MAURICE MIGNOTTE

Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 121-132
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__121_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 121-132

APPROXIMATIONS RATIONNELLES DE π ET QUELQUES AUTRES NOMBRES

par

M. MIGNOTTE

-:-:-:-

Résumé. $|\pi-\frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20,6}}$ si $q > 1$, $|\pi^2-\frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{18}}$ si q assez grand.

INTRODUCTION.

En 1952, Mahler démontrait le remarquable résultat suivant : pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $q \geq 2$, on a l'inégalité

$$|\pi-\frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{42}} .$$

Mahler indiquait qu'on pouvait démontrer l'inégalité

$$|\pi-\frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^{30}}$$

pour q assez grand. D'après W. Schmidt [6], Wirsing a démontré (non publié) une égalité analogue avec un exposant égal à 21, pour q assez grand.

Nous nous proposons de démontrer les minorations

$$|\pi-\frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20}} \quad \text{si} \quad q \geq q_o \quad \text{(explicite)}$$

et

$$|\pi-\frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20,6}} \quad \text{si} \quad q \geq 2 .$$

Nous démontrerons aussi d'autres résultats concernant l'approximation rationnelle de π^2 , l'approximation des logarithmes des entiers par des entiers, l'approximation simultanée des puissances des nombres algébriques par des nombres algébriques.

On trouvera aussi l'énoncé d'un résultat sur l'approximation rationnelle de tg 1 .

I. - PRELIMINAIRES.

Mahler construit, pour tout x, une infinité de relations du type

$$\sum_{k=0}^{m} A_{hk}(x)(\log x)^k = R_h(x) \qquad (h = 0,1,\dots,m)$$

où les A_{hk} sont des polynômes à coefficients entiers en x et dont le déterminant n'est nul que pour $x = 1$. Il s'obtient ainsi une infinité d'équations algébriques approchées pour le nombre $\log x$.

1. De façon précise, soient m et n deux entiers positifs et soit x un nombre complexe non nul. On désigne par N le p.p.c.m. des entiers $1,2,\dots,n$. Posons

$$(1) \quad P = m!\,N^m(n!)^{m+1},$$

$$(2) \quad Q(z) = (z(z+1)\dots(z+n))^{m+1},$$

$$(3) \quad R_h(x) = \frac{P}{2\pi i}\int_C \frac{z^h x^{z+n}}{Q(z)}\,dz, \quad h = 0,1,\dots,m,$$

où C désigne un cercle de rayon $> n$ centré à l'origine.

2. En utilisant la formule des résidus, on obtient les relations

$$(4) \quad R_h(x) = \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(x)(\log x)^k,$$

où on prend la détermination principale du logarithme.

On vérifie facilement que les $A_{hk}(x)$ sont des polynômes en x à coefficients entiers. Pour calculer le déterminant $D(x)$ des $A_{hk}(x)$, on remarque d'abord, en développant $(Q(z))^{-1}$ en série de Laurent au voisinage de l'infini, que

(5) R_h a un zéro d'ordre $\geq (m+1)n$ au point $z = 1$.

D'autre part, pour tout h et k, le degré de A_{hk} est $\leq n$, l'inégalité étant stricte si $h+k > m$. Ainsi, on obtient

$$(6) \quad D(x) \equiv \pm \frac{P^{m+1}x^{n(m+1)}}{1!2!\dots m!(n!)^{(m+1)^2}} \pmod{x^{n(m+1)-1}}.$$

Grâce à (4), on a aussi l'égalité

$$D(x) = \begin{vmatrix} R_1(x) & A_{0,1}(x)\dots A_{0,m}(x) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ R_m(x) & A_{m,1}(x)\dots A_{m,m}(x) \end{vmatrix}$$

qui, jointe à (5), montre que $D(x)$ est divisible par $(x-1)^{(m+1)n}$. La congruence (6) permet alors de conclure que D est de la forme

$$D(x) = c_o(x-1)^{(m+1)n} \quad , \quad c_o \text{ constante non nulle.}$$

En particulier, $D(x) \neq 0$ si $x \neq 1$.

3. En utilisant la représentation intégrale (3), nous démontrerons plus loin (voir appendice) que, pour α réel, $R_h(e^{i\alpha})$ vérifie la majoration

$$(7) \quad |R_h(e^{i\alpha})| \le \frac{P}{n^{n(m+1)}} 2^{2(m+1)} \frac{(c+\frac{1}{2})^m}{(1+c^2)^{m+1}} \frac{e^{\frac{m+1}{6n^2c^2}(1+\frac{1}{4c})}}{\pi} \exp(-(m+1)n\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{c^2+q}{4})-1) ,$$

où $c = |\mathrm{cotg}\, \frac{\alpha}{2(m+1)}|$.

4. Les coefficients des polynômes A_{hk} peuvent s'écrire comme des intégrales du type

$$\frac{P}{2\pi i k!} \int_{C_\lambda} \frac{z^h dz}{Q(z)(z+\lambda)^{\ell+1}}$$

ce qui permet à Mahler d'obtenir la majoration

$$(8) \qquad \overline{|A_{hk}(x)|} \le \frac{m!}{k!} N^m (n+1)^{2m+1} 2^{(m+1)(n+1)} ,$$

où $\overline{|\quad|}$ désigne la hauteur d'un polynôme, c'est-à-dire le maximum des modules des coefficients.

II. - APPROXIMATION DU NOMBRE π .

1. Schéma de la démonstration.

Soit x un nombre complexe $\neq 1$. Considérons les polynômes

$$U_k(y) = \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(x) Y^k .$$

L'égalité (4) s'écrit

$$R_h(x) = U_h(\log x) .$$

Pour un nombre complexe quelconque y , on a donc

$$U_h(\log x) - U_h(y) = (\log x - y)\, T_h(y)$$

avec $T_h(y) = \sum_{k=1}^{m} A_{hk}(x)\ \left(\frac{(\log\ x)^k - y^k}{\log\ x - y}\right)$.

Du fait que $D(x)$ est non nul, il existe un indice h_o tel que $U_{h_o}(y) \neq 0$, Posons, pour simplifier, $U = U_{h_o}, \ldots$. Si, de plus, on a l'inégalité

(9) $$|R(x)| < \frac{1}{2}|U(y)| \quad ,$$

on obtient la minoration

(10) $$|\log\ x - y| > \frac{|U(y)|}{2|T(y)|} \quad .$$

Pour minorer $|\log\ x - y|$, on fixera d'abord un entier n tel que

$$|R_h(x)| < \frac{1}{2}\ |U_h(y)| \quad , \text{ pour } \quad h = 0,1,\ldots,m \ .$$

On obtient alors une inégalité du type (9) , il suffira alors de majorer T et de minorer U .

2. Fixons $x = i$, d'où $\log\ x = \frac{\pi}{2}$.

Posons $y = \frac{p}{q}\frac{i}{2}$, où p et q sont deux entiers positifs. On se limitera aux valeurs de p et q qui vérifient $p < 3{,}15\ q$. D'où :

(11) $$\max(|\log\ x|, |y|) < 1{,}58 \ .$$

Choisissons $m = 5$. En calculant directement les polynômes A_{hk} , avec de la patience on obtient

(12) $$|A_{hk}(i)| \leq \frac{14}{3}\ N^5 2^{6n} n^3 (\tfrac{1}{k!}) \ \leq \ \frac{14}{3}\ N^5 2^{6n} n^3 \quad , \text{ si } \quad n \geq 40\ 000 \ .$$

Pour R_h , grâce à (7) , on obtient

$$|R_h(i)| \leq 13 n^3 N^5 \exp(-3n\ \log\ \frac{17c^2}{4}) \quad , \quad \text{avec} \quad c = 7{,}595741\ldots$$

Il existe h_o tel que $U_{h_o}(y) = U(y)$ soit non nul. L'élément $(2q)^5 U(y)$ est alors un élément non nul de $Z[i]$, d'où l'inégalité

(13) $$|U(y)| \geq 2^{-5} q^{-5} \ .$$

Si on peut trouver n tel que (9) soit vérifiée, c'est-à-dire si R vérifie

$$|R(y)| \leq 2^6 q^{-5}$$

alors (10) sera satisfaite. Pour ceci, il suffit d'imposer

$$13n^3N^5 \exp(-3n \log \frac{1+c^2}{4}) \leq 2^{-6}q^{-5} \quad . \tag{14}$$

Remarquons que, si ψ désigne la fonction de Tchebycheff ($\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$, p premier) , N est donné par

$$N = \exp(\psi(n)) \ .$$

L'inégalité (14) sera donc vérifiée si

$$n(3 \log \frac{1+c^2}{4} - 5\frac{\psi(n)}{n} - 3\frac{\log n}{n}) \geq 6 + 5 \log q \ . \tag{15}$$

Enfin, (11) et (12) impliquent

$$T(y) \leq 25\ N^5 2^{6n} n^3 \quad \text{si} \quad n \geq 40\ 000 \ . \tag{16}$$

En utilisant les estimations de la fonction ψ de Rosser et Schoenfeld [5] et les inégalités (10),(13) et (16) on obtient les résultats suivants,

$$|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20,3}} \quad \text{si} \quad 40\ 000 \leq n \leq 10^8$$

$$|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20,6}} \quad \text{si} \quad n \geq 10^8$$

$$|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20}} \quad \text{si} \quad n \geq e^{110}$$

où n désigne le plus petit entier qui vérifie (15) . On peut remarquer que

$$\log q > 24\ 500 \Rightarrow n \geq 40\ 000 \ ,$$

et

$$\log q > e^{110} \Rightarrow n \geq e^{110} \ .$$

On conclut en utilisant le calcul des 21 000 premières réduites du developpement de π en fraction continue [1] , calcul qui montre que

$$0 < \log q \leq 24\ 500 \Rightarrow |\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^3} \ .$$

On obtient alors le

THEOREME 1. - <u>Soit</u> $\frac{p}{q}$ <u>un nombre rationnel positif alors</u>

$$|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20,6}} \quad \underline{\text{si}} \quad q \geq 2$$

<u>et</u>

$$|\pi - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{20}} \quad \underline{\text{si}} \quad q \geq \exp(e^{110}) \ .$$

III. - APPROXIMATIONS RATIONNELLES DE π^2 .

On considère cette fois la relation (4) dans laquelle on fait $x = -1$, soit

$$R_h(-1) = \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(-1)(i\pi)^k .$$

On prend $m = 2m'$, m' entier. Le fait que le déterminant des $A_{hk}(-1)$ est non nul implique qu'il existe un mineur du type

$$\begin{matrix} A_{h_{1,1}}(-1) & A_{h_{1,3}} \ldots A_{h_{1,2m'-1}}(-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_{h_{2m'-1,1}}(-1) & \ldots\ldots\ A_{h_{2m'-1,2m'-1}}(-1) \end{matrix}$$

non nul. Soit alors un rationnel $y = \frac{p}{q}$ fixé ; il existe un indice j tel que

$$\sum_{k=0}^{m'-1} A_{h_{j,2k+1}}(-1)\ (-1)^k y^{2k}$$

soit non nul. On a de plus

$$\sum_{k=0}^{m'-1} A_{2k+1}(-1)(-1)^k \pi^{2k} = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}(R(-1)) .$$

Ceci permet de refaire un raisonnement analogue au précédent. En prenant $m = 10$, on obtient le résultat suivant :

THEOREME 2. - *Posons*

$$c = \mathrm{cotg}\ \frac{\pi}{22}\ ,\ \alpha = 4\left(1 + \frac{9 + 11 \log 2}{\frac{11}{2}\log\left(\frac{1+c^2}{4}\right)-9}\right) \quad (\alpha<17,8) .$$

Alors, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, *l'inéquation*

$$\left|\pi^2-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\alpha+\varepsilon}}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions.

IV. - APPROXIMATION DES LOGARITHMES DES NOMBRES ENTIERS.

Soit f un entier positif assez grand. Soient $a_1,\ldots,a_m$ m entiers. On pose $\lambda_k = (\log f)^k - a_k$, $k = 1,\ldots,m$. Considérons

$$R_h(f) = \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(f)(\log f)^k$$

et

$$b_h = \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(f)\lambda_k = R_h(f) - \sum_{k=0}^{m} A_{hk}(f)\lambda_k \ ;$$

les b_h sont des entiers et l'un d'eux au moins n'est pas nul. Il existe un indice h_o tel que, si $R = R_{h_o}$ et $A_k = A_{h_o,k}$, on ait

$$|R(f)| + |\sum_{k=0}^{m} A_h(f)\lambda_k| \geq 1 \ .$$

Si on impose à $R(f)$ de vérifier $|R(f)| \leq \frac{1}{2}$, on aura

$$|\sum_{k=0}^{m} A_k(f)\lambda_k| \geq \frac{1}{2} \ .$$

D'après les majorations de R et de A_k (voir appendice II et III), on obtient le résultat suivant.

Pour tout $\varepsilon > 0$ (assez petit), il existe $n(\varepsilon)$ tel que $n \geq n(\varepsilon)$ implique

(i) $|R(f)| \leq m!\exp(-n(m+1)(\log(z_o+1)-1-\varepsilon))$, où $z_o+1 = \dfrac{f^{1/(m+1)}}{f^{1/(m+1)}-1}$

(ii) $|A_k(x)| \leq \dfrac{m!}{k!} \exp((1-\xi+\varepsilon)\log f+(m+1)(1-\xi \log \xi -(1-\xi)\log(1-\xi)+\varepsilon))$

où $\xi = \dfrac{1}{1+f^{1/(m+1)}}$.

Soit $\alpha > 0$, on pose

$$m = [\alpha \log f] \ , \quad \beta = \left(\log\left(\frac{e^{1/\alpha}}{e^{1/\alpha}-1}\right)-1\right)^{-1} \ , \quad n = [(\beta+\varepsilon)\log\log f] \ .$$

Pour f assez grand, la condition $|R(f)| < \frac{1}{2}$ est bien remplie. On aboutit alors facilement au résultat suivant :

Soit $M = \beta((1-\xi) + \alpha(1-\xi \log \xi - (1-\xi)\log(1-\xi)))$, alors pour tout $M' > M$, on a

$$\sum_{k=0}^{m} \left|\frac{(\log f)^k - a_k}{k!}\right| > f^{-M' \log\log f} \ , \quad \text{pour } f \text{ assez grand.}$$

Si on fixe $\alpha = 4{,}870$ on trouve $M < 17{,}7$. En prenant $a_k = a_1^k$, on obtient le théorème suivant :

THEOREME 3. - _Pour_ f _entier assez grand, on a_

$$\|\log f\| > f^{-17,7 \log \log f} ,$$

(où $\|x\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche).

Remarque : En 1952, Mahler [2] avait obtenu le même énoncé, mais avec un exposant égal à 40 ; par une autre méthode, en 1967 [4], il diminuait cet exposant jusqu'à 33. En suivant le travail de Mahler [2], on peut déduire de ce théorème l'énoncé ci-dessous :

COROLLAIRE. - _Pour_ n _assez grand, on a_

$$\|e^n\| \geq n^{-18n} .$$

V. - APPROXIMATIONS SIMULTANEES DES LOGARITHMES DES NOMBRES ALGEBRIQUES.

La méthode employée jusqu'à présent permet d'obtenir des résultats concernant l'approximation des puissances successives des logarithmes des nombres algébriques. Par exemple, pour le nombre π , on peut démontrer les résultats suivants :

1) $\max\limits_{1 \leq k \leq 5} (\|q\pi^k\|) > q^3$ si $q > q_1$ (explicite) ;

2) Soit m un entier fixé. Si on désigne par ϵ_m la borne inférieure des ϵ tels que l'inégalité

$$\max_{1 \leq k \leq m} (\|q\pi^k\|) \leq q^{-1-\epsilon}$$

n'ait qu'un nombre fini de solutions, alors on a

$$\overline{\lim}\ \epsilon_m \log m \leq 1 + \log 2 .$$

Ce second résultat est encore vrai si on remplace π par π^2 .

Remarque : En utilisant le principe de Dirichlet, on peut montrer que ϵ_m vérifie $\epsilon_m \geq \frac{1}{m}$, c'est bien connu.

En fait, 2) est un cas particulier du résultat général suivant, dont la démonstration est analogue à celle du paragraphe précédent :

THEOREME 4. - Soit x un nombre algébrique fixé, $x \neq 0,1$, appartenant à un corps de nombres $K \subset \mathbb{C}$ de degré δ sur $\mathbb{Q}(i)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors pour $m \geq m(\varepsilon, x, \delta)$, la propriété suivante a lieu : pour tout m-uples d'éléments $a_1, \ldots, a_m$ de K admettant d comme dénominateur et de hauteurs majorées par h, on a

$$\max_{1 \leq k \leq m} |(\log x)^k - a_k| > (d^\delta h^{\delta-1})^{-1-\frac{1+\log 2+\varepsilon}{\log m}}$$

si $d^\delta h^{\delta-1} > B(\varepsilon, m)$.

APPENDICE.

I. - MAJORATION DE $R_h(e^{i\alpha})$, α réel.

On suppose $\alpha \in \,]0,\pi]$. On a

$$R_h(x) = \frac{P}{n^{(n+1)(m+1)-(h+1)}} J_h(x) \;, \quad \text{où } J_h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u^h e^{in\alpha u}\, du}{[u(u+\frac{1}{n})(u+\frac{2}{n})\ldots(u+1)]^{m+1}},$$

on prendra comme contour Γ le bord du rectangle de sommets $2c + \frac{1}{2} \pm ic$, $-2c - \frac{3}{2} \pm ic$, où $c = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2(m+1)}$. Sur le bord de ce rectangle, la fonction à indiquer est majorée en module par

$$\frac{(c+\frac{1}{2})^h |e^{\alpha z_o}|}{|z_o(z_o+\frac{1}{n})\ldots(z_o+1)|^{m+1}} \;, \quad \text{avec } z_o = -\frac{1}{2} - ic \;.$$

Pour minorer le dénominateur de cette expression, on étudie la quantité

$$L = \sum_{j=0}^{n} \log(z_o + \frac{j}{n}) \;.$$

D'après la formule d'Euler-Maclaurin,

$$L = \int_0^n \log(z_o + \frac{x}{n})dx + \frac{1}{2}(\log(z_o) + \log(z_o+1)) + \frac{1}{6}(\frac{1}{nz_o+1} - \frac{1}{nz_o}) + \rho_n \;,$$

avec $|\rho_n| \leq \frac{1}{24} \int_0^n \frac{dt}{|t+nz_o|^3} \leq \frac{1}{24n^2c^3}$.

D'où

$$\operatorname{Re}(L) \geq n(\frac{1}{2}\log\frac{1}{4}(1+c^2) + \frac{c\alpha}{2(m+1)} - 1) + \log(\frac{1}{4}(1+c^2)) - \frac{1}{6n^2c^2}(1+\frac{1}{4c}) \;.$$

On en déduit facilement la majoration

$$|R_h(e^{i\alpha})| \le \frac{P}{n^{n(m+1)}}\, 2^{2(m+1)}\, \frac{(c+\frac{1}{2})^m}{(1+c^2)^{m+1}}\, \frac{e^{\frac{m+1}{6n^2c^2}(1+\frac{1}{4c})}}{\pi}\, \exp(-(m+1)n(\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{c^2+1}{4})-1)).$$

Remarque : On peut montrer, grâce à la méthode du col, que, pour un fixé

$$\log J_h = -(m+1)n(\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{c^2+1}{4})-1) + 0(\log n)\,,$$

ce qui montre que la majoration ci-dessous est essentiellement la meilleure possible.

II. - MAJORATION DE $R_h(x)$, x réel.

On supposera $x > 1$. On considère $J_h(x)$ comme dans le paragraphe précédent mais en remplaçant Γ par le bord du rectangle de sommets $z_o \pm i(z_o+1)$ et $-z_o-1\pm i(z_o+1)$, avec $z_o = \dfrac{1}{x^{1/(m+1)}-1}$.

On obtient alors

$$|R_h(x)| \le \frac{Px^n}{2\pi}\, \frac{(2(1+z_o))^m\, x^{nz_o}}{n^{n(m+1)}\, |z_o(z_o+\frac{1}{n})\dots(z_o+1)|^{m+1}}$$

d'où, comme plus haut,

$$|R_h(x)| \le \frac{Px^n(2(1+z_o))^m}{2\pi\, n^{n(m+1)}}\, \frac{e^{\frac{m+1}{6n^2z_o^2}(1+\frac{1}{4z_o})}}{(z_o(z_o+1))^{\frac{m+1}{2}}}\, \exp(-n(m+1)(\log(z_o+1)-1))\,.$$

III. - MAJORATION DE $A_{hk}(x)$, x réel.

On supposera $x > 1$. Il est facile de voir (cf. [2]) que A_{hk} est donné par

$$A_{hk}(x) = \frac{m!}{k!}\, N^m (n!)^{m+1} \sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_{-k-1}^{(\lambda,h)}\, x^{n-\lambda}\,,$$

avec $\gamma_K^{(\lambda,h)} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_\lambda} \dfrac{z^h dz}{Q(z)(z+\lambda)^{K+1}}$ où C_λ désigne le cercle de centre $-\lambda$ et de rayon $\frac{1}{2}$. D'où

$$|\gamma_K^{\lambda,h}| \leq (n+1)^m 2^{2(n+1)(m+1)} q_\lambda^{m+1} \quad , \text{ où } \quad q_\lambda = \frac{\lambda!(n-\lambda)!}{(2\lambda)!(2n-2\lambda)!} \quad .$$

Soit

$$|\sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_K^{(\lambda,h)} x^{n-\lambda}| \leq (n+1)^m 2^{2(n+1)(m+1)} \sum_{\lambda=0}^{n} q_\lambda^{m+1} x^{n-\lambda} \leq (n+1)^{m+1} 2^{2(n+1)(m+1)} K$$

où $K = \max |q_\lambda^{m+1} x^{n-\lambda}|$. Pour chercher K , on peut remarquer que

$$\frac{q_{\lambda+1}^{m+1} x^{n-(\lambda+1)}}{q_\lambda^{m+1} x^{n-\lambda}} = \frac{1}{x}\left(\frac{2n-2\lambda-1}{2\lambda+1}\right)^{m+1} = \frac{1}{x}\varphi_\lambda^{m+1}$$

où $\varphi_\lambda = \frac{2n}{2\lambda+1} - 1$ est une fonction décroissante de λ . Ceci prouve que la suite $q_\lambda^{m+1} x^{n-\lambda}$ est concave. On en déduit facilement

$$K \leq x^{n-(\xi_n - \frac{1}{2})} \left(4\left(\frac{e}{4n\xi^\xi(1-\xi)^{1-\xi}}\right)^n\right)^{m+1}$$

où $\xi n - \frac{1}{2}$ désigne la solution de l'équation en y

$$\frac{1}{x}\left(\frac{2n-2y-1}{2y+1}\right)^{m+1} = 1 \quad ,$$

soit $\xi = \frac{1}{x^{1/(m+1)}+1}$.

Finalement,

$$|A_{hk}(x)| \leq \frac{m!}{k!}(n+1)^{m+1} N^m \left(e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{m+1} 2^{4(m+1)} \left(\frac{e}{n\xi^\xi(1-\xi)^{(1-\xi)}}\right)^{n(m+1)} x^{(1-\xi)n+\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{m!}{k!}(n+1)^{\frac{3}{2}(m+1)} (16e)^{m+1} N^m \left(\frac{1}{\xi^\xi(1-\xi)^{1-\xi}}\right)^{n(m+1)} x^{(1-\xi)n+\frac{1}{2}} \quad .$$

<u>Complément</u>.

Pour une méthode totalement différente, on peut démontrer le résultat suivant :

THEOREME 5. - <u>Pour</u> $\frac{p}{q}$ <u>rationnel</u>, $q \geq 3$ <u>on a</u>

$$|\operatorname{tg} 1 - \frac{p}{q}| \geq 10^{-5} \frac{\log\log q}{q^2 \log q} \quad .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOONG K.Y.; DAYKIN D.E. ; RATHBORNE C.R. - Rational approximations to π . Math. Comp. 25 (1971), pp. 387-392.

[2] MAHLER K. - On the approximation of logarithms of algebraic numbers. Phil. Trans. Royal Soc. of London, A, 245, (1953), pp. 371-398.

[3] MAHLER K. - On the approximation of π . Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, A, 56 (= Indag. Math. 15) (1953) pp. 29-42.

[4] MAHLER K. - Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms. Math. Annales, 168 (1967) pp. 200-227.

[5] ROSSER J.B. and SCHOENFELD L. - Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math. 6 (1962) pp. 64-94.

[6] SCHMIDT W.M. - Approximation to algebraic numbers. Enseign. Math., XVII (1971) pp. 187-253. (= Monographie n° 19 de l'Enseignement Mathématique, Genève 1972).

-:-:-:-

M. MIGNOTTE
C.S.P. Département de Mathématiques
Place du 8 mai 45

93206 SAINT DENIS