MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JACQUES QUEYRUT

Sur l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin pour des caractères réels

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 133-135
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__133_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 133-135

SUR L'EQUATION FONCTIONNELLE DES SERIES L D'ARTIN POUR DES CARACTERES REELS

par

Jacques QUEYRUT (Bordeaux)

-:-:-:-

Soient k un corps de nombres et N une extension galoisienne finie de k de groupe de Galois G. Soit $R_{\mathbb{R}}(G)$ l'anneau des caractères virtuels de G réalisables sur $\mathbb{R}$, et soit $\chi \in R_{\mathbb{R}}(G)$; on sait que c'est une condition plus restrictive que de dire que χ est à valeurs réelles. La série L d'Artin généralisée vérifie une équation fonctionnelle de la forme (voir Lang [1], p.300)

$$W(\chi, N/k)\Lambda(s,\chi) = \Lambda(1-s,\bar{\chi}) .$$

Si χ est à valeurs réelles, il est évident que $W(\chi, N/k) = \pm 1$; le problème de la caractérisation des corps pour lesquels $W = +1$ ou -1 est lié à celui des zéros de la fonction ζ de Dédekind au point $s = 1/2$; si $W(\chi, N/k) = -1$, $\zeta_N(s)/\zeta_k(s)$ a un tel zéro.

Fröhlich a montré que, pour un caractère de degré 2 d'une extension N quaternonienne de degré 8 sur $\mathbb{Q}$, la constante W pouvait prendre les deux valeurs $+1$ et -1 et que si cette extension était modérément ramifiée la valeur de W dépendait de l'existence de bases normales d'entiers (voir [3]) ; un tel caractère est à valeurs réelles et non réalisable sur $\mathbb{R}$.

Théorème. Soient k un corps de nombres ; N une extension galoisienne de k de groupe de Galois G, χ un caractère virtuel de G réalisable sur $\mathbb{R}$, alors la constante $W(\chi, N/k)$ de l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin vaut $+1$.

Ceci a été conjecturé par J.P. Serre et a été démontré indépendamment par A. Fröhlich et moi-même. Nous avons donné une rédaction de la démonstration en commun dans [5].

En utilisant un argument de Serre, on se ramène tout d'abord au cas diédral. Soit $\chi \in R_{\mathbb{R}}(G)$; d'après un théorème de Brauer-Witt [4] n° 2-4, et une proposition de Serre [2], on peut écrire χ comme combinaison Z-linéaire de caractères induits $\mathrm{Ind}_G^{H_i}(\theta_i)$, où H_i est un sous-groupe de G et où $\theta_i \in R_{\mathbb{R}}(H_i)$ et est de degré 1 ou 2 :

$$\chi = \sum_{i\in s} n_i \mathrm{Ind}_G^{H_i}(\theta_i) .$$

Les propriétés de W (voir [1], p. 233) entraînent que :

$$W(\chi) = \prod_{i\in s} W(\theta_i, N/k_i)^{n_i} .$$

Si θ_i est de degré 1 , θ_i est l'identité ou quadratique ; alors $W(\theta_i) = +1$.

Si $\theta_i = \psi + \bar{\psi}$ est la somme de deux caractères conjugués, $W(\theta_i) = W(\psi)W(\bar{\psi})$; or $W(\psi)$ est un nombre complexe de module 1 et $W(\bar{\psi}) = \overline{W(\psi)}$: d'où $W(\theta_i) = +1$.

Si θ_i est de degré 2 et irréductible, on peut se ramener au cas où θ_i est fidèle ; H_i est alors isomorphe à un groupe diédral.

On suppose donc désormais que G est diédral, c'est-à-dire que G est engendré par σ et τ tels que $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$, et que χ est un caractère irréductible fidèle de degré 2 de G ;

on a
$$\chi(s) = \varphi(s) + \bar{\varphi}(s) \quad \text{pour tout } s \in C \text{ (groupe engendré par } \sigma\text{) ;}$$
$$\chi(s\tau) = 0 \ ;$$

où φ est un caractère primitif de C .

χ est induit par φ , d'où $W(\chi, N/k) = W(\varphi, N/E)$ si E est le corps des invariants de C . Par composition avec l'application de réciprocité globale, on peut considérer φ comme un caractère du groupe des classes d'idèles C_E de E .

Le transfert de $\mathrm{Gal}(N/k)^{ab}$ dans $\mathrm{Gal}(N/E)$ montre que la restriction de φ à C_k groupe des classes d'idèles de k est l'identité et que cette propriété caractérise les extensions diédrales. On est donc ramené à démontrer le théorème suivant.

Théorème. <u>Soit</u> E <u>une extension quadratique d'un corps de nombres</u> k <u>et</u> φ <u>un caractère de</u> C_E <u>d'ordre fini tel que</u> $\varphi/C_k = 1$; <u>alors</u> $W(\varphi) = 1$.

Ce théorème se démontre en utilisant de façon fondamentale le fait que $\varphi/C_k = +1$ et que le conducteur de φ est un idéal étendu de k à E ; on démontre que si Δ est tel que $E = k[\Delta]$, $\Delta^2 \in k^*$, si v_o est une place de k et si v est au-dessus de v_o dans E , alors

$$\prod_{v/v_o} W_v(\varphi) = \varphi(\delta)$$ où W_v est la composante locale de W

et δ l'idèle $(x_w)_w$ avec $x_w = 1$ si $w \neq v$, $x_w = \Delta$ si $w = v$; on a donc $W(\varphi) = \varphi((\Delta))$ où (Δ) est l'idèle principal $(x_w)_w$ avec $x_w = \Delta$ pour tout w ; d'où $\varphi(\Delta) = 1$, et $W(\varphi) = +1$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANG - Algebraic Number Theory. Addison-Wesley, 1970.

[2] SERRE - Conducteur d'Artin des caractères réels. Inventiones Math. 14 (p. 173-183) 1971.

[3] FRÖHLICH - Artin root numbers and normal integral bases for quaternions fields. Inventiones Math. 17 (p. 143-166) 1972.

[4] SERRE - Representations linéaires des groupes finis. Hermann, 1970.

[5] FRÖHLICH-QUEYRUT - On the functional equation of the Artin L-functions for characters of real representation. (A paraître).

-:-:-:-

Jacques QUEYRUT
E.R.A. n° 362
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération
33405 - TALENCE