JEAN-BAPTISTE POLY

Sur l'homologie des courants à support dans un ensemble semi-analytique

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 35-43
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__35_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 35-43.

SUR L'HOMOLOGIE DES COURANTS A SUPPORT DANS UN ENSEMBLE SEMI-ANALYTIQUE

par Jean-Baptiste POLY

1. INTRODUCTION.

Soient X et Y , $Y \subset X$, des ensembles semi-analytiques fermés d'un espace analytique réel (Tous les espaces et variétés considérés ici sont supposés réunion dénombrable de compacts). On désigne par ${}'\mathfrak{D}_{.}$ le faisceau différentiel des (germes de) courants impairs de X , et on considère la suite exacte de complexes

$$0 \to {}'\mathfrak{D}_{.}(Y^{\infty}) \to {}'\mathfrak{D}_{.}(X) \to {}'\mathfrak{D}_{.}(X/Y^{\infty}) \to 0$$

où ${}'\mathfrak{D}_{.}(X)$ est le complexe des courants de X , ${}'\mathfrak{D}_{.}(Y^{\infty})$ le sous-complexe des courants de X à support dans Y , et où le quotient ${}'\mathfrak{D}_{.}(X/Y^{\infty})$ est aussi le sous-complexe de ${}'\mathfrak{D}_{.}(X-Y)$ constitué des courants de X-Y prolongeables en courants de X . Cette situation est étudiée dans le paragraphe 4 de [2] , où Herrera et Lieberman montrent (en utilisant la théorie de l'intégration sur les chaînes semi-analytiques) le

1.1. THEOREME. Soient $Y \subset X$ des ensembles semi-analytiques fermés d'un espace analytique réel. Dans le diagramme commutatif suivant (rattachant la suite exacte d'homologie des courants et la suite exacte d'homologie de Borel-Moore)

(1)
$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_q\,{}'\mathfrak{D}_{.}(Y^{\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_Y"] & H_q\,{}'\mathfrak{D}_{.}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_X"] & H_q\,{}'\mathfrak{D}_{.}(X/Y^{\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{X-Y}"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_q(Y,\mathbb{C}) \arrow[r] & H_q(X,\mathbb{C}) \arrow[r] & H_q(X-Y,\mathbb{C}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales sont des surjections (ayant des sections canoniques) ([2], théorème 4.3).

Lorsque X est une variété $\mathcal{C}^{\infty}$, les flèches τ_X sont les isomorphismes classiques de De Rham. En fait, utilisant la résolution des singularités de Hironaka et des résultats de Łojasiewicz, on montre ici le théorème suivant :

1.2. **THEOREME.** <u>Soient</u> X <u>une variété analytique réelle et</u> Y <u>un ensemble semi-analytique fermé de</u> X . <u>Alors, toutes les flèches verticales du diagramme</u> (1) <u>sont des isomorphismes</u>.

1.3. <u>Interprétation cohomologique</u>. X étant une variété analytique réelle de dimension n , est en particulier une n-variété homologique : désignant par $\theta = \mathcal{H}_n(X,\mathbb{C})$ le faisceau de $\mathbb{C}$-orientation de X (ou faisceau des complexes tordus), la suite exacte d'homologie de Borel-Moore est isomorphe à la suite exacte de cohomologie locale (à coefficients dans θ) pour $p+q = n$

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^p_Y(X,\theta) & \to & H^p(X,\theta) & \to & H^p(X-Y,\theta) & \to \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \\
\to H_q(Y,\mathbb{C}) & \to & H_q(X,\mathbb{C}) & \to & H_q(X-Y,\mathbb{C}) & \to
\end{array}$$

(cf Bredon [1], chap. V, §9). On en déduit notamment que dans les conditions du théorème 1.2, les flèches naturelles $H^p\ '\mathfrak{D}^{\boldsymbol{\cdot}}(Y^\infty) \to H^p_Y(X,\theta)$ sont des isomorphismes. On montrerait aussi qu'il en est de même des flèches $H^p\ '\tilde{\mathfrak{D}}^{\boldsymbol{\cdot}}(Y^\infty) \to H^p_Y(X,\mathbb{C})$ où $'\tilde{\mathfrak{D}}^{\boldsymbol{\cdot}}$ est le faisceau des courants pairs de X .

2. <u>REMARQUES</u>.

2.1. Les flèches $\mathcal{C}_X$ étant les isomorphismes de De Rham pour la variété X , il résulte du lemme des 5 que pour prouver le théorème 1.2, il suffit de montrer que toutes les flèches $\mathcal{C}_Y$ (ou bien toutes les flèches $\mathcal{C}_{X-Y}$) sont des isomorphismes.

2.2. Si X est une variété $\mathcal{C}^\infty$, le faisceau différentiel $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\cdot}}$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X est une résolution fine du faisceau constant $\mathbb{C}$. Soit $'\Delta.$ le faisceau flasque dual (au sens de Borel-Moore) du faisceau c-mou $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\cdot}}$, défini pour tout ouvert V de X par

$$\Gamma(V,'\Delta.) = \mathrm{Hom}(\Gamma_c(V,\ \mathcal{E}^{\boldsymbol{\cdot}})\ ,\ \mathbb{C})\ .$$

Il résulte de Bredon [1] (chap. V, §5) que pour tout fermé Y de X , la suite exacte d'homologie de Borel-Moore est isomorphe à la suite exacte d'homologie des "courants algébriques"

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H_q\,'\Delta.(Y^\infty) & \to & H_q\,'\Delta.(X) & \to & H_q\,'\Delta.(X-Y) & \to \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \\
\to H_q(Y,\mathbb{C}) & \to & H_q(X,\mathbb{C}) & \to & H_q(X-Y,\mathbb{C}) & \to
\end{array}$$

les flèches $\mathcal{C}$ du diagramme (1) se définissant grâce à l'inclusion $'\mathfrak{D}. \to '\Delta.$

2.3. Ce qui précède montre que le théorème 1.2 est de nature locale. Il suffit en effet de montrer que toutes les flèches $H_q\,'\mathfrak{D}.(Y^\infty) \to H_q\,'\Delta.(Y^\infty)$ sont des isomorphismes. Soient $'\Delta._{Y^\infty}$ et $'\mathfrak{D}._{Y^\infty}$ les faisceaux de sections de $'\Delta.$ et $'\mathfrak{D}.$ à support dans Y. Ces faisceaux étant acycliques (car $'\Delta._{Y^\infty}$ est flasque, $'\mathfrak{D}._{Y^\infty}$ est fin), pour que les flèches $H_q\Gamma(X, '\mathfrak{D}._{Y^\infty}) \to H_q\Gamma(X, '\Delta._{Y^\infty})$ soient des isomorphismes, il suffit que $\mathcal{H}_q\,'\mathfrak{D}._{Y^\infty} \to \mathcal{H}_q\,'\Delta._{Y^\infty}$ soient des isomorphismes. On peut donc dans les démonstrations qui suivent remplacer la variété X par un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3. <u>LE CAS D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE</u>.

3.1. PROPOSITION. <u>Soient</u> X <u>une variété</u> $\mathscr{C}^\infty$ <u>et</u> Y <u>une sous-variété</u> $\mathscr{C}^\infty$ <u>fermée de</u> X. <u>Alors, toutes les flèches du diagramme</u> (1) <u>sont des isomorphismes</u>.

Ce résultat est démontré par exemple dans Herrera-Lieberman [2], corollaire 4.5. Désignant par $'\mathfrak{D}.(Y)$ le complexe des courants de la variété Y, on sait d'après De Rham que $H_q\,'\mathfrak{D}.(Y) \to H_q(Y, \mathbb{C})$ sont des isomorphismes, et il suffit de montrer que l'inclusion des variétés $Y \to X$ induit des isomorphismes $H_q\,'\mathfrak{D}.(Y) \to H_q\,'\mathfrak{D}.(Y^\infty)$, ce qui se fait localement en utilisant une formule d'homotopie des courants associée à une rétraction de X sur Y.

3.2. <u>La suite exacte de Mayer-Vietoris</u>.

Soient Y_1 et Y_2 des fermés d'un ouvert X de $\mathbb{R}^n$, de réunion Y et intersection y. Pour que la suite

$$0 \to {}'\mathfrak{D}.(y^\infty) \to {}'\mathfrak{D}.(Y_1^\infty) \oplus {}'\mathfrak{D}.(Y_2^\infty) \to {}'\mathfrak{D}.(Y^\infty) \to 0$$

soit exacte, il faut et suffit d'après Łojasiewicz [5] (cf aussi Malgrange [6], chap. VII, proposition 1.4) que les fermés Y_1 et Y_2 soient régulièrement situés. Il en est ainsi si Y_1 et Y_2 sont des sous-variétés $\mathscr{C}^\infty$ fermées de X se coupant transversalement, et plus généralement d'après Łojasiewicz [6] si Y_1 et Y_2 sont des ensembles semi-analytiques fermés de X.

Quand Y_1 et Y_2 sont régulièrement situés, on a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H_q\,'\mathfrak{D}.(y^\infty) & \to & H_q\,'\mathfrak{D}.(Y_1^\infty) \oplus H_q\,'\mathfrak{D}.(Y_2^\infty) & \to & H_q\,'\mathfrak{D}.(Y^\infty) & \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to H_q(y, \mathbb{C}) & \to & H_q(Y_1, \mathbb{C}) \oplus H_q(Y_2, \mathbb{C}) & \to & H_q(Y, \mathbb{C}) & \to
\end{array}$$

où la ligne du bas est la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au couple (Y_1, Y_2).

3.3. LEMME. *Le théorème* 1.2 *est valide si* Y *est une hypersurface analytique à croisements normaux dans une variété analytique réelle* X .

On peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (de coordonnées $x_1, x_2 \ldots, x_n$) dans lequel $Y = \bigcup_{1 \leq i \leq k} Y_i$, où les Y_i sont les hyperplans de coordonnées $x_i = 0$. En fait, on démontre le résultat pour des Y du type $Y = \bigcup_{1 \leq i \leq k} Z_i$ où les Z_i sont intersections finies d'hyperplans de coordonnées, et cela par récurrence sur k , en utilisant 3.1 et 3.2.

3.4. PROPOSITION. *Soient* X *une varieté analytique réelle et* Y *un sous-ensemble analytique fermé de* X . *Alors, toutes les flèches du diagramme* (1) *sont des isomorphismes*.

Le résultat est évident au voisinage d'un point x de X en lequel $\dim_x Y = \dim X$, Y contenant alors la composante connexe de x dans X . Si $\dim_x Y < \dim X$, il existe d'après Hironaka [3] un voisinage ouvert de x (qu'on désigne encore par X), une variété analytique réelle $\tilde{X}$ (de même dimension que X) et un morphisme analytique $\pi : \tilde{X} \to X$ ayant les propriétés suivantes :

π est propre et surjectif
$\tilde{Y} = \pi^{-1} Y$ est une hypersurface à croisements normaux
π induit un isomorphisme $\tilde{X}-\tilde{Y} \to X-Y$

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H_q\,{}'\mathfrak{D}_\cdot(\tilde{X}/\tilde{Y}^\infty) \arrow[r, "\mathcal{C}_{\tilde{X}-\tilde{Y}}", "\sim"'] \arrow[d, "\alpha"] & H_q(\tilde{X}-\tilde{Y}, \mathbb{C}) \arrow[d, "\beta", "\wr"'] \\
H_q\,{}'\mathfrak{D}_\cdot(X/Y^\infty) \arrow[r, "\mathcal{C}_{X-Y}"] & H_q(X-Y, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

où les flèches $\mathcal{C}_{\tilde{X}-\tilde{Y}}$ sont des isomorphismes d'après le lemme 3.3, et où β est un isomorphisme. Pour montrer que les flèches $\mathcal{C}_{X-Y}$ sont des isomorphismes, il suffit de montrer que α est un isomorphisme. En fait, on montre ci-dessous (proposition 4) que l'image directe $\pi_* : {}'\mathfrak{D}_\cdot(\tilde{X}) \to {}'\mathfrak{D}_\cdot(X)$ est surjective, et par suite induit un isomorphisme sur les espaces de courants prolongeables ${}'\mathfrak{D}_\cdot(\tilde{X}/\tilde{Y}^\infty) \xrightarrow{\sim} {}'\mathfrak{D}_\cdot(X/Y^\infty)$. La proposition 3.4 est ainsi démontrée, compte-tenu des remarques 2.

4. PROPOSITION. *Soient* $\tilde{X}$ *et* X *des variétés réelles analytiques de même dimension* n , $\pi : \tilde{X} \to X$ *un morphisme analytique propre et surjectif. Alors, l'image directe* $\pi_* : {}'\mathfrak{D}(\tilde{X}) \to {}'\mathfrak{D}(X)$ *est une application surjective.*

4.1. Soit $\tilde{A}$ l'ensemble des points critiques de π . D'après le théorème de Sard, $\pi(\tilde{A})$ est négligeable dans X . Posant $U = X - \pi(\tilde{A})$ et $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$, alors U est dense dans X et $\pi|\tilde{U}$ est un isomorphisme local de $\tilde{U}$ sur U . Pour des raisons techniques, on voudrait aussi que $\tilde{X} - \tilde{A}$ soit dense dans $\tilde{X}$. A priori, $\tilde{A}$ est un ensemble analytique de $\tilde{X}$, défini localement par l'annulation du jacobien de π . Soit $\tilde{B}$ l'ensemble des points de $\tilde{X}$ où $\tilde{A}$ est de dimension n ; $\tilde{B}$ est une réunion de composantes connexes de $\tilde{X}$. On pose $\tilde{X}' = \tilde{X} - \tilde{B}$ et $\pi' = \pi|\tilde{X}' : \tilde{X}' \to X$.

π' est un morphisme analytique propre, surjectif (l'image de π' est d'une part fermée dans X car π' est propre, et d'autre part dense dans X car elle contient U) dont l'ensemble des points critiques est un vrai sous-ensemble analytique de $\tilde{X}'$. Enfin, si π'_* est surjective, il en est de même de π_* . On suppose donc désormais que l'ensemble des points critiques de π est un vrai sous-ensemble analytique de $\tilde{X}$.

4.2. On désigne par $'\mathcal{E}(X)$ l'espace des courants de X à support compact, dual de l'espace de Fréchet $\mathcal{E}(X)$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X . Pour démontrer la proposition 4, il suffit de montrer que si V est un ouvert de coordonnées dans X et $\tilde{V} = \pi^{-1}V$, alors $\pi_* : {}'\mathcal{E}(\tilde{V}) \to {}'\mathcal{E}(V)$ est une application surjective. En effet, il existe un recouvrement ouvert localement fini de X par des ouverts de coordonnées $V_i \Subset X$, et on peut trouver une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité sur X par des fonctions η_i $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans V_i . Pour tout courant $T \in {}'\mathcal{D}(X)$, on a $\eta_i T \in {}'\mathcal{E}(V_i)$. S'il est prouvé que $\eta_i T = \pi_* \tilde{T}_i$ avec $\tilde{T}_i \in {}'\mathcal{E}(\tilde{V}_i)$, alors on a

$$T = \Sigma\, \eta_i T = \Sigma\, \pi_* \tilde{T}_i = \pi_* \Sigma\, \tilde{T}_i$$

en notant qu'on peut calculer $\Sigma\, \tilde{T}_i$ car $\tilde{V}_i$ est un recouvrement localement fini de $\tilde{X}$.

On peut donc se ramener au cas où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (de coordonnées $x_1, x_2 .., x_n$) et il suffit alors de montrer que $\pi_* : {}'\mathcal{E}_n(\tilde{X}) \to {}'\mathcal{E}_n(X)$ est une application surjective. En effet, tout courant T de dimension q s'écrit $T = \Sigma\, T_I\, dx_I$ où les courants T_I sont de dimension n . S'il est prouvé que $T_I = \pi_* \tilde{T}_I$, alors on a

$$T = \Sigma\, \pi_*(\tilde{T}_I) dx_I = \Sigma\, \pi_*(\tilde{T}_I \wedge \pi^* dx_I).$$

Par dualité, il suffit donc de montrer que $\pi^* : \mathcal{E}^n(X) \to \mathcal{E}^n(\tilde{X})$ est un monomorphisme de Fréchet, c'est-à-dire une injection à image fermée.

4.3. <u>Le cas des fonctions continues.</u>

<u>Soit</u> $C(X)$ <u>l'espace de Fréchet des fonctions continues sur</u> X . <u>Alors</u> $\pi^* : C(X) \to C(\tilde{X})$ <u>est un monomorphisme</u>.

En effet, pour toute $f \in C(X)$ et tout compact K de X , on a

$$\sup_K |f| = \sup_{\pi^{-1}K} |\pi^* f|$$

π étant propre et surjectif.

4.4. <u>Le cas des fonctions</u> $\mathcal{C}^\infty$.

<u>Soit</u> $E(X)$ <u>l'espace de Fréchet des fonctions</u> $\mathcal{C}^\infty$ <u>sur</u> X . <u>Alors,</u> $\pi^* : E(X) \to E(\tilde{X})$ <u>est un monomorphisme</u>.

La démonstration utilise les résultats suivants :

(I) THEOREME. <u>Soient</u> W <u>un ouvert connexe de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et</u> $s \not\equiv 0$ <u>une fonction analytique réelle dans</u> W . <u>Alors, la multiplication par</u> s <u>est un monomorphisme</u> $s : E(W) \to E(W)$. (Łojasiewicz [5], cf aussi Malgrange [7], p. 72).

(II) LEMME. <u>Soient</u> $\pi : W \to V$ <u>une application</u> $\mathcal{C}^\infty$ <u>(où</u> V <u>et</u> W <u>sont des ouverts de</u> $\mathbb{R}^n$<u>)</u> <u>et</u> J <u>le jacobien de</u> π . <u>Pour tout opérateur différentiel</u> P <u>(à coefficients</u> $\mathcal{C}^\infty$<u>)</u> <u>sur</u> V <u>d'ordre</u> $k \geqslant 1$, <u>il existe un opérateur différentiel</u> Q <u>(à coefficients</u> $\mathcal{C}^\infty$<u>)</u> <u>sur</u> W <u>d'ordre</u> $\leqslant k$, <u>tel que pour toute</u> $f \in E(V)$

$$J^{2k-1}\, \pi^*(Pf) = Q(\pi^* f).$$

(Désignant par x_i et y_j les coordonnées dans V et W , on a

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(\pi^* f) = \Sigma_i\, \pi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \frac{\partial}{\partial y_j}(x_i)$$

et en résolvant ce système

$$J\, \pi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) = \Sigma_j\, a_j \frac{\partial}{\partial y_j}(\pi^* f)$$

ce qui prouve le lemme pour $k = 1$. On achève la démonstration par récurrence sur k . Cf Kantor [4]).

<u>Démonstration de</u> 4.4. L'application $\pi^* : E(X) \to E(\tilde{X})$ est injective car π est surjective, et il reste à montrer que, si f_k est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X telle que $\pi^* f_k$ converge dans $E(\tilde{X})$, alors pour tout opérateur différentiel P sur X , la suite Pf_k converge dans $C(X)$. Soit W_i un recouvrement

dénombrable de $\tilde{X}$ par des ouverts connexes de coordonnées. D'après le lemme (II), il existe sur W_i un opérateur différentiel Q_i et une fonction analytique réelle $s_i \not\equiv 0$ (s_i est en fait une puissance du jacobien J_i de π/W_i et, d'après 4.1, ses zéros forment un vrai sous-ensemble analytique de W_i), tels que

$$s_i\ \pi^*(Pf) = Q_i(\pi^* f)\ .$$

On a alors la suite des assertions :

$\pi^* f_k$ converge dans $E(X)$

=> $\pi^* f_k$ converge dans $E(W_i)$ et il en est de même de $Q_i(\pi^* f_k) = s_i\ \pi^*(Pf_k)$

=> $\pi^*(Pf_k)$ converge dans $E(W_i)$ d'après le théorème (I)

=> $\pi^*(Pf_k)$ converge dans $E(\tilde{X})$ car l'injection $E(\tilde{X}) \to \pi\ E(W_i)$ est un monomorphisme.

=> Pf_k converge dans $C(X)$ d'après 4.3.

ce qui achève la démonstration.

4.5. Le cas des n-formes.
L'application $\pi^* : \mathcal{E}^n(X) \to \mathcal{E}^n(\tilde{X})$ est un monomorphisme.

En effet, l'application π^* est une injection, car π est un isomorphisme local au-dessus d'un ouvert dense U de X (cf 4.1). Il reste à montrer que l'image de π^* est fermée. Soit $\omega_k = f_k\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ une suite de n-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X telles que $\pi^*\omega_k$ converge dans $\mathcal{E}^n(\tilde{X})$. Soit comme dans 4.4, W_i un recouvrement dénombrable de $\tilde{X}$ par des ouverts connexes de coordonnées. Dans chaque W_i, on a $\pi^*\ \omega_k = J_i\ \pi^*\ f_k\ dy_1^i \wedge \dots \wedge dy_n^i$. Raisonnant comme dans 4.4, puisque $J_i\ \pi^*\ f_k$ converge dans $E(W_i)$, on en déduit que $\pi^*\ f_k$ converge dans $E(\tilde{X})$. Alors, d'après 4.4, la suite f_k converge dans $E(X)$, et par conséquent, la suite ω_k converge dans $\mathcal{E}^n(X)$. Ceci achève la démonstration de 4.5, et d'après 4.2, celle de la proposition 4.

5. LE CAS D'UN ENSEMBLE SEMI-ANALYTIQUE.

Soient X une variété analytique réelle, Y un ensemble semi-analytique fermé de X, et $U = X-Y$ l'ouvert semi-analytique complémentaire. Pour simplifier l'écriture, on écrit ici $'\mathfrak{D}.(U^\infty)$ pour $'\mathfrak{D}.(X/Y^\infty)$, l'espace des courants de U prolongeables en courants de X. On montre maintenant que les flèches $\mathcal{C}_U : H_q{}'\mathfrak{D}.(U^\infty) \to H_q(U,\mathbb{C})$ sont des isomorphismes, ce qui démontre le théorème 1.2.

Utilisant la description locale des ouverts semi-analytiques de Łojasiewicz [6], et remplaçant la variété X par un ouvert assez petit qu'on désigne toujours par X , il existe des fonctions analytiques réelles f_{ij} sur X telles que

$$U = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} \bigcap_{1\leqslant j\leqslant \ell} \{f_{ij} > 0\}$$

5.1. Soient U_1 et U_2 des ouverts semi-analytiques de X , de réunion U et intersection u . D'après 3.2 et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & '\mathfrak{D}.(Y^\infty) & \to & '\mathfrak{D}.(Y_1^\infty) \oplus {}'\mathfrak{D}.(Y_2^\infty) & \to & '\mathfrak{D}.(Y^\infty) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & '\mathfrak{D}.(X) & \to & '\mathfrak{D}.(X) \oplus {}'\mathfrak{D}.(X) & \to & '\mathfrak{D}.(X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & '\mathfrak{D}.(U^\infty) & \to & '\mathfrak{D}.(U_1^\infty) + {}'\mathfrak{D}.(U_2^\infty) & \to & '\mathfrak{D}.(u^\infty) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

on obtient l'exactitude de la ligne du bas, et le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & H_q\, '\mathfrak{D}.(U^\infty) & \to & H_q\, '\mathfrak{D}.(U_1^\infty) \oplus H_q\, '\mathfrak{D}.(U_2^\infty) & \to & H_q\, '\mathfrak{D}.(u^\infty) & \to \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to & H_q(U,\mathbb{C}) & \to & H_q(U_1,\mathbb{C}) \oplus H_q(U_2,\mathbb{C}) & \to & H_q(u,\mathbb{C}) & \to
\end{array}$$

5.2. Les flèches $\mathfrak{C}_V$ sont des isomorphismes pour tout ouvert semi-analytique du type $V = \bigcap_{1\leqslant j\leqslant 1} \{f_j > 0\}$.

En effet, soit Y l'ensemble analytique fermé $Y = \bigcup \{f_j = 0\}$. L'ouvert $U = X-Y$ est réunion des 2 ouverts disjoints V et $W = U \cap \bigcup \{f_j < 0\}$. D'après 5.1, on a les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
H_q\, '\mathfrak{D}.(U^\infty) & \xrightarrow{\sim} & H_q\, '\mathfrak{D}.(V^\infty) \oplus H_q\, '\mathfrak{D}.(W^\infty) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_q(U,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(V,\mathbb{C}) \oplus H_q(W,\mathbb{C})
\end{array}$$

$\mathfrak{C}_U$ étant un isomorphisme d'après 3.4, il en est de même de $\mathfrak{C}_V$ (et $\mathfrak{C}_W$) .

5.3. Les flèches $\mathcal{C}_U$ sont des isomorphismes pour tout ouvert semi-analytique du type $U = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} V_i$, où les V_i sont du type 5.2. Démonstration immédiate par récurrence sur k, en utilisant 5.1 et 5.2.

Tout ouvert semi-analytique étant localement de ce dernier type, le théorème 1.2 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREDON (Glen E.). - Sheaf theory. McGraw-Hill, New-York, 1967.

[2] HERRERA (Miguel) and LIEBERMAN (D.). - Residues and principal values on complex spaces. Math. Ann., 194, 1971, 259-294.

[3] HIRONAKA (Heisuke). - The resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. Math., 79, 1964, 109-326.

[4] KANTOR (Jean-Michel). - Opérateurs différentiels sur les singularités quotients. C.R. Acad. Sc. Paris, 273, 1971, 897-899.

[5] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division. Studia Math., 8, 1959, 87-136.

[6] ŁOJASIEWICZ (S.). - Ensembles semi-analytiques. IHES, Bures-sur-Yvette, 1965.

[7] MALGRANGE (B.). - Ideals of differentiable functions. Tata Institute, Bombay 3, Oxford Univ. Press, 1966.

(Texte reçu le 25/XI/1972)

Université de Poitiers
Mathématiques
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 - POITIERS