, X_n)$ <u>dans</u> k. Un point analytique algébroïde $p = (a; f(T))$ sera dit un point de la fonction analytique F (et on écrira $p \in E$) s'il existe un élément analytique $u \in F$ tel que $p \in u$. En vertu du théorème d'unicité, deux fonctions analytiques algébroïdes distinctes ne peuvent avoir aucun point commun.

On appelle <u>riemannien</u> de F et on note Riem(F) l'ensemble des points-analytiques algébroïdes $p \in F$, muni de la distance hierarchimétrique $d(p,p')$ à valeurs dans $\underline{S}^n$, (et de topologie correspondante) telle que $d(p,p) = 0$ et si $p \neq p'$, $d(p,p')$ est l'infinum sur $\underline{S}^n$ des longueurs de toutes les chaînes de prolongement entre u et u', où u,u' sont des éléments analytiques quelconques de F tels que $p \in u$ et $p' \in u'$. Si $p = (a, f(T))$, on peut représenter F comme fonction de p, en posant $F(p) = f_a(T)$ où $f_a(T)$ s'obtient de $f(T) \in K_a(T)$ en posant, dans ses coefficients, $X = a$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 222, 1946, p. 581-583.

[2] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 238, 1954, p. 2385-2387.

[3] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 239, 1954, p. 468-470.

[4] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 239, 1954, p. 745-747.

[5] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 244, 1957, p. 1304-1306.

[6] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 244, 1957, p. 1599-1602.

[7] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 244, 1957, p. 1996-1999.

[8] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 244, 1957, p. 2570-2573.

[9] KRASNER, M. - Comptes Rendus, t. 245, 1957, p. 1285-1288.

[10] KRASNER, M. - Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres (Colloques internationaux du CNRS, n° 143, Clermont-Fd, 1964 (paru en 1966), p. 97-141.

[11] KRASNER, M. - Séminaire Delange-Pisot-Poitou, t. 11, 1969/70, Exp. 18.

[12] KRASNER, M. - Bull. Sc. math., 2e série, t. 71, 1947, p. 123-152.

[13] LAZARD, M. - Pub. math. de l'I. H. E. S., fasc. 14, 1963.

[14] MOTZKIN, E. - Thèse, University of California at Los Angeles (1968).

[15] MOTZKIN, E. et ROBBA, P. - Comptes Rendus, t. 269, 1969, p. 450-453.

[16] OLIVIER, J.-P. - Les K-espaces, Thèse de 3e cycle, Paris 1965 (miméographié).

[17] ROBBA, P. - I, Astérisque 10, 1973, p. 109-218.

[18] ROBBA, P. - II, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 193-217.

[19] SCHÖBE, W. - Thèse, Université de Halle, 1930.

[20] SCHWARTZ, L. - Théorie des distributions, t. 1, Paris, Hermann, 1950.

[21] THALER, A. - Proc. Amer. math. Soc., t. 15, 1964, p. 944-950.

Marc KRASNER
Mathématiques,(UER 47), Tour 56
Université de Paris-VI
4 place Jussieu
75231 PARIS CEDEX 05