MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MIGUEL HERRERA

Les courants résidus multiples

Mémoires de la S. M. F., tome 38 (1974), p. 27-30

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__27_0>

Journées Géom. analyt. [1972. Poitiers]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 38, 1974, p. 27-30.

LES COURANTS RESIDUS MULTIPLES

par Miguel HERRERA

Le but de cet exposé est de définir des courants "résidus multiples" associés aux formes différentielles méromorphes ayant des pôles sur l'union d'une famille d'hypersurfaces complexes en position d'intersection complète géométrique. Ces définitions corrigent légèrement celles données dans [4], qui se sont montrées trop générales, et sont utilisées par G. Ruget dans [6].

Les détails complets seront publiés dans un article en collaboration avec N. Coleff, avec l'extension au cas d'une intersection non complète.

1 - Considérons une variété analytique complexe X de dimension n et une famille $Y_i (i=1,\dots,p+1)$ d'hypersurfaces dans X, en général singulières, en position d'intersection complète géométrique : $\operatorname{codim}_{\mathbf{C}} Y = p+1$, où $Y = \cap(Y_i\ ;\ i=1,\dots,p+1)$. On dénote $Y_{(p)} = \cap(Y_i\ ;\ i=1,\dots,p)$ et $\tilde{Y} = \cup(Y_i\ :\ i=1,\dots,p+1)$.

Soient $\Phi_i \in \Gamma(W, \mathcal{O}_X)$ des équations des hypersurfaces Y_i sur un ouvert W de X, et pour chaque $\delta_i > 0$ définissons les tubes semianalytiques

$$\Phi_i(>\delta_i) = (|\Phi_i(x)| > \delta_i)$$

$$\Phi_i(=\delta_i) = (|\Phi_i(x)| = \delta_i)\ ,$$

le premier étant muni de son orientation complexe et le deuxième de l'orientation opposée à celle induite par $\Phi_i(>\delta_i)$. En fait $\Phi_i(=\delta_i) = -\partial\, \Phi_i(>\delta_i)$; au sens des chaînes semianalytiques ([1],2).

Pour chaque vecteur $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_{p+1})$ on pose :

$$T^i(\delta) = \Phi_1(=\delta_1)\bullet \dots \bullet\Phi_i(=\delta_i) \qquad (i=p\ ,\ p+1)\ ,$$

où l'expression de droite désigne l'intersection (via dualité de Poincaré) des cycles $\Phi_j(=\delta_j)$ $(j=1,\dots,i)$, et

$$D(\delta) = T^p(\delta) \cap (\Phi_{p+1}(>\delta_{p+1}))\ .$$

Alors $T^i(\delta)$ est un cycle semianalytique dans W de dimension $2n-i$ $(i=p\ ,\ p+1)$ et $D(\delta)$ est une chaîne semianalytique dans W de dimension $2n-p$ telle que $T^{p+1}(\delta) = -\partial D(\delta)$. $T^i(\delta)$ dépend antisymétriquement de l'ordre de la famille $Y_1,\dots,Y_p$.

Une <u>trajectoire admissible</u> est une collection de fonctions continues et positives $\delta_j = \delta_j(\delta_1)$, $(j=2,\dots,p+1)$, définies sur un intervalle $[0,\eta)$ et qui vérifient $\delta_j(0) = 0$ et

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \delta_j(\delta_1)/\delta_{j+1}(\delta_1)^q = 0 \qquad (j=1,\dots,p \ ; \ \delta_1(\delta_1) \equiv \delta_1) ,$$

pour tout entier $q > 0$.

On dénote par $\Omega^q(*\tilde{Y})$ le faisceau des q-formes méromorphes de X avec pôles sur l'union $\tilde{Y}$ des $Y_i (i=1,\dots,p+1)$. Une section $\tilde{\omega} \in \Gamma(W,\Omega^q(*\tilde{Y}))$ peut toujours s'écrire, localement sur W , comme quotient

$$(1) \qquad \omega/\Phi_1^{r_1} \dots \Phi_{p+1}^{r_{p+1}} = \omega/\Phi^r ,$$

où $r = (r_1,\dots,r_{p+1}) \in N^{p+1}$ et ω est une q-forme holomorphe.

Soit $D^j(X)$ l'espace des j-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ avec support compact sur X , avec sa notion habituelle de convergence. Soient $\alpha \in D^{2n-p-q}(X)$ et $\beta \in D^{2n-p-q-1}(X)$ des formes avec support contenu dans un voisinage de W où la représentation (1) de $\tilde{\omega}$ est valide, et soit $\{\delta_j = \delta_j(\delta_1) \ , \ j=2,\dots,p+1\}$ une trajectoire admissible. Pour chaque $\delta_1 \in [0,\eta)$ les intégrales

$$I[D(\delta)](\omega \wedge \alpha/\Phi^r) \quad \text{et} \quad I[T^{p+1}(\delta)](\omega \wedge \beta/\Phi^r)$$

des formes $\omega \wedge \alpha/\Phi^r$ et $\omega \wedge \beta/\Phi^r$ sur les chaînes semianalytiques $D(\delta)$ et $T^{p+1}(\delta)$, où $\delta = (\delta_1,\delta_2(\delta_1),\dots,\delta_{p+1}(\delta_1))$, existent au sens de [1].

A l'aide de la résolution des singularités, appliquée localement à $\Phi = \Phi_1 \dots \Phi_{p+1}$, on démontre le

THEOREME. <u>Pour chaque trajectoire admissible</u> $\delta = (\delta_1,\delta_2(\delta_1),\dots,\delta_{p+1}(\delta_1))$ <u>les limites</u>

$$R^{1,\dots,p}P^{p+1}[\tilde{\omega}] \ (\alpha) = \lim_{\delta_1 \to 0} I[D(\delta)] \ (\omega \wedge \alpha/\Phi^r)$$

$$R^{1,\dots,p+1} \ [\tilde{\omega}] \ (\beta) = \lim_{\delta_1 \to 0} I[T^{p+1}(\delta)](\omega \wedge \beta/\Phi^r)$$

<u>existent et en outre</u> :

i) <u>elles sont indépendantes de la trajectoire</u> $\delta = \delta(\delta_1)$ <u>et de la représentation locale</u> (1) <u>de</u> $\tilde{\omega}$ <u>en termes des équations</u> Φ_i <u>des hypersurfaces</u> Y_i .

ii) <u>elles dépendent continûment de</u> α <u>et</u> β , <u>et sont des fonctions alternées de l'ordre des</u> Y_i $(i=1,\dots,p)$.

Comme conséquence de ces propriétés, on peut recoller ces définitions locales dans des courants sur X :

$$R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}] \in {}'D_{2n-p-q,Y_{(p)}^{\infty}}$$

$$R^{1,\dots,p+1}\, [\tilde{\omega}] \in {}'D_{2n-p-q-1,Y^{\infty}} ,$$

où $'D_{\cdot,Y_{(p)}^{\infty}}$ et $'D_{\cdot,Y^{\infty}}$ désignent les complexes des faisceaux des courants sur X avec support sur $Y_{(p)}$ et Y, respectivement, avec la différentielle $b.T(\alpha) = (-1)^{s+1}T(d\alpha)$ pour un courant T de dimension s.

On a construit donc les homomorphismes des faisceaux <u>résidu multiple et résidu-valeur principale</u> :

$$R^{1,\dots,p+1} \quad : \quad \Omega^q(*\tilde{Y}) \to {}'D_{2n-p-q-1,Y^{\infty}}$$

$$R^{1,\dots,p}\, P^{p+1} \quad : \quad \Omega^q(*\tilde{Y}) \to {}'D_{2n-p-q,Y_{(p)}^{\infty}} ,$$

associés à la famille d'hypersurfaces $Y_i (i=1,\dots,p+1)$ dans X.

Ils vérifient les propriétés suivantes :

a) $(-1)^{p+1}\, b.R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}] - R^{1,\dots,p}P^{p+1}[d\tilde{\omega}] = R^{1,\dots,p+1}[\tilde{\omega}]$

b) $R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}] = 0$ si $\tilde{\omega}$ est régulière par rapport à une hypersurface $Y_j (1 \leqslant j \leqslant p)$ et $R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}] = R^{1,\dots,p}[\tilde{\omega}]$ (avec définition évidente) si $\tilde{\omega}$ est régulière par rapport à Y_{p+1}.

c) $R^{1,\dots,p+1}[\tilde{\omega}] = 0$ si $\tilde{\omega}$ est régulière par rapport à une $Y_j (1 \leqslant j \leqslant p+1)$.

d) $R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}]$ et $R^{1,\dots,p+1}[\tilde{\omega}]$ dépendent antisymétriquement de l'ordre de la famille $Y_j (1 \leqslant j \leqslant p)$.

e) Si Φ est holomorphe sur X et $Y_{(p)} \subset V(\Phi)$, alors $\bar{\Phi}.R^{1,\dots,p}P^{p+1}[\tilde{\omega}] = 0$.

f) Le courant $R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}]$ est nul toutes les fois que son support est contenu dans un ensemble analytique de codimension $\geqslant p+1$ (cf. Lemme 3 de [6]).

<u>Remarques</u> : Le courant $R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\omega/\Phi_1^{r_1} \dots \Phi_p^{r_{p+1}}]$ est noté dans [4] par $Vp_{\Phi_{p+1}}\, \text{Rés}_{\Phi_1,\dots,\Phi_p}[\omega/\Phi_1^{r_1} \dots \Phi_p^{r_p}]$.

Pour les formes $\tilde{\omega}$ de degré $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, les propriétés a) et e) impliquent que $d''\, R^{1,\dots,p}\, P^{p+1}[\tilde{\omega}] = (-1)^n.\, R^{1,\dots,p+1}$, égalité dont on fait usage dans [6].

Les opérateurs définis ici généralisent résidus et valeurs principales simples introduits dans [2] et [5]. On trouvera dans [4] des applications à la dualité de Poincaré et des références plus complètes, auxquelles il faut ajouter [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLOOM (T.) et HERRERA (Miguel). - De Rham cohomology of an analytic space, Inventiones math. 7, 1969, 275-296.

[2] DOLBEAULT (Pierre). - Valeurs principales sur les espaces complexes, Séminaire P. Lelong 1970-1971, Exposé du 13 janvier 1971, Springer Lecture Notes n° 275

[3] EL ZEIN (F.). - Résidus en géométrie algébrique, Compositio Mathematica 23, 379-405 (1971).

[4] HERRERA (Miguel). - Résidus multiples sur les espaces complexes, Exposé aux Journées complexes de Metz, février 1972.

[5] HERRERA (Miguel) et LIEBERMAN (D.). - Residues and principal values on complex spaces, Math. Annalen 194, 259-294 (1971).

[6] RUGET (Gabriel). - Complexe dualisant et résidus, ces journées complexes.

(Texte reçu le 22/IX/1973)

Departemento de Mathematica
Casilla de Correo 172
La PLATA (Argentine)