ERMANNO MARCHIONNA

Sur les variétés algébriques complètement régulières

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 45-51
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__45_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 45-51.

SUR LES VARIETES ALGEBRIQUES COMPLETEMENT REGULIERES

par Ermanno MARCHIONNA

1°/ Nous exposons ici quelques propriétés des variétés algébriques normales qui sont complètement régulières ; les démonstrations relatives seront publiées dans notre travail [13] à paraître. Pour rendre plus clair l'exposé, il est convenable de faire quelques rappels sur les index d'irrégularité d'un diviseur et sur les irrégularités d'une variété normale.

Soit V_d une variété algébrique irréductible de dimension $d \geqslant 2$ appartenant à un espace projectif complexe S_r de dimension r ; supposons que V_d soit une variété (localement) normale au sens de Zariski.

Soit D un diviseur de la variété, c'est-à-dire un cycle de dimension $d-1$ au sens de Zariski-Weil (hypersurface virtuelle de Severi).

Considérons $d-1$ hypersurfaces E_{m_1}, $E_{m_2},\dots,E_{m_{d-1}}$ découpées sur V_d par $d-1$ formes génériques de l'espace ambiant S_r, ayant les ordres $m_1, m_2,\dots,m_{d-1}$. Considérons aussi la sous-variété normale :

$$W_{d-h} = E_{m_1} \cap E_{m_2} \cap \dots \cap E_{m_h} \ , \ (h=1,2,\dots,d-1) \ .$$

Soit

$$(D_h) = |D+E_{m_1} + \dots + E_{m_h}| \ . \ W_{d-h}$$

le système linéaire découpé sur W_{d-h} par le système linéaire complet $|D+E_{m_1} + \dots + E_{m_h}|$ tracé sur V_d.

Indiquons par $\sigma^h[D]$ le défaut du système (D_h), $(= \dim|D_h| - \dim(D_h))$, lorsque les ordres m_i sont assez élevés, c'est-à-dire plus grands qu'un certain entier $\lambda[D]$ défini en [11], qui dépend seulement du système complet $|D|$ et de la variété V_d.

On démontre que l'entier non négatif $\sigma^h[D]$ dépend seulement du système $|D|$ et pas même des hypersurfaces E_{m_i} que l'on a employées dans la définition (cfr.[11], n.8).

Nous disons que $\sigma^h[D]$ est l'h^{me} <u>index d'irrégularité du diviseur</u> D et du système $|D|$.

Indiquons maintenant par K un diviseur du système canonique de V_d , et considérons les genres géométrique et arithmétique de V_d :

$$P_g(V_d) = \dim|K| + 1$$
$$P_a(V_d) = \delta(K) + 1 + (-1)^{d+1} ,$$

où $\delta(K)$ est la dimension virtuelle du système $|K|$. On appelle **irrégularité** d-dimensionnelle de V_d , (ou <u>dernière irrégularité</u>), l'entier relatif

$$q_d = P_g(V_d) - P_a(V_d)$$

Envisageons encore la sous-variété $W_{d-h} = E_{m_1} \cap \ldots \cap E_{m_h}$, et soit

$$q_{d-h}(W_{d-h}) = P_g(W_{d-h}) - P_a(W_{d-h})$$

sa dernière irrégularité. On démontre que, si l'on choisit les ordres $m_1,\ldots,m_h$ assez élevés $(> \lambda[K])$, l'entier $q_d(W_{d-h})$ dépend seulement de la variété V_d et pas même des hypersurfaces $E_{m_1},\ldots,E_{m_h}$ que l'on a employées dans la définition.

On dit alors que $q_{d-h}(W_{d-h})$ est <u>l'irrégularité de dimension</u> d-h de la variété V_d ; elle sera indiquée par q_{d-h} . On vérifie très facilement que $q_1 = 0$, $q_2 \geqslant 0$.

On démontre (cfr. [11], n.24) que

$$q_{d-h} + q_{d-h+1} = \sigma^h[K] , \quad (h=1,2,\ldots,d-1) .$$

Dans le cas où V_d est non singulière, l'entier $\sigma^h[K]$ est égal au nombre g_{d-h} des formes différentielles du degré d-h , linéairement indépendantes, qui sont attachées à la variété V_d (cfr. Hodge [6]) ; on peut aussi améliorer la présentation géométrique des irrégularités en supprimant, par exemple, les restrictions sur les ordres des hypersurfaces $E_{m_1},\ldots,E_{m_h}$ que l'on a employées dans la définition de q_{d-h} .

2°/ Introduisons maintenant le diviseur Z , <u>zéro</u> de l'équivalence linéaire sur V_d . Nous disons que V_d est <u>régulière d'index</u> 1 , si

$$\sigma^1[Z] = 0 .$$

On prouve que $q_2 = 0 \Longrightarrow \sigma^1[Z] = 0$. Pour $d = 2$ on démontre aussi que $\sigma^1[Z] = 0 \Longrightarrow q_2 = 0$.

(La double implication $\sigma^1[Z] = 0 \Longleftrightarrow q_2 = 0$ est certainement vraie même pour $d > 2$, lorsque V_d est non singulière).

Considérons la sous-variété de V_d ,

$$V_{d-h} = V_d \cap S_{r-h} ,$$

où S_{r-h} est un sous-espace <u>générique</u> de dimension $r-h$ de l'espace ambiant S_r . Indiquons par $Z \cdot V_{d-h}$ le zéro de l'équivalence linéaire sur V_{d-h} et -pour rendre homogènes les notations- indiquons par $Z \cdot V_d$ le zéro Z de V_d . Nous disons qu'une variété normale V_d (de dimension $d > 2$) est <u>régulière d'index</u> h $(1 < h \leqslant d-1)$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{array}{ll}
 & \sigma^1[Z \cdot V_{d-h+1}] = 0 \\
 & \sigma^1[Z \cdot V_{d-h+2}] = \sigma^2[Z \cdot V_{d-h+2}] = 0 \\
(1) & \sigma^1[Z \cdot V_{d-h+3}] = \sigma^2[Z \cdot V_{d-h+3}] = \sigma^3[Z \cdot V_{d-h+3}] = 0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \sigma^1[Z \cdot V_{d-1}] = \sigma^2[Z \cdot V_{d-1}] = \ldots = \sigma^{h-1}[Z \cdot V_{d-1}] = 0 \\
 & \sigma^1[Z \cdot V_d] = \sigma^2[Z \cdot V_d] = \ldots = \sigma^{h-1}[Z \cdot V_d] = \sigma^h[Z \cdot V_d] = 0
\end{array}$$

(Pour $h = 1$ on trouve encore la définition de variété régulière d'index 1). Dans le cas où V_d est non singulière les conditions (1) sont surabondantes. Il suffit de supposer que soient satisfaites les conditions de la dernière ligne :

$$(2) \qquad \sigma^1[Z] = \sigma^2[Z] = \ldots = \sigma^h[Z] = 0 ,$$

qui sont équivalentes aux conditions

$$q_2 = q_3 = \ldots = q_h = q_{h+1} = 0 ,$$

c'est-à-dire $\qquad g_1 = g_2 = \ldots = g_h = 0$;

en outre, comme $\sigma^s[D] = \dim H^s[V_d , \Omega^o(D)]$, (où $H^s[V_d , \Omega^o(D)]$ est le $s^{\underline{me}}$ groupe de cohomologie de V_d à coefficients dans le faisceau des germes des fonctions méromorphes qui sont multiples du diviseur - D ; cfr. Hodge [6]) , on peut donner aux conditions (2) la forme cohomologique

$$(3) \qquad \dim H^1[V_d , \Omega^o(Z)] \ldots = \dim H^h[V_d , \Omega^o(Z)] = 0 .$$

Je ne sais pas si l'on peut réduire les conditions (1) même dans le cas d'une V_d singulière.

On vérifie que, <u>si une variété normale</u> V_d (singulière ou non) de dimension $d > 2$ <u>est régulière d'index</u> $h > 1$, alors <u>la sous-variété</u> E_m -section de V_d par une forme générique d'ordre m arbitraire- <u>est régulière d'index</u> $h-1$.

3°/ Une variété normale V_d qui soit régulière d'index $h = d-1$ est dite <u>complètement régulière</u> ; pour une telle variété on peut démontrer les propriétés suivantes :

I) Les irrégularités q_2, q_3, ..., q_{d-1}, q_d de V_d sont nulles.

II) On a $P_a(V_d) = p_a(V_d)$, où $p_a(V_d)$ est le genre arithmétique virtuel de V_d (c'est-à-dire $p_a(V_d) = (-1)^d\{\chi(V_d,0)- 1\}$, ayant indiqué par $\chi(V_d, \ell)$ le polynôme caractéristique de Hilbert attaché à V_d).

III) Pour $h = 1,2,\dots,d-1$, et pour tout entier $\ell \geqslant 0$, indiquée par E la section hyperplane générique de V_d, on a

$$\sigma^h[K +\ell E] = 0$$

IV) Pour $h = 1,2,\dots,d-1$, et pour tout entier relatif ℓ, on a

$$\sigma^h[K -\ell E] = \sigma^{d-h}[\ell E] \quad (*)$$

Pour $d > 2$ on peut ajouter que la sous-variété E_m, section d'une variété V_d complètement régulière par une hypersurface générique de l'espace ambiant S_r, est elle aussi complètement régulière ; en particulier les sous-variétés V_{d-1}, V_{d-2}, ..., V_2, sections respectives de V_d par des sous-espaces génériques S_{r-1}, S_{r-2}, ..., S_{r-d+2} sont complètement régulières.

(*) Lorsque V_d est non singulière, les propriétés II, III, IV sont bien connues et sont valables même si V_d n'est pas complètement régulière ; en plus la propriété III est généralisée par le "théorème de régularité de l'adjoint à un système ample" (Kodaira-Spencer) ; et la propriété IV est valable aussi en remplaçant le diviseur E par un diviseur D quelconque (théorème de dualité de Serre-Hodge ; cfr. [6]).

4°/ Les variétés régulières d'index h ont des liens très profonds avec les variétés qui sont $(h+1)$ - fois de première espèce au sens de Dubreil. Soit W_d une variété pure (même réductible, mais dépourvue de composants multiples) appartenant à l'espace S_r ; soit W_{d-1} la section de W_d par un hyperplan générique S_{r-1}. La variété W_d est de première espèce si une hypersurface quelconque de S_{r-1} qui contient W_{d-1} est découpée sur S_{r-1} par une hypersurface de S_r contenant W_d (mais pas l'espace S_{r-1}) (*). On dit que W_d est $(h+1)$ - fois de première espèce si W_d et ses sections par des sous-espaces génériques $S_{r-1}, S_{r-2}, \ldots, S_{r-h}$ sont des variétés de première espèce ; si W_d est d-fois de première espèce, on dit qu'elle est complètement de première espèce.

Nous avons démontré les propriétés suivantes.

Soit V_d une variété irréductible normale (singulière ou non) de dimension $d \geqslant 2$.

Si V_d est une variété $(h+1)$ - fois de première espèce $(1 \leqslant \underline{h} < d)$, elle est régulière d'index h.

La propriété réciproque n'est pas vraie, cependant si V_d est régulière d'index h on peut trouver une variété V_d^*, modèle birationnel birégulier de V_d, qui est $(h+1)$ - fois de première espèce.

En particulier, si V_d est complètement de première espèce, elle est complètement régulière ; et si V_d est complètement régulière elle admet un modèle birationnel complètement de première espèce.

Ces résultats généralisent des propriétés que nous avons déjà étudiées en [9] lorsque V_d est non singulière, propriétés qui sont analogues à des théorèmes démontrés par Serre [15], Dubreil [2] dans un ordre d'idées tout à fait différent (cfr. aussi Gasapina [4]).

Considérons maintenant une variété irréductible normale V_d qui soit $(h+1)$ - fois de première espèce (V_d est aussi $(k+1)$ - fois de première espèce pour tout $k < h$). Indiquons par H une sous-variété pure de V_d, ayant la codimension 1 ; H pourra être supposée même réductible, mais sans composants multiples.

En utilisant des résultats que nous avons établi en [12], on peut démontrer que H est une variété h-fois de première espèce au sens de Dubreil si, et seule-

---

(*) Si W_d est une variété irréductible normale, la propriété qu'elle soit de première espèce est équivalente à la propriété qu'elle soit arithmétiquement normale ; cela signifie que la totalité des hypersurfaces d'ordre ℓ de l'espace ambiant découpe sur W_d un système linéaire complet pour tout $\ell = 1, 2, 3, \ldots$

ment si, pour tout entier relatif ℓ on a (sur V_d) :

$$\sigma^1[\ell\, E-H] = \sigma^2[\ell\, E-H] = \ldots = \sigma^h[\ell\, E-H] = 0 . \tag{4}$$

Donc, les conditions pour que H soit h-fois de première espèce semblent en nombre infini, mais en fait, on peut remplacer les (4) par un nombre fini de conditions numériques essentielles.

5°/ Une variété irréductible V_d ($d \geqslant 2$) normale de première espèce, est complètement de première espèce si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites ([12], Cor. 36) :

I) V_d est complètement régulière.

II) Pour tout entier $\ell > 0$ on a

$$\sigma^1[\ell\, E] = \sigma^2[\ell\, E] = \ldots = \sigma^{d-1}[\ell\, E] = 0 .$$

En s'appuyant sur ce critère et sur un théorème de G. Gherardelli [5] sur les courbes intersections complètes de deux surfaces de l'espace S_3, on peut démontrer qu'<u>une variété irréductible normale</u> V_d, (même singulière, $d > 1$), <u>est l'intersection complète de deux hypersurfaces d'un espace</u> S_{d+2} de dimension $r = d+2$ si, et seulement si :

I) V_d est une variété de première espèce.

II) V_d est une variété <u>sous-canonique</u>, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif ν tel que le diviseur $\nu\, E$ est linéairement équivalent à un diviseur canonique K de V_d.

III) V_d est complètement régulière.

IV) Dans le cas $\nu > 0$, on a $\sigma^h[\ell\, E] = 0$ pour $h = 1, 2, \ldots, d-1$; $0 < \ell < \nu$.

Un théorème analogue sur les V_d non singulières intersections complètes a été donné par Gasapina [4] ; une proposition plus fine a été établie par Serre (cfr. [16], p. 14 ; Serre retrouve aussi, à la page 15, le théorème de Gherardelli).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul). - Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne. Actual. Scient. et Industr." Hermann Paris (1935).

[2] DUBREIL (Paul). - Idéaux de polynômes et fonction de Hilbert. Rend. Sem. Matem. Univ. e Politecnico Torino, 20, 1960-1961.

[3] GASAPINA (U.). - Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari, (Nota II), Boll. Un. Matem. Ital.,16, 1961.

[4] GASAPINA (U.). - Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica normale, Atti Accad. Scienze Torino, 100, 1965-1966.

[5] GHERARDELLI (G.). - Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie, Atti della R. Accademia d'Italia, vol. IV, fasc. 6, 1942.

[6] HODGE (W.V.D.). - A note on theorem of Riemann-Roch, Journal London Math. Soc. 30, 1954.

[7] KODAIRA (K.), SPENCER (D.C.). - Divisors class groups on algebraic varieties. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 39, 1953.

[8] KODAIRA (K.), SPENCER (D.C.). - On arithmetic genera of algebraic varieties. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.,39, 1953.

[9] MARCHIONNA (Ermanno). - Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica non singolare. Annali di Matematica (IV), Tome LIV, 1961.

[10] MARCHIONNA (Ermanno). - Sui multipli dei sistemi lineari d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica pluriregolare. Rend. di Matematica, Roma, 21, 1962.

[11] MARCHIONNA (Ermanno). - Sulla dimensione virtuale ed effettiva di un sistema lineare d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica normale. Rend. di Matematica, Roma, 25, 1966.

[12] MARCHIONNA (Ermanno). - Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica. Symposia Mathematica, Ist. Naz. Alta Matem. Roma, Academic Press London New-York, vol. V, 1971.

[13] MARCHIONNA (Ermanno). - Sulle varietà completamente regolari, Annali di Matem. (volume in onore del prof. B. Segre) ; à paraître.

[14] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie en géométrie algébrique. Proc. Int. Congress of Mathem., Amsterdam, III, 1954.

[15] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents. Annals of Mathem. 61, 1955.

[16] SERRE (Jean-Pierre). - Sur les modules projectifs. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres) 14è année, 1960-1961, n° 2.

(Texte reçu le 5/2/1973)

Università di Milano
Istituto Matematico
"Federigo Enriques"
Via C. Saldini, 50
MILANO (Italie)