MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES DUPAIN

Répartition des sous-suites d'une suite donnée

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 59-62
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__59_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 59-62

REPARTITION DES SOUS-SUITES D'UNE SUITE DONNEE

par

Y. DUPAIN

-:-:-:-

I. RAPPELS ET DEFINITIONS.

Soient X un ensemble et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Soit E un sous-ensemble de X. Nous définissons $\pi(E,N) = \mathrm{card}\{n\in\mathbb{N} ; n<N ; u_n \in E\}$.

Si X est le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, nous dirons que la suite $u = (u_n)$ est équirépartie si, pour tout intervalle I, l'expression $\frac{\pi(I,N)}{N}$ admet, pour N tendant vers l'infini, la limite $\mu(I)$ (μ étant la mesure de Haar).

D'une façon plus générale, si X est un espace topologique et si μ est une mesure borélienne positive de masse 1, la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera μ-équirépartie, si, pour tout sous-ensemble E de X μ-mesurable au sens de Riemann (i.e. $\mu(\mathrm{Fr}(E)) = 0$), l'expression $\frac{\pi(E,N)}{N}$ admet la limite $\mu(E)$ pour N tendant vers l'infini.

II. BUT DE L'EXPOSE .

Nous allons nous intéresser aux sous-suites d'une suite donnée. Considérons le tore muni de la mesure de Lebesgue et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite donnée, dense ; et recherchons les sous-suites de u possédant une densité et équiréparties. J. Lesca remarque que l'ensemble des densités de telles suites est un intervalle $[0,\alpha]$. M. Mendès-France [2] demande si cet intervalle est fermé.

La réponse est positive. Avant de résoudre ce problème, nous allons le transformer et le généraliser.

Soit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u de densité $\alpha > 0$ équirépartie ; alors, pour tout intervalle I, $\frac{\mathrm{card}\{k, k<K, u_{n_k}\in I\}}{K} \to \mu(I)$ pour $K \to \infty$. Soit P le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $P = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$; nous remarquons alors que

$\frac{\text{card}\{n, n\in P, n<N, u_n \in I\}}{N} \to \alpha\mu(I)$, ce qui nous amène, d'une manière plus générale, à définir dans un espace topologique, la ν-répartition d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Soient X un espace topologique, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et ν une mesure borélienne positive définie sur X . Nous dirons qu'une partie P de $\mathbb{N}$ est ν-répartie, si, pour tout sous-ensemble E de X ν-mesurable au sens de Riemann, l'expression $\frac{\text{card}\{n, n\in P, n<N, u_n \in E\}}{N}$ admet, pour N tendant vers l'infini, la limite $\nu(E)$. On peut remarquer que si P est ν-répartie, P admet la densité $\nu(X)$, donc que ν est de masse totale inférieure ou égale à 1 . De plus, si $\nu(X) > 0$ la suite $(u_n)_{n\in P}$ est μ-équirépartie pour la mesure $\mu = \frac{1}{\nu(X)} \nu$.

La recherche des sous-suites de u possédant une densité > 0 et équiréparties se réduit à la recherche des mesures ν pour lesquelles il existe des parties P de $\mathbb{N}$ ν-réparties.

Nous poserons donc le problème dans les conditions suivantes :
Soit X un espace topologique localement compact muni d'une base dénombrable.
Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des mesures boréliennes positives sur X .
Soit $\mathfrak{a}$ l'ensemble des mesures ν de $\mathfrak{M}$ pour lesquelles il existe une partie P de $\mathbb{N}$ ν-répartie.

Il s'agit de caractériser $\mathfrak{a}$.

Théorème. L'ensemble $\mathfrak{a}$ des mesures $\mu \in \mathfrak{M}$ telles qu'il existe une partie P de $\mathbb{N}$ μ-répartie est un intervalle initial fermé de $\mathfrak{M}$.

On prouve l'existence d'une mesure $\mu_o \in \mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des mesures majorées par μ_o . La mesure μ_o est construite explicitement. [1]

Remarques :

1) Ce théorème est bien une réponse au problème initial. En effet, s'il existe des sous-suites de densité à équiréparties, pour tout $a' < a$, il existe des parties $P_{a'}$ de $\mathbb{N}$ $a'\mu$-réparties (μ étant la mesure de Haar), donc $a'\mu \le \mu_o$ pour tout $a' < a$; donc $a\mu \le \mu_o$; autrement dit, il existe une partie P_a de $\mathbb{N}$ $a\mu$-répartie, et la sous-suite $(u_n)_{n\in P_a}$ est équirépartie de densité a .

2) Si X est réduit à deux éléments $X = \{a,b\}$, à une suite n de points de X faisons correspondre la partie $Q = \{n : u_n = a\}$. Alors u est équirépartie si Q a une densité. Si Q n'a pas de densité, il existe un nombre d_o qui est la plus grande densité des sous-suites de Q . Il convient de remarquer que d_o n'est pas en général la densité inférieure d^- de Q mais un minorant de d^- , et que si l'on se donne trois nombres d^o , d^- et d^+ tels que $0 \leq d_o \leq d^- < d^+ \leq 1$, il existe des parties Q pour lesquelles ces nombres sont respectivement la meilleure densité, la densité inférieure et la densité supérieure.

3) Si X n'est pas réduit à un élément, pour toute mesure μ appartenant à $\mathfrak{M}$ de norme au plus 1 il existe une suite u telle que l'ensemble $\mathfrak{a}$ soit l'ensemble des mesures majorées par μ .

4) Si P est une partie de $\mathbb{N}$ μ-répartie et ν-répartie, μ et ν étant des mesures de $\mathfrak{M}$, alors $\mu = \nu$. Soient u une suite μ-équirépartie et B_o un borélien de X ; soit ν la mesure définie par $\nu(B) = \mu(B \cap B_o)$. Alors deux parties P et Q ν-réparties ont une différence symétrique de densité nulle.(Ce résultat est à rapprocher de ceux de R. Scoville [3]).

5) Il ressort du théorème que si μ est une mesure de norme 1, l'ensemble des densités des sous-suites μ-équiréparties, s'il n'est pas vide, est un intervalle réel $[0,\lambda_o]$. Si $X = [0,1[$, μ = la mesure de Lebesgue, et si u possède une fonction de répartition f , on calcule $\lambda_o(u) = \lambda_o = \text{Inf}\{f'(x) : x \in [0,1[, f \text{ dérivable au point } x\}$.

Ce résultat s'applique, par exemple, à la suite des puissances d'un nombre de Salem θ ; en particulier si k est le degré de θ , on montre que λ_o ne dépend que de k et que λ_o tend vers 1 quand k tend vers l'infini .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. DUPAIN et J. LESCA.- Répartion des sous-suites d'une suite donnée. Acta Arithmetica XXIII (1973) pp. 307-314.

[2] M. MENDES FRANCE - Suites et sous-suites équiréparties modulo 1. Journées arithmétiques françaises, Université de Provence (1971).

[3] R. SCOVILLE - Some Measure Algebras on the integers. Pacific J. Math., 34, n° 3 (1970), pp. 769-779.

-:-:-:-

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération
33405 TALENCE