JEAN-PIERRE CONZE

Convergence des moyennes ergodiques pour des sous-suites

Mémoires de la S. M. F., tome 35 (1973), p. 7-15
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__35__7_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 35, 1973, p. 7-15.

CONVERGENCE DES MOYENNES ERGODIQUES POUR DES SOUS-SUITES

par Jean-Pierre CONZE

RESUME.-
Etant donnés un système dynamique $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ et une suite croissante $K=(k_i)$ d'entiers positifs, nous étudions la convergence ponctuelle des moyennes $\frac{1}{n}\Sigma_{i<n} T^{k_i}f$, $f\in L^1(\mu)$. En particulier, nous construisons une suite K de densité non nulle, des transformations T à spectre continu et des fonctions $f\in L^1(\mu)$, pour lesquelles ces moyennes ne convergent pas presque partout.

INTRODUCTION.-

Soit $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ un système dynamique. Pour toute suite $K=(k_i)$ strictement croissante d'entiers positifs, formons la suite des opérateurs définis dans $L^1(\mu)$ par

$$\sigma_{n,K,T}\, f(x)=\frac{1}{n}\,\Sigma_{i<n}\, f(T^{k_i}x).$$

Quand K est la suite des entiers naturels, la suite $\sigma_{n,K,T}\, f(x)$ converge pour presque tout x. Par contre, des exemples dus à FRIEDMAN et ORNSTEIN [4] et à KRENGEL [11], montrent que, pour certains choix de K, la suite $\sigma_{n,K,T}\, f(x)$ peut ne pas converger presque partout, pour toute fonction $f\in L^1(\mu)$.

C'est ce problème de convergence que nous étudions dans différents cas particuliers. Dans le § 1, nous utilisons le principe de continuité de Banach et des résultats de STEIN et SAWYER [6] pour construire des suites K universelles dans le sens suivant : pour tout automorphisme T apériodique de $(X,\mathcal{A},\mu)$, il existe une fonction $f\in L^1(\mu)$ telle que $\sigma_{n,K,T}\, f(x)$ ne converge pas presque partout. L'existence de telles suites a été obtenue par une méthode différente par KRENGEL [11]. Ici nous montrons que des conditions peuvent être imposées à la fonction de densité de la suite K.

Dans le § 2, nous étudions le cas des suites de densité non nulle. Nous montrons que, pour ces suites, la convergence de $\sigma_{n,K,T}\, f(x)$ dépend de la nature de la transformation considérée. Il y a convergence pour les transformations T à spectre de Lebesgue, mais il est possible de construire une suite K de densité 1/2, une fonction $f\in L^1(\mu)$ et un G_δ dense de transformations T à spectre continu pour lesquels $\sigma_{n,K,T}\, f(x)$ ne converge pas presque partout.

Dans le § 3, nous établissons un lien entre la disjonction au sens de FURSTENBERG [5] et la convergence des suites $\sigma_{n,K,T}$ associées à certaines suites K.

Je tiens à remercier le Professeur U. KRENGEL, qui a attiré mon attention sur l'application du lemme 3 au problème étudié.

NOTATIONS.-

Nous supposerons que $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ est un espace de probabilité isomorphe à $[0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Nous notons $\mathscr{C}$ le groupe des automorphismes (transformations inversibles bimesurables conservant la mesure) de $(X,\mathcal{Q},\mu)$, muni de la topologie faible.

Un automorphisme $T\in\mathscr{C}$ est apériodique si, pour tout $n\neq 0$,

$$\mu\,\{x : T^n x = x\} = 0 .$$

Rappelons deux résultats (HALMOS [7]) :

- si T est apériodique, l'ensemble $\{R^{-1}T\,R,\ R\in\mathscr{C}\}$ est dense dans $\mathscr{C}$,
- les permutations dyadiques sont denses dans $\mathscr{C}$.

Soit $K=(k_i)$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, nous appellerons fonction de densité de K la suite $\varphi_K(n)=\frac{1}{n}$ card $\{i : k_i\leq n\}$. La densité de K , quand elle existe, est la limite de $\varphi_K(n)$. La densité inférieure de K est $\delta(K) = \liminf \varphi_K(n)$. Une suite a une densité inférieure positive si $\delta(K)>0$. Dans ce cas, il existe une constante $C<+\infty$ telle que $k_n \leq Cn$, pour tout n.

Soient $T\in\mathscr{C}$ et $K=(k_i)$. Nous posons

$$\sigma_{n,K,T}\, f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i<n} f(T^{k_i}x),$$

puis, pour toute fonction $f\in L^1(\mu)$ à valeurs réelles et tout réel λ ,

$$A_N(K,T,f,\lambda) = \{x : \sup_{n\leq N} \sigma_{n,K,T}\, f(x) > \lambda\}$$

$$A\ (K,T,f,\lambda) = \{x : \sup_n \sigma_{n,K,T}\, f(x) > \lambda\}$$

$$\gamma\ (K,T,\lambda) = \sup_{\|f\|_1=1,\ f\in L^1(\mu)} \mu(A(K,T,f,\lambda)\ ).$$

Etant donnée une suite $K=(k_i)$, nous appellerons bloc de longueur p dans K toute suite finie d'entiers de la forme $k_n, \dots , k_{n+p-1}$.

§1 CONSTRUCTION DE SUITES UNIVERSELLES.-

LEMME 1.-

Pour toute fonction $f\in L^1(\mu)$ à valeurs réelles et tous nombres réels a et λ, l'ensemble $\mathscr{C}_a=\{T\in\mathscr{C} : \mu(A(K,T,f,\lambda)\leq a\}$ est fermé dans $\mathscr{C}$.

DEMONSTRATION.-

Posons $F_n(T,\lambda) = \{x : \sigma_{n,K,T}\, f(x)>\lambda\}$, et notons en abrégé $A_N(T,\lambda)$ l'ensemble $A_N(K,T,f,\lambda)$. Pour S et T dans $\mathscr{C}$, et $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$A_N(T,\lambda+\varepsilon)\subseteq A_N(S,\lambda) \cup \bigcup_{1\leq n\leq N} \left[F^c{}_n(S,\lambda)\cap F_n(T,\lambda+\varepsilon)\right] ,$$

F^c désignant le complémentaire d'un ensemble F.

Soit $T = \lim_p S_p$, avec $S_p\in\mathscr{C}_a$. Pour tout $\delta>0$ et tout entier $N\geq 1$, il existe $S\in\mathscr{C}_a$ tel que

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i<n} (T^{k_i}f-S^{k_i}f)\right\|_1 < \delta,\ n = 1, \dots , N.$$

On a donc pour ce choix de S :

$$\mu\,(F^c{}_n(S,\lambda)\cap F_n(T,\lambda+\varepsilon)\ ) \leq \delta/\varepsilon ,$$

d'où, S étant dans $\mathscr{C}_a$,

$$\mu(A_N(T,\lambda+\varepsilon)) \leq \mu(A_N(S,\lambda)) + N\delta/\varepsilon \leq a + N\delta/\varepsilon$$

Faisons tendre successivement δ, puis ε, vers 0. Nous obtenons : $\mu(A_N(T,\lambda)) \leq a$, d'où, en passant à la limite en N, $\mu(A(T,\lambda)) \leq a$.

LEMME 2.-

Si $T \in \mathcal{C}$ est apériodique, pour tout $S \in \mathcal{C}$, on a

$$\gamma(K,S,\lambda) \leq \gamma(K,T,\lambda).$$

En particulier, si T et S sont apériodiques, on a

$$\gamma(K,S,\lambda) = \gamma(K,T,\lambda).$$

DEMONSTRATION.-

Si S est conjugué de $T = STR^{-1}$, on a, pour $f \in L^1(\mu)$, telle que $||f||_1 = 1$:

$\mu(A(K,S,f,\lambda)) = \mu(R(A(K,T,Rf,\lambda)) = \mu(A(K,T,Rf,\lambda)) \leq \gamma(K,T,\lambda)\ ||Rf||_1 =$ $\gamma(K,T,\lambda)\ ||f||_1 = \gamma(K,T,\lambda)$.

D'après la densité des conjugués d'un automorphisme apériodique et le lemme 1, on a donc :

$$\mu(A(K,S,f,\lambda)) \leq \gamma(K,T,\lambda), \text{ pour tout } S \in \mathcal{C},$$

et f de norme 1, d'où : $\gamma(K,S,\lambda) \leq \gamma(K,T,\lambda)$.

THEOREME 1.-

A toute suite K est associée une constante $C(K) \leq \infty$ telle que $\mu(A(K,T,f,\lambda)) \leq \frac{C(K)}{\lambda}\ ||f||_1$, quels que soient $T \in \mathcal{C}$, $f \in L^1(\mu), \lambda > 0$. Pour que $C(K)$ soit finie, il suffit qu'il existe $T \in \mathcal{C}$ apériodique tel que $\sigma_{n,K,T} f(x)$ converge presque partout, pour toute $f \in L^1(\mu)$.

DEMONSTRATION.-

Si, pour tout $T \in \mathcal{C}$ apériodique, $\sigma_{n,K,T} f(x)$ ne converge pas presque partout pour toute $f \in L^1(\mu)$, posons $C(K) = +\infty$. Supposons maintenant que, pour un automorphisme $T \in \mathcal{C}$ apériodique, $\sigma_{n,K,T} f(x)$ converge p. p. pour toute $f \in L^1(\mu)$.

D'après un théorème de Banach, voir GARSIA [6], les constantes $\gamma(K,T,\lambda)$ sont finies pour tout $\lambda > 0$, et tendent vers 0 quand λ tend vers l'infini. D'après le lemme 2, il en est de même pour $\gamma(K,S,\lambda)$ quel que soit l'automorphisme S apériodique, en particulier pour S ergodique.

Choisissons un automorphisme S_o ergodique. D'après ce qui précède, on a $\sup_n |\sigma_{n,K,S_o} f(x)| < +\infty$, p. p., pour toute $f \in L^1(\mu)$. Un théorème de STEIN et SAWYER, voir [6], appliqué à la suite des opérateurs σ_{n,K,S_o} implique qu'il existe une constante $C(K)$ finie, indépendante de f et λ telle que

$$\mu(A(K,S_o,f,\lambda)) \leq \frac{C(K)}{\lambda}\ ||f||_1 .$$

D'après le lemme 2, pour tout automorphisme $S \in \mathcal{C}$, on a donc :

$$\mu(A(K,S,f,\lambda)) \leq \frac{C(K)}{\lambda}\ ||f||_1 ,$$

et $C(K)$ est la constante cherchée.

Rappelons qu'un automorphisme $T \in \mathcal{C}$ a un <u>spectre de Lebesgue</u> s'il existe une

famille d'indices I et de fonctions $f_{n,i}$, $n\in\mathbb{Z}$, $i\in I$, telles que
- les fonctions 1, $f_{n,i}$, $n\in\mathbb{Z}$, $i\in I$ forment une base orthonormale de $L^2(\mu)$,
- pour tout $n\in\mathbb{Z}$, pour tout $i\in I$, $Tf_{n,i} = f_{n+1,i}$.

THEOREME 2.-

Etant donnée une suite K, si pour un automorphisme $S\in\mathcal{C}$ apériodique $\sigma_{n,K,S}f$ converge p. p., pour toute $f\in L^1(\mu)$, alors, pour tout $T\in\mathcal{C}$, à spectre de Lebesgue, $\sigma_{n,K,T}f$ converge p. p. vers $\mu(f)$, pour toute $f\in L^1(\mu)$.

DEMONSTRATION.-

D'après le théorème 1, il existe une constante $C(K)<\infty$ telle que, pour tout $T\in\mathcal{C}$, on ait $\mu(A(K,T,f,\lambda))\leq \frac{C(K)}{\lambda}\,||f||_1$, quels que soient $f\in L^1(\mu)$, $\lambda>0$.

Pour toute transformation $T\in\mathcal{C}$, l'ensemble des fonctions $f\in L^1(\mu)$ telles que $\sigma_{n,K,T}\,f(x)$ converge p. p. vers $\mu(f)$ est donc fermé dans $L^1(\mu)$. Pour T à spectre de Lebesgue, cet ensemble est dense, car, d'après le lemme ci-dessous, il contient les combinaisons linéaires finies des fonctions 1 et $f_{n,i}$, $n\in\mathbb{Z}$, $i\in I$.

LEMME 3 (Rajchman).-

Si (g_n) est une suite de fonctions orthogonales deux à deux dans $L^2(\mu)$, de normes bornées supérieurement, les moyennes

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N} g_n(x) \quad \text{convergent p. p. vers } 0.$$

DEMONSTRATION.- Voir CHUNG [2] .

Grâce au théorème 1, nous pouvons ramener la construction de suites universelles à l'étude d'automorphismes particuliers.

THEOREME 3.-

Soit $\varphi(n)$ une suite décroissante de nombres réels, tendant vers 0, $\varphi(n)>0, \varphi(0)\leq 1$. Alors il existe une suite K strictement croissante d'entiers positifs telle que $\varphi_K(n)\geq\varphi(n)$, pour tout $n\geq 0$, et telle que, pour tout automorphisme $T\in\mathcal{C}$, apériodique, il existe une fonction $f\in L^1(\mu)$ pour laquelle $\sigma_{n,K,T}\,f(x)$ ne converge pas p. p..

DEMONSTRATION.-

Sur X identifié au cercle unité, considérons une rotation ergodique T, une suite décroissante d'intervalles ouverts I_n centrés en un même point ω, de longueur $2\ell_n$ tendant vers 0, enfin, pour chaque n un recouvrement de X par des intervalles ouverts $I_n^1, \ldots I_n^{p_n}$ de longueurs ℓ_n.

Pour chaque n et chaque p, $1\leq p\leq p_n$, soit k_n^p la suite strictement croissante formée des entiers k tels que $T^{-k}\omega\in I_n^p$. Comme T est minimal, il existe une constante C_n telle que, dans tout intervalle de longueur C_n dans $\mathbb{N}$, se trouve au moins un terme de chacune des suites $K_n^1, \ldots K_n^{p_n}$.

Il est alors possible de construire une suite K_n formée de blocs de longueur croissante pris dans les suites k_n^p, telle que dans chaque intervalle de longueur C_n dans $\mathbb{N}$ se trouve au moins un terme de la suite K_n, et telle que

$$\limsup_i \sigma_{i,K_n,T} 1_{I_n}(x) = 1 \text{ , partout sur } X .$$

Enfin, en utilisant la répartition des suites K_n, on peut construire une suite K formée de blocs de longueur croissante pris dans les suites K_n telle que

$$\varphi_K(n) \geq \varphi(n) ,$$

et

$$\limsup_i \sigma_{i,K,T} 1_{I_n}(x) = 1 \text{ , pour tout } x \text{ dans } X \text{ , et tout } n .$$

La constante $C(K)$, définie dans le théorème 1, attachée à la suite K, doit vérifier $1 \leq C(K)\, \ell_n$, pour tout n. On a donc $C(K) = +\infty$. Le théorème 1 permet de conclure.

Donnons une autre méthode de construction de suites universelles, utilisant les transformations périodiques. Soit K une suite formée d'une suite croissante de blocs B_j satisfaisant aux conditions suivantes : chaque bloc B_j est lui-même formé d'une suite croissante de blocs B_j^p, $0 \leq p < j$, les éléments de B_j^p sont congrus à p modulo j, pour $0 \leq p < j$, enfin, en notant $\ell(j,p)$ la longueur du bloc B_j^p, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\ell(j,p) \geq \alpha \Sigma \ell(i,k) ,$$

où la sommation porte sur tous les blocs B_i^k précédants B_j^p. Alors K est une suite universelle.

En effet, soient S_j une transformation périodique de période j de X, et A un sous-ensemble de X dont les images $A, S_jA, \ldots, S_j^{j-1}A$ sont disjointes et recouvrent X. D'après le choix de K, on a

$$\sup_i \sigma_{i,K,S_j} 1_A(x) \geq \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ , pour tout } x \in X.$$

On a donc $1 \leq \frac{1}{j}\, \gamma(K,S_j, \frac{\alpha}{1+\alpha})$. Ceci implique $C(K) = +\infty$, et le théorème 1 montre que K est une suite universelle.

§2 SUITES DE DENSITE POSITIVE.-

Les suites construites au § 1 sont de densité nulle. Nous allons voir que pour les suites de densité inférieure positive, la convergence des moyennes $\sigma_{n,K,T} f$ dépend de la nature de l'automorphisme T.

Notons d'abord deux résultats élémentaires.

LEMME 4.-

Soit K une suite de densité inférieure positive. Si C est une constante finie telle que $k_n \leq Cn$, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mu(A(K,T,f,\lambda)) \leq \frac{C}{\lambda} \; ||f||_1 \text{ , pour tout } T \in \mathcal{C} .$$

DEMONSTRATION.-

Le résultat se déduit immédiatement du lemme maximal ergodique.

LEMME 5.-

Si $T \in \mathcal{C}$ est à spectre continu, pour toute suite K de densité positive, pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$, on a

$$\lim_n \; ||\sigma_{n,K,T} \, f - \mu(f)||_1 = 0 .$$

DEMONSTRATION.-

Par une démonstration analogue à celle du théorème de Blum-Hanson [3], on obtient d'abord, pour toute fonction $f \in L^2(\mu)$,

$$\lim_n \; ||\sigma_{n,K,T} \, f - \mu(f)||_2 = 0 .$$

Par densité de $L^2(\mu)$ dans $L^1(\mu)$, on déduit le résultat pour $L^1(\mu)$.

REMARQUES.-

Pour des résultats généraux sur la convergence de suites d'opérateurs $\frac{1}{n} \sum_{i<n} T^{k_i}$ dans des espaces de Banach, voir Lee K. JONES [10].

Il résulte du lemme 5 que, si T est à spectre continu, et si, pour une suite K de densité inférieure positive, $\sigma_{n,K,T} \, f(x)$ converge presque partout, la limite ne peut être que $\mu(f)$.

THEOREME 4.-

Soient K une suite de densité inférieure positive, et $T \in \mathcal{C}$ un automorphisme à spectre de Lebesgue. Alors, pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_n \; \sigma_{n,K,T} \, f(x) = \mu(f) \text{ , pour presque tout } x.$$

DEMONSTRATION.-

Il résulte du lemme 4 que les fonctions $f \in L^1(\mu)$ pour lesquelles $\sigma_{n,K,T} \, f(x)$ converge p. p. vers $\mu(f)$ est fermé dans $L^1(\mu)$, et du lemme 3 que cet ensemble est dense dans $L^1(\mu)$.

THEOREME 5.-

Il existe une suite K de densité positive et un G_δ dense d'automorphismes T dans $\mathcal{C}$ tels que $\sigma_{n,K,T} \, f(x)$ ne converge pas presque partout, pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$.

DEMONSTRATION.-

Désignons par B l'intervalle $[0,1/2]$ dans X identifié à $[0,1]$. Pour tout entier n, posons

$$E_n(K,T,1_B,\lambda) = \{ x : \sup_{k \geq n} \; \sigma_{k,K,T} \; 1_B(x) > \lambda \},$$

$$E(K,T,1_B,\lambda) = \bigcap_n \; \bigcap_p \; E_n(K,T,1_B,\lambda - \frac{1}{p}) = \{x : \limsup_k \; \sigma_{k,K,T} \; 1_B(x) \geq \lambda\} .$$

D'après le lemme 1, l'ensemble

$$\mathscr{C}_1(K) = \mathscr{C}_1 = \{T \in \mathscr{C} : \mu(E(K,T,1_B,\lambda)) \geq 1/2\},$$

où λ est fixé, $1/2 < \lambda < 1$, est un G_δ dans $\mathscr{C}$.

Pour démontrer le théorème, il nous suffit de construire une suite K de densité positive, telle que $\mathscr{C}_1$ soit dense dans $\mathscr{C}$. En effet, comme les automorphismes à spectre continu forment un G_δ dense dans $\mathscr{C}$ (voir HALMOS [7]), les automorphismes T à spectre continu dans $\mathscr{C}_1$ forment un G_δ dense, et pour ces automorphismes, d'après le lemme 5, $\sigma_{n,K,T}\, 1_B(x)$ ne converge pas p. p. .

Considérons une permutation T des intervalles dyadiques d'ordre p de $[0,1]$. Si I est un intervalle dyadique d'ordre p, la suite $K_{T,I}$ des entiers positifs k_n tels que $T^{k_n} I \subset B$ est de densité égale à $\mu(B) = 1/2$. On a

$$\sigma_{n,K_{T,I},T}\, 1_B(x) = 1 \quad \text{sur} \quad I, \text{ pour tout } n.$$

Il est alors possible de construire une suite K_T formée de blocs de longueur croissante pris dans les suites $K_{T,I}$ correspondant aux différents intervalles dyadiques d'ordre p, de densité 1/2, et telle que

$$\limsup_n \ \sigma_{n,K_T,T}\, 1_B(x) \geq \lambda, \text{ pour tout } x.$$

Par exemple, si T est la permutation qui échange $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$, la suite K_T est formée de blocs de longueur croissante, alternativement constitués de suites d'entiers pairs consécutifs et impairs consécutifs.

Enfin, de la même façon, en raisonnant sur la famille dénombrable des permutations dyadiques de $[0,1]$, on peut construire une suite K de densité 1/2, formée de blocs pris dans les suites K_T, telle que $\limsup_n \sigma_{n,K,T}\, 1_B(x) \geq \lambda$, pour tout x et toute permutation dyadique.

La densité des permutations dyadiques dans $\mathscr{C}$ montre que l'ensemble $\mathscr{C}_1(K)$ est dense dans $\mathscr{C}$.

§3 SUITES UNIFORMES ET DISJONCTION.-

Soit (Ω,φ) un système topologique, constitué par un espace topologique compact Ω et une application continue φ de Ω sur lui-même. Nous supposerons φ strictement ergodique, c'est-à-dire telle qu'il n'existe qu'une mesure de Radon m sur Ω normalisée invariante par φ.

Pour tout ouvert U de frontière m-négligeable dans Ω, et tout point ω dans Ω, nous définissons, comme dans [1], la suite uniforme $K = K(U,\omega)$ associée à U et ω, comme la suite des temps successifs d'entrée de $\varphi^n(\omega)$ dans U.

LEMME 6.-

Toute suite uniforme $K = K(U,\omega)$ a pour densité $m(U)$.

DEMONSTRATION.-

Soit g une fonction continue telle que $0 \leq g \leq 1_U$. D'après la stricte ergodicité de φ, on a

$$m(g) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k<n} g(\varphi^k\omega) \leqslant \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k<n} 1_U(\varphi^k\omega) .$$

En prenant la borne supérieure en g , on en déduit :

$$m(U) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k<n} 1_U (\varphi^k\omega).$$

Soit U' l'intérieur du complémentaire de U . On a de même

$$m(U') \leq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k<n} 1_{U'} (\varphi^k\omega) .$$

Comme par hypothèse $m(U) + m(U') = 1$, il en résulte

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{k<n} 1_U(\varphi^k\omega) \leq m(U) .$$

La suite $\frac{1}{n} \sum_{k<n} 1_U (\varphi^k\omega)$, qui est la fonction de densité de la suite K, a donc pour limite $m(U)$.

Appelons réalisation topologique d'un système dynamique $(X,\mathcal{Q},\mu,T)$ tout système $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{Q}},\tilde{\mu},\tilde{T})$ isomorphe au précédent, formé d'un espace topologique compact $\tilde{X}$ muni d'une mesure $\tilde{\mu}$ borélienne et de la tribu borélienne, et d'une transformation continue de $\tilde{X}$ sur lui-même laissant $\tilde{\mu}$ invariante. D'après le résultat récent de JEWETT [9] , étendu par KRIEGER [12], et HANSEL et RAOULT [8] , tout système dynamique (inversible) ergodique possède une réalisation topologique strictement ergodique.

Rappelons enfin que deux systèmes $(X,\mathcal{Q},\mu,T)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu,S)$ sont disjoints au sens de FURSTENBERG [5] , si $\mu\times\nu$ est l'unique mesure sur $(X\times Y,\mathcal{Q}\times\mathcal{B})$ invariante par $T\times S$ dont les projections sur $(X,\mathcal{Q})$ et $(Y,\mathcal{B})$ coïncident avec μ et ν respectivement.

LEMME 7.-

Soient $(X,\mathcal{Q},\mu,T)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu,S)$ deux systèmes dynamiques, $(\tilde{X},\tilde{T})$ et $(\tilde{Y},\tilde{S})$ des réalisations strictement ergodiques de ces systèmes. Pour que $(X,\mathcal{Q},\mu,T)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu,S)$ soient disjoints, il faut et il suffit que le produit $(\tilde{X}\times\tilde{Y}, \tilde{T}\times\tilde{S})$ soit strictement ergodique.

Le résultat suivant généralise un résultat de BRUNEL et KEANE [1] .

THEOREME 6.-

Soient (Ω,φ) un système topologique strictement ergodique, $K = K(U,\omega)$ une suite uniforme pour (Ω,φ) , $(X,\mathcal{Q},\mu,T)$ un système dynamique ergodique disjoint de (Ω,m,φ) , où m est l'unique mesure invariante par φ sur Ω . Alors, pour toute fonction $f\in L^1(\mu)$, la suite

$$\sigma_{n,K,T}\, f(x) \text{ converge presque partout vers } \mu(f) .$$

DEMONSTRATION.-

La suite K étant de densité positive, l'ensemble des fonctions $f\in L^1(\mu)$, telles que $\sigma_{n,K,T} f(x)$ converge presque partout vers $\mu(f)$, est fermé dans $L^1(\mu)$. Montrons que cet ensemble est dense.

Soit $(\tilde{X},\tilde{T})$ une représentation topologique strictement ergodique de $(X,\mathcal{Q},\mu,T)$.

Il nous suffit de montrer que, pour toute fonction f continue sur $\tilde{X}$, la suite $\sigma_{n,K,T} f(x)$ converge vers $\mu(f)$, pour tout $x \in \tilde{X}$.

Cette suite s'écrit $\frac{1}{n} \sum_{i<k_n} f(T^i x) 1_U (\varphi^i \omega)$. En utilisant la stricte ergodicité du produit $(\widetilde{X \times \Omega}, T \times \varphi)$, et en raisonnant comme dans le lemme 6, on montre la convergence de $\frac{1}{p} \sum_{i<p} f(\tilde{T}^i x) 1_U (\varphi^i \omega)$ vers $\mu(f)\ m(U)$. Comme d'autre part $\lim_n k_n / n = m(U)$, on a bien

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i<k_n} f(\tilde{T}^i x)\ 1_U (\varphi^i \omega) = \mu(f) \text{ , pour tout } x \in X \text{ .}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUNEL (A.), KEANE (M.). - Ergodic theorems for operators sequences, Z. Wahr., t. 12, 1969, p. 231-240.

[2] CHUNG (K. L.). - A course in probability theory. - Harcourt, Brace and World, 1968.

[3] FRIEDMAN (N. A.). - Introduction to ergodic theory. - New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1970 (Mathematical Studies, 29).

[4] FRIEDMAN (N. A.), ORNSTEIN (D.). - On mixing and partial mixing, 1971 (non publié).

[5] FURSTENBERG (H.). - Disjointness in ergodic theory ..., Math System Theory, t. 1, 1967, p. 1-50.

[6] GARSIA (A. M.). - Topics in almost everywhere convergence. - Chicago, Markham publ. Comp., 1970 (Lectures in advanced Mathematics, 4).

[7] HALMOS (P. R.). - Lectures in ergodic theory. - Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1956 (Publications of the Mathematical Society of Japan, 3).

[8] HANSEL (G.), RAOULT (J.-P.). - Ergodicité, uniformité et unique ergodicité (à paraître).

[9] JEWETT (R.). - The prevalence of uniquely ergodic systems, J. Math. and Mech., t. 19, 1970, p. 717-729.

[10] JONES (Lee K.). - A mean ergodic theorem for weakly mixing operators, Adv. in Math., t. 7, 1971, p. 211-216.

[11] KRENGEL (U.). - On the individual ergodic theorem for subsequences, Annals of math. Statistics, t. 42, 1971, p. 1091-1095.

[12] KRIEGER (W.). - On unique ergodicity, Ohio State University.

En ce qui concerne le §3, mentionnons également deux articles dont nous avons eu connaissance depuis la rédaction de ce travail en juin 1972 :

KAMAE (T.). - Subsequences of normal sequences, preprint, Osaka City University.

DENKER (M.). - On strict ergodicity, à paraître dans Ann. of Math. Stat..

Jean-Pierre CONZE
E. R. A. n° 250 du CNRS
UER Mathématiques et Informatique
Université de RENNES
B. P. 25-A - 35031 RENNES CEDEX