MICHEL WALDSCHMIDT

À propos de la méthode de Baker

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 181-192
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__181_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 181-192

A PROPOS DE LA METHODE DE BAKER

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

La méthode dont nous allons étudier les principaux développements est née en 1966 avec la démonstration, par Alan BAKER, du

THEOREME 1. - [10] Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ sont des nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors les nombres

$$1\ ,\ \mathrm{Log}\ \alpha_1,\ldots,\mathrm{Log}\ \alpha_m$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants ($\overline{\mathbb{Q}}$ désignant le corps des nombres algébriques, clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$).

Pour simplifier nous négligerons l'aspect effectif de la méthode, qui permettait à Baker de fournir, en plus, une minoration explicite de formes linéaires, à coefficients algébriques, de logarithmes de nombres algébriques ; mais les énoncés qui suivent possèdent chacun un analogue quantitatif.

Pour exposer les résultats de transcendance qui ont été obtenus, depuis 1966, par la méthode de Baker, nous établirons un parallèle avec les développements de la méthode qui avait permis, en 1932, à A.O. GEL'FOND et Th. SCHNEIDER (indépendamment) de démontrer le

THEOREME A. - [2,3] Si α_1 , α_2 sont des nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors le nombre

$$\mathrm{Log}\ \alpha_1/\mathrm{Log}\ \alpha_2$$

est transcendant.

En poursuivant ce parallèle, nous serons amenés à constater que plusieurs résultats, obtenus par la méthode de Gel'fond et Schneider, n'ont pas encore reçu la généralisation que laisse espérer la méthode de Baker. Nous formulerons alors les conjectures, correspondant non pas à l'énoncé le meilleur possible, mais à celui qui semble le plus accessible.

§1 - ANALOGUE ELLIPTIQUE DU THEOREME DE BAKER.

a) Les résultats de Schneider sur la transcendance des valeurs de fonctions elliptiques.

De 1931 à 1937 ont été effectuées de nombreuses études sur les propriétés de transcendance des valeurs de fonctions elliptiques, par Siegel, Schneider Polya, Popken et Mahler. Les principaux résultats, qui ont été obtenus par Schneider, sont les suivants :

Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, dont les invariants g_2, g_3, qui apparaissent dans l'équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 , \tag{1}$$

sont algébriques. On note ζ la fonction zêta (de Weierstrass) associée à $\wp$ par

$$\zeta' = -\wp \tag{2}$$

Soient a, b deux nombres algébriques, et t un nombre complexe qui n'est pas pôle de $\wp$.

THEOREME B. - [3] Si $(a,b) \neq (0,0)$, alors l'un des deux nombres

$$\wp(t) \quad , \quad at + b\zeta(t)$$

est transcendant.

THEOREME C. - [3] Si bt n'est pas pôle de $\wp$, et si les fonctions $\wp(z)$ et $\wp(bz)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, l'un des deux nombres

$$\wp(t) \ , \ \wp(bt)$$

est transcendant.

THEOREME D. - [3] Si $b \neq 0$, l'un des deux nombres

$$\wp(t) \ , \ e^{bt}$$

est transcendant.

Dans le cas $b = 0$, le théorème B montre que les deux nombres t et $\wp(t)$ ne peuvent être simultanément algébriques ; c'est l'analogue elliptique du théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de e^{α}, pour α algébrique non nul.

De même le théorème C est l'analogue elliptique du théorème A sur la transcendance de a^b (pour a et b algébriques, $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \notin \mathbb{Q}$) ; ce théorème C se généralise au cas de deux fonctions elliptiques $\wp_1$, $\wp_2$ [3].

b) Essais de généralisation.

L'analogue elliptique du théorème 1 de Baker n'est pas encore démontré ; il s'énoncerait de la manière suivante :

Soient $u_1, \dots, u_m$ des nombres complexes, $\wp_1, \dots, \wp_m$ des fonctions elliptiques de Weierstrass, dont les invariants sont algébriques. On suppose que les fonctions

$$\wp_1(u_1 z), \dots, \wp_m(u_m z)$$

sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, et que les nombres

$$\wp_1(u_1), \dots, \wp_m(u_m)$$

sont algébriques.

Alors

$$1, u_1, \dots, u_m$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

Plus généralement, la conjecture 1 suivante contiendrait les théorèmes 1, A, C, D, ainsi que le théorème B dans le cas $b = 0$.

CONJECTURE 1. - Soient $\wp_1, \dots, \wp_m$ des fonctions elliptiques de Weierstrass, dont les invariants (qui apparaissent dans les équations différentielles (1)) sont algébriques. Soient $u_1, \dots, u_m$, $v_1, \dots, v_\ell$ des nombres complexes, tels que les fonctions

$$\wp_1(u,z), \dots, \wp_m(u_m z), \ e^{v_1 z}, \dots, e^{v_\ell z}$$

soient algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Si les nombres

$$\wp_1(u_1), \dots, \wp_m(u_m), \ e^{v_1}, \dots, e^{v_\ell}$$

sont tous algébriques, alors

$$1, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_\ell$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

MASSER a étudié le cas particulier $\ell = 0$, quand $\wp$ possède une multiplication complexe.

THEOREME 2. - <u>Soit</u> $\wp$ <u>une fonction elliptique</u>, <u>dont les invariants</u> g_2, g_3 <u>sont algébriques</u>, <u>et dont un couple fondamental de périodes</u> (ω_1, ω_2) <u>vérifie</u> $\omega_2/\omega_1 \in \overline{\mathbb{Q}}$. <u>Soient</u> $u_1, \ldots, u_m$ <u>des nombres complexes</u>, <u>linéairement indépendants sur le corps</u> $\mathbb{Q}(\omega_2/\omega_1)$, <u>tels que</u>

$$\wp(u_i) \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \underline{\text{pour}} \quad i = 1, \ldots, m .$$

<u>Alors les nombres</u>

$$u_1, \ldots, u_m$$

<u>sont</u> $\overline{\mathbb{Q}}$-<u>linéairement indépendants</u>.

On peut démontrer un autre cas particulier de la conjecture 1, à condition d'ajouter une hypothèse sur les zéros des fonctions

$$P(\wp_1(u_1 z), \ldots, \wp_m(u_m z), e^{v_1 z}, \ldots, e^{v_\ell z}),$$

pour $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{m+\ell}]$. On suppose alors qu'il existe un nombre irrationnel t tel que les nombres

$$\wp_1(u_1 t), \ldots, \wp_m(u_m t), \; e^{v_1 t}, \ldots, e^{v_\ell t}$$

soient tous algébriques. Alors les nombres

$$u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_\ell$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants. Sous les mêmes hypothèses, si on suppose de plus t algébrique, alors les nombres

$$1, \; u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_\ell$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

§2 - <u>TRANSCENDANCE DE FORMES LINEAIRES DE PERIODES DE FONCTIONS MEROMORPHES</u>.

a) <u>Conséquences des théorèmes de Schneider</u>.

Les seules conséquences du théorème B que nous avons étudiées concernaient le cas $b = 0$; dans le cas général soit ω une période de $\wp$, telle que $\omega/2$ ne soit pas période de $\wp$; alors $\wp(\omega/2)$ est racine du polynôme

$$4X^3 - g_2 X - g_3 ,$$

et ce théorème B montre l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres

$$1, \; \omega, \; \eta = 2\zeta(\omega/2) .$$

En particulier, les nombres ω , η , ω/η sont transcendants ; d'autre part, le théorème D contient la transcendance de ω/π .

Ainsi, quand (ω_1, ω_2) est un couple fondamental de périodes de $\wp$, chacun des 5 nombres

$$\omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2 , \pi$$

est transcendant ; cependant, ces nombres sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$, à cause de la relation de Legendre

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2i\pi .$$

La détermination du degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, \pi)$ est un problème non résolu.

b) <u>Travaux de Baker et Coates sur les formes linéaires en</u> 1 , ω_1 , ω_2 , η_1 , η_2 , $2i\pi$.

Un premier pas vers la détermination de ce degré de transcendance consiste à considérer des polynômes de degré 1 (c'est-à-dire les formes linéaires) en

$$1 , \omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2 , 2i\pi$$

à coefficients algébriques.

CONJECTURE 2.(*) -<u>Soit</u> $\wp$ <u>une fonction elliptique de Weierstrass</u>, <u>d'invariants</u> g_2 , g_3 <u>algébriques</u>. <u>Soit</u> (ω_1, ω_2) <u>un couple fondamental de périodes de</u> $\wp$, <u>et soient</u> η_1 , η_2 <u>les nombres définis par</u>

$$\eta_i = 2\zeta_i(\omega_i/2) , \quad i = 1,2 .$$

<u>Alors</u> 1 , ω_1 , η_1 , $2i\pi$ <u>sont</u> $\overline{\mathbb{Q}}$-<u>linéairement indépendants</u>.

<u>Si</u>, <u>de plus</u>, $\wp$ <u>n'admet pas de multiplication complexe</u>, <u>alors</u>

$$1 \quad \omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2 , 2i\pi$$

<u>sont</u> $\overline{\mathbb{Q}}$-<u>linéairement indépendants</u>.

A part les théorèmes B , C et D de Schneider, les premiers résultats partiels concernant la conjecture 2 furent obtenus en 1968 par Baker qui montra, par une extension de sa méthode, que toute forme linéaire $a\omega_1 + b\omega_2$, $a \in \overline{\mathbb{Q}}$, $b \in \overline{\mathbb{Q}}$, est nulle ou transcendante [11] . En 1969, il étendit ce résultat aux formes linéaires en ω_1 , ω_2 , η_1 , η_2 , à coefficients algébriques [12] :

$$(\overline{\mathbb{Q}}\omega_1+\overline{\mathbb{Q}}\omega_2+\overline{\mathbb{Q}}\eta_1+\overline{\mathbb{Q}}\eta_2) \cap \overline{\mathbb{Q}} = (0) .$$

(*) D. MASSER m'a informé qu'il a démontré la conjecture 2.

On en déduit par exemple la transcendance de la somme des circonférences de deux ellipses dont les axes ont des longueurs algébriques.

Cet énoncé devait être généralisé par Coates qui démontrait, en 1970, le

THEOREME 3. - [13] <u>Toute forme linéaire non nulle en</u>

$$\omega_1 \ , \ \omega_2 \ , \ \eta_1 \ , \ \eta_2 \ , \ 2i\pi \ ,$$

<u>à coefficients algébriques, est transcendante</u>.

Par exemple, $\pi + \omega_1$ est transcendant.

Il reste alors à étudier l'indépendance linéaire de $1 , \omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2$, $2i\pi$, quand $\omega_2/\omega_1 \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Le problème n'est pas entièrement résolu, mais Coates a récemment obtenu le

THEOREME 4. - [14] <u>Si</u> $\wp$ <u>n'admet pas de multiplication complexe, les nombres</u>

$$1 \ , \ 2i\pi \ , \ \omega_1 \ , \ \omega_2$$

<u>sont</u> $\overline{\mathbb{Q}}$-<u>linéairement indépendants</u>.

c) <u>Essais de généralisation</u>.

Pour étendre ces résultats à des fonctions périodiques plus générales, il convient d'examiner quelles propriétés spécifiques des fonctions elliptiques ont été utilisées dans les démonstrations.

Il s'agit essentiellement des équations différentielles (1) et (2) , et des propriétés de périodicité et de pseudo-périodicité :

$$\wp(z+\omega) = \wp(z) \quad , \quad \zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta \quad ,$$

mais aussi, accessoirement, des propriétés d'addition et de duplication de ces fonctions, avec le fait que des nombres tels que

$$\wp\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c}\right) \quad , \quad a,b,c \in \mathbb{Z} \ ,$$

sont algébriques (ou infinis). C'est d'ailleurs grâce à une étude détaillée de ces "valeurs de divisions" des fonctions $\wp$ et ζ que Baker et Coates ont pu obtenir leurs résultats.

Néanmoins, il semble raisonnable d'énoncer la

CONJECTURE 3. - <u>Soient</u> $g_i(z_1,\ldots,z_m)$, $1 \le i \le m$, <u>des fonctions méromorphes de</u> m <u>variables complexes, telles que</u>

$$\frac{\partial}{\partial z_i} g_i(z_1,\dots,z_m) \neq 0 \quad , \quad \forall i = 1,\dots,m \; .$$

On suppose que les fonctions $f_i(z) = g_i(z,\dots,z)$ sont d'ordre fini, et périodiques de période 1, algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $f_i(u) \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $i = 1,\dots,m$.

Soient $w_1,\dots,w_m$ des nombres complexes non nuls. On suppose que les dérivations $\frac{1}{w_i}\frac{\partial}{\partial z_i}$ opèrent sur une extension algébrique du corps

$$\mathbb{Q}(g_1(z_1,\dots,z_m),\dots,g_m(z_1,\dots,z_m)) \; .$$

Alors toute forme linéaire non nulle en $w_1,\dots,w_m$, à coefficients algébriques, est transcendante.

Cette conjecture montrerait que, $\wp_1,\dots,\wp_\ell$ étant ℓ fonctions elliptiques de Weierstrass d'invariants algébriques, et $\omega^{(i)}$, $1 \leq i \leq \ell$, étant une période de $\wp_i$, alors

$$(\overline{\mathbb{Q}}\omega^{(1)}+\dots+\overline{\mathbb{Q}}\omega^{(\ell)}+\overline{\mathbb{Q}}\eta^{(1)}+\dots+\overline{\mathbb{Q}}\eta^{(\ell)}+\overline{\mathbb{Q}}.2i\pi) \cap \overline{\mathbb{Q}} = (0) \; .$$

On peut démontrer des cas particuliers de la conjecture 3, soit en supposant que les fonctions f_i vérifient des propriétés de division analogues aux fonctions elliptiques (on retrouve alors le théorème 3), soit en ajoutant des restrictions telles que

$$\rho_1 + \dots + \rho_m < m+1 \; ,$$

où f_i est d'ordre inférieur ou égal à ρ_i $(1 \leq i \leq m)$.

§3 - VALEURS TRANSCENDANTES DE FONCTIONS MEROMORPHES.

Les théorèmes A, B, C et D ont été généralisés par S. LANG [4], depuis 1963, à certaines variétés de groupes : on peut majorer la dimension algébrique d'un sous-groupe à un paramètre d'une variété de groupe définie sur le corps des nombres algébriques, en fonction du nombre de points algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants que ce sous-groupe contient.

Ces énoncés sont obtenus à partir de critères de dépendance algébrique de fonctions méromorphes ; le premier critère de ce type a été obtenu par Schneider en 1949 [1], puis simplifié par Lang en 1963 [4] ; il concernait la nature arithmétique des valeurs de fonctions méromorphes vérifiant des équations différentielles à coefficients algébriques. En voici une généralisation, par

E. Bombieri, aux fonctions de plusieurs variables.

THEOREME E. - [6] Soient K un corps de nombres, $f_1,\dots,f_N$ des fonctions méromorphes de $\mathbb{C}^d$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que le degré de transcendance sur K de $K(f_1,\dots,f_N)$ est supérieur ou égal à $d+1$, et que les dérivations partielles $\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$, $1 \le \alpha \le d$, appliquent le corps $K(f_1,\dots,f_N)$ dans lui-même.

Alors l'ensemble des points $t \in \mathbb{C}^d$, où $f_1(t),\dots,f_N(t)$ sont définis et appartiennent à K, est contenu dans une hypersurface algébrique.

Un énoncé analogue (dû à Th. Schneider [1], K. Ramachandra [5] et S. Lang [4], pour les fonctions d'une variable, et à E. Bombieri et S. Lang [7] pour les fonctions de plusieurs variables) concerne des fonctions méromorphes dont on ne suppose plus qu'elles vérifient des équations différentielles.

On peut effectuer une généralisation semblable de la méthode de Baker pour obtenir des énoncés généraux sur les propriétés de transcendance des valeurs de fonctions méromorphes $f_1,\dots,f_d$, algébriquement indépendantes. Pour des raisons techniques (liées au fait qu'une partie de la démonstration comporte une récurrence), on est contraint, du moins actuellement, d'imposer une hypothèse sur les zéros des fonctions $P(f_1,\dots,f_d)$, pour $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$ (cette hypothèse n'a pas encore été vérifiée pour les fonctions thêtas de variétés abéliennes).

On peut ensuite généraliser tous ces critères aux valeurs de ces fonctions dans une extension de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance donné ; cette généralisation a déjà été effectuée pour les critères obtenus par la méthode de Gel'fond Schneider (voir [8]), et peut être faite également pour la méthode de Baker. Nous en étudierons seulement les applications à la fonction exponentielle.

§4 - PROBLEMES D'INDEPENDANCE ALGEBRIQUE.

On conjecture que, sous les hypothèses du théorème 1 les nombres

$$\operatorname{Log}\alpha_1,\dots,\operatorname{Log}\alpha_m$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (ou sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cela revient au même). Ce problème est un cas particulier d'une conjecture de Schanuel [4] :

<u>Si</u> $x_1,\dots,x_m$ <u>sont des nombres complexes</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants</u>, <u>le degré de transcendance sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>du corps</u>

$$\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_m,e^{x_1},\dots,e^{x_m})$$

<u>est supérieur ou égal à</u> m .

Depuis le théorème de Lindemann-Weierstrass (1885) qui résoud le cas où $x_1,\dots,x_m$ sont algébriques, les premiers résultats d'indépendance algébrique de valeurs de la fonction exponentielle ont été obtenus par Gel'fond, en 1949 [2]. Par exemple, Gel'fond montre que les deux nombres

$$2^{\sqrt[3]{2}}\ ,\ 2^{\sqrt[3]{4}}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et que deux des nombres

$$2^{\sqrt{2}}\ ,\ 2^{\sqrt{3}}\ ,\ 2^{\sqrt{6}}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Des variantes de ces résultats ont été étudiées depuis par de nombreux auteurs, en particulier S. Lang qui introduisit la notion de "type de transcendance" d'un corps [4] ; pour utiliser ces énoncés, il faut alors connaître des renseignements précis sur l'approximation diophantienne de certains nombres transcendants ; les résultats les plus récents dans ce domaine se trouvent dans la thèse de P.L. Cijsouw [9] . Voici par exemple les types de transcendance de quelques corps :

$\mathbb{Q}(\pi)$	a un type	$\le 2+\varepsilon$	(pour tout $\varepsilon > 0$) ;
$\mathbb{Q}(e^{\alpha})$	a un type	≤ 3	(α algébrique $\neq 0$) ;
$\mathbb{Q}(\mathrm{Log}\ \alpha)$	a un type	$\le 3+\varepsilon$	(α algébrique $\neq 0,1$; $\varepsilon > 0$) ;
$\mathbb{Q}(e^{\pi})$	a un type	$\le 3+\varepsilon$	($\varepsilon > 0$) ;
$\mathbb{Q}(\alpha^{\beta})$	a un type	≤ 4	(α,β algébriques ; $\alpha \neq 0,1$; $\beta \in \mathbb{Q}$) ;
$\mathbb{Q}(\frac{\mathrm{Log}\ \alpha}{\mathrm{Log}\ \beta})$	a un type	≤ 4	(α,β algébriques, $\frac{\mathrm{Log}\ \alpha}{\mathrm{Log}\ \beta} \notin \mathbb{Q}$) .

Grâce à cette notion de type de transcendance, nous étudierons la conséquence suivante de la conjecture de Schanuel.

CONJECTURE 4. - <u>Soit</u> K <u>un sous-corps de</u> $\mathbb{C}$, <u>de degré de transcendance</u> q <u>sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Soient</u> $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ <u>des éléments de</u> K , <u>dont les logarithmes sont</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants</u>. <u>Soit</u> r <u>la dimension du sous-K-espace vectoriel de</u> $\mathbb{C}$ <u>engendré par</u>

$$1 \ , \ \mathrm{Log}\ \alpha_1, \ldots, \mathrm{Log}\ \alpha_m \ .$$

Alors

$$r \geq m - q + 1 \ .$$

A part le théorème 1 de Baker (qui résout le cas $q = 0$), le cas le plus simple $(q = 1)$ contient le problème de l'indépendance algébrique de e et π . (Choisir pour K la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(e)$ dans $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Log}\ \alpha_1 = i\pi$, $\mathrm{Log}\ \alpha_2 = 1$) .

Pour obtenir des cas particuliers de cette conjecture, nous supposons qu'il existe des nombres complexes $\beta_1 = 1$, $\beta_2, \ldots, \beta_n$, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, tels que

$$\alpha_i^{\beta_j} \in K \ \text{ pour } \ 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n \ .$$

On obtient alors le

THEOREME 5. - [15] _Si_ K _a un type de transcendance sur_ $\mathbb{Q}$ _inférieur ou égal à_ τ _et si_ $\beta_2, \ldots, \beta_n$ _appartiennent à_ K , _alors_,

$$r \geq m - (\tau - 1)(\frac{m}{n} + 1) + 1 \ .$$

Lorsqu'on ne suppose plus que les nombres β_j $(1 \leq j \leq n)$ appartiennent à K , on peut néanmoins minorer la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathrm{Log}\ \alpha_1, \ldots, \mathrm{Log}\ \alpha_m$ sur K , par :

$$m - (\tau - 1)(\frac{m}{n} + 1) \ .$$

Pour terminer, précisons qu'il est possible d'étendre les résultats précédents aux corps p-adiques. Par exemple, l'analogue p-adique du théorème 1 a été démontré en partie par A. Brumer et V.G. Sprindzuck ; voici l'énoncé général.

THEOREME 6. - [15] _Soit_ $\mathbb{C}_p$ _un corps algébriquement clos, complet pour une valeur absolue ultramétrique, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle_ p . _Soient_ $a_1, \ldots, a_m$ _des unités de_ $\mathbb{C}_p$, _algébriques sur_ $\mathbb{Q}$, _dont les logarithmes p-adiques_ $\mathrm{Log}\ a_1, \ldots, \mathrm{Log}\ a_m$ _sont_ $\mathbb{Q}$-_linéairement indépendants_.

Alors les nombres $1, \mathrm{Log}\ a_1, \ldots, \mathrm{Log}\ a_m$ _sont linéairement indépendants sur la clôture algébrique de_ $\mathbb{Q}$ _dans_ $\mathbb{C}_p$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

Les références de [1] à [9] concernent la méthode de Gel'fond Schneider, et, de [9] à [15] la méthode de Baker.

[1] SCHNEIDER Th. - Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann., 121 (1949) pp. 131-140.

[2] GEL'FOND A.O. - Transcendental and algebraic numbers. Dover, New-York (1960) ; (trad. angl. de l'édition russe, G.I.T.T.L., Moscou (1952)).

[3] SCHNEIDER Th. - Introduction aux nombres transcendants. Paris, Gauthier Villars, (1959) ; (trad. franç. de l'édition allemande, Springer, (1957)).

[4] LANG S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, Reading Mass. (1966).

[5] RAMACHANDRA K. - Contributions to the theory of transcendental numbers. I, Acta Arith., 14 (1968) pp. 65-72 ; II, id., pp. 73-88.

[6] BOMBIERI E. - Algebraic values of meromorphic maps. Invent. Math., 10 (1970) pp. 267-287.

[7] BOMBIERI E. and LANG S. - Analytic subgroups of group varieties. Invent. Math., 11 (1970) pp. 1-14.

[8] WALDSCHMIDT M. - Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Acta. Arith., 23 (1972) pp. 19-88.

[9] CIJSOUW P.L. - Transcendence measures. Academisch proefschrift, Amsterdam (1972), 107 pp.

[10] BAKER A. - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, Mathematika, 13 (1966) pp. 204-216 ; II, id., 14 (1967) pp. 102-107 ; III, id., 14 (1967) pp. 220-228 ; IV, id., 15 (1968) pp. 204-216.

[11] BAKER A. - On the periods of the Weierstrass $\wp$-function. Proceedings of the Rome conference on number theory (1968) ; Sympos. Math., Roma, 4 (1970) pp. 155-174.

[12] BAKER A. - On the quasi-periods of the Weierstrass ζ-function. Nach. Akad. Wiss. Göttingen II, Math. Phys. Klasse, n° 16 (1969) pp. 145-157.

[13] COATES J. - The transcendence of linear forms in ω_1, ω_2, η_1, η_2, $2i\pi$. Amer. J. Math., 93 (1971) pp. 385-397.

[14] COATES J. - Linear forms in the periods of the exponential and elliptic functions. Invent. Math., 12 (1971) pp. 290-299.

[15] WALDSCHMIDT M. - Utilisation de la méthode de Baker dans des problèmes d'indépendance algébrique. C.R. Acad. Sc. Paris, sér.A, 275 (1972) pp. 1215-1217.

-:-:-:-

Michel WALDSCHMIDT
Université de Paris Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques - Bât. 425
91405 ORSAY