MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN JACOD

Fonctionnelles additives et systèmes de Lévy des produits semi-directs de processus de Markov

Mémoires de la S. M. F., tome 35 (1973), p. 119-144
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__35__119_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 35, 1973, p. 119-144.

FONCTIONNELLES ADDITIVES ET SYSTEMES DE LEVY DES PRODUITS SEMI-DIRECTS DE PROCESSUS DE MARKOV

par Jean JACOD
(Ecole des Mines, Fontainebleau)

RESUME.- Soit $\underset{\sim}{X} = (\Omega,(X_t,Y_t),\underset{\sim}{P}^{x,y})$ un processus de Markov à valeurs dans le produit $E_1\times E_2$ de deux espaces localement compacts de type dénombrable. Soit (Q_t) son semi-groupe. Si $Q_t(x,y;A\times E_2)$ est indépendant de y, on dit que $\underset{\sim}{X}$ est un produit semi-direct de processus de Markov.

On remarque que les restrictions des probabilités $\underset{\sim}{P}^{x,y}$ à la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les $(X_t,\ t\geq 0)$ ont une valeur commune P^x indépendante de y, et que le processus $X = (\Omega,X_t,P^x)$ est lui-même markovien. On étudie alors les propriétés du processus (Y_t), conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}$, en montrant en particulier que c'est un processus de Markov non homogène. Puis on étudie les projections sur $\mathcal{F}$ des fonctionnelles additives de $\underset{\sim}{X}$, et enfin les systèmes de Lévy.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Cet article est la suite de [6], où nous avons défini les "noyaux multiplicatifs" d'un processus de Markov. Si $X = (\Omega,\theta_t,X_t,P^x)$ est un processus de Markov à valeurs dans un espace localement compact de type dénombrable $(E_1,\mathcal{E}_1)$ et si $(E_2,\mathcal{E}_2)$ est un espace du même type, on appelle ainsi une famille $q = (q_{t,\omega}(y,.),\ t\geq 0,\ \omega\in\Omega,\ y\in E_2)$ de mesures sur E_2 telle que pour tous $s,t>0$, $y\in E_2$, on ait: $q_{t+s,\omega}(y,.) = \int q_{t,\omega}(y,dy')q_{s,\theta_t(\omega)}(y',.)$ ps en ω.

Soit $\underset{\sim}{X} = (\Omega,\theta_t,(X_t,Y_t),\underset{\sim}{P}^{x,y})$ un processus de Markov à valeurs dans le produit

$E_1 \times E_2$, de semi-groupe (Q_t). $\underset{\sim}{X}$ est un produit semi-direct de processus de Markov (en abrégé: PSD) si $Q_t(x,y;A\times E_2)$ est indépendant de y. $\mathcal{F}$ étant la tribu engendrée par les $(X_t,\ t\geqslant 0)$, on vérifie aisément que cette condition équivaut au fait que les restrictions des $\underset{\sim}{P}^{x,y}$ à $\mathcal{F}$ ne dépendent pas de y, et on note alors P^x leur valeur commune. Le processus $X = (\Omega,\theta_t,X_t,P^x)$ est lui-même markovien.

Il est intuitif que la seconde composante (Y_t) est, conditionnellement au fait que la trajectoire de (X_t) est connue, un processus de Markov non homogène, du moins en un sens faible que nous préciserons. L'objet essentiel de ce travail est l'étude de ce processus conditionnel (sous-entendu: par rapport à $\mathcal{F}$).

Dans la partie II nous montrons l'existence d'un noyau multiplicatif q de X, tel que $q_t(y,A) = \underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_t\in A|\mathcal{F}\}$. Ceci implique que le processus conditionnel (Y_t) admet $(q_{t,\theta_s})_{s,t\geqslant o}$ pour noyaux de transition.

Les parties III et IV concernent les fonctionnelles additives (FA) de $\underset{\sim}{X}$. Si $(\underset{\sim}{A}_t)$ est une FA de $\underset{\sim}{X}$, on montre l'existence d'une famille $(A^y_t;\ y\in E_2)$ de processus croissants, telle que $A^y_{t+s} = A^y_t + \int q_t(y,dy')A^{y'}_s\circ\theta_t$ ps, et $A^y_t = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_t|\mathcal{F}_t\}$. $(A^y_t)_{t\geqslant o}$ s'appelle la y-projection de $(\underset{\sim}{A}_t)$ sur $\mathcal{F}$. On étudie ensuite la continuité des y-projections des FA de $\underset{\sim}{X}$.

Enfin la dernière partie est consacrée à l'étude du système de Lévy de $\underset{\sim}{X}$, lorsque ce processus est de Hunt. On montre en particulier que le noyau de Lévy $\underset{\sim}{N}$ se met sous la forme:

$$\underset{\sim}{N}(x,y;dx',dy') = N_1(x,y;dy')\varepsilon_x(dx') + f(x,y)N(x,dx')K(x,y,x';dy'),$$

où N est le noyau de Lévy de X, K une probabilité de transition de $E_1\times E_2\times E_1$ dans E_2, N_1 une mesure de transition de $E_1\times E_2$ dans E_2 telle que $N_1(x,y;\{y\}) = 0$, et $\varepsilon_x(.)$ la mesure de Dirac en x. Cette formule a une interprétation simple, en fonction de la propriété de Markov non homogène du processus conditionnel (Y_t): $N_1(X_t(\omega),.;.)$ est le noyau de Lévy (dépendant du temps t) de ce processus; $K(X_{T-},y,X_T;.)$ est la loi de Y_T lorsque $Y_{T-} = y$, quand T est un "temps de discontinuité fixe" de ce processus (et un temps d'arrêt pour X).

Ce résultat s'applique en particulier aux processus à accroissements semi-markoviens [5], c'est-à-dire aux PSD sur $E_1\times\mathbb{R}^n$ tels que $Q_t(x,0;.,.) = Q_t(x,y;.,y+.)$. Ils permettent de montrer très simplement les résultats obtenus par ÇINLAR [3].

NOTATIONS.- D'une manière générale, on utilise les notations de BLUMENTHAL et GETOOR [2]. E_1 et E_2 sont deux espaces localement compacts de type dénombrable, et $E_3 = E_1\times E_2$. Pour i = 1,2,3, on adjoint à E_i un point à l'infini Δ_i (un point isolé si E_i est compact). $\mathcal{E}_i$ désigne la tribu des boréliens de E_i; $C(E_i)$ désigne l'espace des fonctions continues sur E_i, limitées à l'infini.

$(A,\mathcal{A})$ étant un espace mesurable quelconque, on note $b\mathcal{A}$ (resp $\mathcal{A}^+$) l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur $(A,\mathcal{A})$, bornées (resp positives). Si $a\in A$, ε_a est la probabilité sur A concentrée en a; si $B\subset A$, 1_B est la fonction indicatrice de B. $\mathcal{A}^*$ désigne la complétée universelle de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{R}$ la tribu des boréliens de $[0,\infty[$. Pour tout ce qui concerne la "théorie générale des processus" (tribus et projections bien-mesurables et prévisibles, etc...), nous renvoyons à [6] et à DELLACHERIE [4].

I- DEFINITION DES PRODUITS SEMI-DIRECTS

1- Définitions.- Soit $\underset{\sim}{X} = (\Omega,\theta_t,X_t,\underset{\sim}{P}^{x,y})$ un processus de Markov à valeurs dans $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$, de temps de mort ζ. Si $t<\zeta(\omega)$, $\underset{\sim}{X}_t(\omega)$ est constitué des deux composantes $X_t(\omega)\in E_1$ et $Y_t(\omega)\in E_2$; si $t\geq\zeta(\omega)$, on a $\underset{\sim}{X}_t(\omega) = \Delta_3$, et on pose $X_t(\omega) = \Delta_1$ et $Y_t(\omega) = \Delta_2$. Soient les tribus $\mathcal{F}_t^o = \sigma(X_s;\ s\leq t)$, $\mathcal{F}^o = \mathcal{F}_\infty^o$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t^o = \sigma(\underset{\sim}{X}_s;\ s\leq t)$ et $\underset{\sim}{\mathcal{F}}^o = \underset{\sim}{\mathcal{F}}_\infty^o$.

DEFINITION.- $\underset{\sim}{X}$ est un produit semi-direct de processus de Markov (en abrégé: PSD) si les restrictions des $\underset{\sim}{P}^{x,y}$ à $\mathcal{F}^o$ sont indépendantes de y.

On note P^x la valeur commune de ces restrictions. Il est immédiat que $X = (\Omega,\theta_t,X_t,P^x)$ est un processus de Markov à valeurs dans $(E_1,\mathcal{E}_1^*)$, de temps de mort ζ, appelé la première composante de $\underset{\sim}{X}$. Les semi-groupes $\mathcal{P} = (P_t)_{t\geq 0}$ de X et $\mathcal{Q} = (Q_t)_{t\geq 0}$ de $\underset{\sim}{X}$ vérifient la relation:

$$Q_t(x,y;A\times E_2) = P_t(x,A). \tag{1}$$

PROPOSITION 1.- Le processus de Markov $\underset{\sim}{X}$ est un PSD si et seulement si pour tous $t\geq 0$, $x\in E_1$, les mesures $Q_t(x,y;.,E_2)$ ne dépendent pas de y.

Démonstration.- La nécessité de la condition découle de (1). Réciproquement supposons la condition de l'énoncé vérifiée. La formule (1) définit sans ambiguité une transition P_t sur E_1. Si $t_1<\ldots<t_n$, $f_i\in b\mathcal{E}_1$, on a:

$$\underset{\sim}{E}^{x,y}\{\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\} = \int Q_{t_1}(x,y;dx_1,dy_1)\ldots Q_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1};dx_n,dy_n)\prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

$$= \int P_{t_1}(x,dx_1)\dots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n) \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i),$$

ce qui prouve bien que les restrictions des $\underset{\sim}{P}^{x,y}$ à $\mathcal{F}^o$ ne dépendent pas de y. ■

Comme d'habitude, $\mathcal{F}$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$) est la complétée de $\mathcal{F}^o$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{F}}^o$) par rapport à la famille (P^μ; μ probabilité sur E_1) (resp ($\underset{\sim}{P}^{\underset{\sim}{\mu}}$; $\underset{\sim}{\mu}$ probabilité sur E_3)); $\mathcal{F}_t$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t$) est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t^o$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t^o$) et les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$). Les rapports entre ces diverses tribus sont fixés dans la proposition suivante:

PROPOSITION 2.- $\mathcal{F}$ <u>est la complétée de</u> $\mathcal{F}^o$ <u>par rapport à la famille</u> ($\underset{\sim}{P}^{\underset{\sim}{\mu}}$; $\underset{\sim}{\mu}$ probabilité sur E_3), <u>et</u> $\mathcal{F}_t = \underset{\sim}{\mathcal{F}}_t \cap \mathcal{F}$. <u>Si</u> $\underset{\sim}{Z} \in b\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t$ <u>(resp</u> $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t^+$<u>), on a pour toute probabilité</u> $\underset{\sim}{\mu}$ <u>sur</u> E_3:

(2) $$\underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}_t\} = \underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}\}.$$

<u>Démonstration</u>.- Soit $\mathcal{F}'$ la complétée de $\mathcal{F}^o$ par rapport à la famille ($\underset{\sim}{P}^{\underset{\sim}{\mu}}$). Pour toute probabilité μ sur E_1, P^μ est la restriction à $\mathcal{F}^o$ d'une probabilité $\underset{\sim}{P}^{\underset{\sim}{\mu}}$ (fixer y et prendre $\underset{\sim}{\mu}(A\times B) = \mu(A)1_B(y)$), donc $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$. Inversement soit $\underset{\sim}{\mu}$ une probabilité sur E_3, et μ la probabilité sur E_1 définie par $\mu(A) = \underset{\sim}{\mu}(A\times E_2)$. Si $A\in\mathcal{F}$, il existe $A',A''\in\mathcal{F}^o$ tels que $A'\subset A\subset A''$ et $P^\mu\{A''-A'\} = 0$. Mais $P^\mu\{A''-A'\} = \underset{\sim}{P}^{\underset{\sim}{\mu}}\{A''-A'\} = 0$, et on en déduit que $A\in\mathcal{F}'$. Donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Soit une probabilité $\underset{\sim}{\mu}$ sur E_3. Si $\underset{\sim}{Z}\in b\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t^o$, $Z_1\in b\mathcal{F}_t^o$, $Z_2\in b\mathcal{F}^o$, on a:

$$\underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{Z_1 Z_2\circ\theta_t \underset{\sim}{Z}\} = \underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{Z_1 \underset{\sim}{Z}\underset{\sim}{E}^{X_t,Y_t}\{Z_2\}\} = \underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{Z_1 E^{X_t}\{Z_2\}\underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}_t^o\}\} = \underset{\sim}{E}^{\mu}\{Z_1 Z_2\circ\theta_t \underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}_t^o\}\}.$$

Comme $\mathcal{F}^o$ est engendrée par les variables $Z_1 Z_2\circ\theta_t$, on a $\underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}^o\} = \underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}_t^o\}$. On en déduit immédiatement qu'on a (2) pour tout $\underset{\sim}{Z}\in b\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t$, et une démonstration analogue montre qu'on a également (2) pour tout $\underset{\sim}{Z}\in\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t^+$.

Enfin $\mathcal{F}_t^o\subset\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t^o\cap\mathcal{F}^o$, donc d'après la première partie de la démonstration, on a $\mathcal{F}_t\subset\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t\cap\mathcal{F}$. Inversement si $Z\in b(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t\cap\mathcal{F})$, d'après (2) on a $\underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{\mu}}\{Z|\mathcal{F}_t\} = Z$ pour toute probabilité $\underset{\sim}{\mu}$ sur E_3, donc $Z\in b\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t = \underset{\sim}{\mathcal{F}}_t\cap\mathcal{F}$. ■

Tout ce qui précède est valable sans aucune condition de régularité sur $\underset{\sim}{X}$. A partir de maintenant nous supposerons au contraire que $\underset{\sim}{X}$ <u>est un processus droit</u>: cela signifie que $\underset{\sim}{X}$ est normal, fortement markovien, à trajectoires continues à droite, et que les fonctions λ-excessives ($\lambda\geq 0$) pour $\underset{\sim}{Q}$ sont presque-boréliennes. Il est très facile de vérifier que la première composante X est également un processus droit. Ces hypothèses ne seront pas répétées dans la suite.

Pour simplifier l'écriture, nous noterons $\mathcal{T}$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$) la famille des temps d'arrêt relatifs à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq o}$ (resp $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t\geq o}$).

<u>2- Projection de processus sur $\mathcal{F}$.</u>- Cette section est consacrée à des résultats à caractère techniques. Voici d'abord trois lemmes, démontrés dans [6]:

LEMME 1.- <u>Si</u> $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ <u>et si</u> $Z\in b(\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{E}_2)^*$, $Z(.,y)$ <u>est</u> $\mathcal{F}_T$<u>-mesurable pour tout</u> y.

LEMME 2.- <u>Si</u> $f\in b(\mathcal{E}_3\otimes\mathcal{F}_t)^*$ <u>et si</u> $s\leq t$, <u>la fonction</u> $f(X_s(\omega),y,\omega)$ <u>est</u> $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$<u>-mesurable en</u> (ω,y).

LEMME 3.- <u>Soient</u> $T\in\mathcal{T}$ <u>et</u> r <u>un noyau de</u> $(\Omega\times E_2,(\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{E}_2)^*)$ <u>dans</u> $(E_2,\mathcal{E}_2^*)$. <u>Si</u> $Z\in b(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_2)^*$;

$$E^x\{\int r(\omega,y;dy')Z(\theta_T\omega,y')|\mathcal{F}_T\}(.) = \int r(.,y;dy')E^{X_T(.)}\{Z(\omega,y')\}.$$

Précisons d'autre part que deux processus $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$-mesurables $(\underset{\sim}{Z}_t)$ et $(\underset{\sim}{Z}'_t)$ (resp $\mathcal{F}$-mesurables (Z_t) et (Z'_t)) sont <u>indistinguables</u> si pour toute probabilité $\underset{\sim}{\mu}$ sur E_3 (resp μ sur E_1), $\underset{\sim}{P}^{\underset{\sim}{\mu}}\{\exists t;\ \underset{\sim}{Z}_t \neq \underset{\sim}{Z}'_t\} = 0$ (resp $P^\mu\{\exists t;\ Z_t \neq Z'_t\} = 0$). Un processus $(\underset{\sim}{Z}_t)$ est dit <u>croissant</u> si chaque trajectoire est croissante, continue à droite, et si $\underset{\sim}{Z}_o = 0$.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> $(\underset{\sim}{Z}_t)$ <u>un processus</u> $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$<u>-bien-mesurable, borné ou croissant. Pour tout</u> $y\in E_2$ <u>il existe un processus</u> (Z^y_t), <u>unique à l'indistinction près</u>, $(\mathcal{F}_t)$<u>-bien-mesurable, tel que pour tout</u> $T\in\mathcal{T}$, $Z^y_T(\omega)$ <u>soit</u> $(\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{E}_2)^*$<u>-mesurable en</u> (ω,y) <u>et vérifie pour tout</u> x:

$$Z^y_T = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}_T|\mathcal{F}_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}_T|\mathcal{F}\}. \tag{3}$$

<u>De plus</u>: (i) <u>Si</u> $(\underset{\sim}{Z}_t)$ <u>est ps continu à droite et limité à gauche (resp croissant, resp continu), on peut choisir les</u> (Z^y_t) <u>à trajectoires continues à droite et limitées à gauche (resp croissantes, resp continues)</u>.

(ii)- <u>Si</u> $(\underset{\sim}{Z}_t)$ <u>est ps continu à droite, chaque processus</u> (Z^y_t) <u>est ps continu à droite</u>.

(iii)- <u>Si</u> $(\underset{\sim}{Z}_t)$ <u>est</u> $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$<u>-prévisible, chaque</u> (Z^y_t) <u>est</u> $(\mathcal{F}_t)$<u>-prévisible</u>.

D'après le lemme 1, Z^y_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc la formule (3) a un sens. Soit $\underset{\sim}{Z}$ une variable $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_T$-mesurable, bornée ou positive. Appliquant le résultat précédent au processus $\underset{\sim}{Z}_s=\underset{\sim}{Z}1_{T\leqslant s}$, on voit qu'il existe une fonction $Z^y(\omega)$ sur $(\Omega\times E_2)$, $(\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable, telle que

$$Z^y = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}|\mathcal{F}\}.$$

La variable Z^y s'appelle la y-<u>projection de $\underset{\sim}{Z}$ sur</u> $\mathcal{F}$. De même en revenant à l'énoncé de la proposition, le processus (Z^y_t) s'appelle la y-<u>projection</u> (sous-entendu: bien-mesurable) <u>du processus</u> $(\underset{\sim}{Z}_t)$ <u>sur</u> $\mathcal{F}$.

<u>Démonstration</u>.- L'unicité n'est autre que l'unicité de la projection bien-mesurable d'un processus. Quant à l'existence, il suffit d'après un argument de classe monotone de la prouver pour tout processus adapté à $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$, continu à droite et limité à gauche (car la tribu des bien-mesurables est engendrée par ces processus). Soit $(\underset{\sim}{Z}_t)$ un tel processus, et $(A^{x,y}_t)$ une version de sa projection bien-mesurable, relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et à la probabilité $\underset{\sim}{P}^{x,y}$. Par définition on a pour tout $T\in\mathcal{C}$, $A^{x,y}_T = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}_T|\mathcal{F}_T\}$, et d'après MERTENS ([8], p.60), $(A^{x,y}_t)$ est $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-ps continu à droite et limité à gauche.

Pour tout $Z\in b\mathcal{F}^o_t$, $\underset{\sim}{E}^{x,y}\{ZA^{x,y}_t\} = E^{x,y}\{Z\underset{\sim}{Z}_t\}$ est $\mathcal{E}^*_3$-mesurable. $\mathcal{F}^o_t$ étant séparable, il existe une variable $B^{x,y}_t(\omega)$, $\mathcal{F}^o_t\otimes\mathcal{E}^*_3$-mesurable en (ω,x,y), telle que $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{A^{x,y}_t \neq B^{x,y}_t\} = 0$. Soient $C_s = \{(\omega,x,y);\ B^{x,y}_{\cdot}(\omega)$ est limité à droite et à gauche le long de $\mathbb{Q}\bigcap[0,s]\}$ et $C^{x,y}_s$ la section de C_s en (x,y). On pose:

$$Z^y_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s\downarrow t,s\in\mathbb{Q}} B^{X_o(\omega),y}_s(\omega) & \text{si } (\omega,X_o(\omega),y)\in\lim\limits_{s\downarrow t} C_s \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme $C_s\in\mathcal{F}^o_s\otimes\mathcal{E}^*_3$ et comme $\mathcal{F}^o_{t+}\subset\mathcal{F}_t$, il est clair que $Z^y_t(\omega)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y) (cf lemme 2). Par construction, $Z^y_{\cdot}(\omega)$ est continu à droite et limité à gauche pour tous $\omega\in\Omega$, $y\in E_2$: on en déduit que si $T\in\mathcal{C}$, $Z^y_T(\omega)$ est $(\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable. La régularité de $(A^{x,y}_t)$ entraine que $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{C^{x,y}_t\} = 1$, donc $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Z^y_t \neq A^{x,y}_t\} = 0$ et à cause de la continuité à droite, les processus (Z^y_t) et $(A^{x,y}_t)$ sont P^x-indistinguables: par suite (Z^y_t) vérifie la première partie de (3) pour tout $T\in\mathcal{C}$. Enfin la seconde partie de (3) découle de (2), valable également lorsqu'on remplace t par $T\in\mathcal{C}$ (même démonstration, utilisant la propriété forte de Markov pour $\underset{\sim}{X}$). Par suite le processus (Z^y_t) répond à la question.

On a déjà montré le début de (i). Si $(\underset{\sim}{Z}_t)$ est ps croissant, on définit C_s par $C_s = \{(\omega,x,y);\ B^{x,y}_{\cdot}(\omega)$ est croissant le long de $\mathbb{Q}\bigcap[0,s]\}$, ce qui conduit à des processus (Z^y_t) croissants. Supposons maintenant $(\underset{\sim}{Z}_t)$ ps continu, et fixons y. D'après ce qui précède, (Z^y_t) est continu à droite et limité à gauche, et on considère un temps de discontinuité T de (Z^y_t) $(T\in\mathcal{C}$, $T>0)$. On pose $S_n = h/2^n$ si $T\in$

$]h/2^n,(h+1)/2^n]$, $S_n = n$ si $T = \infty$. On a $Z^y_{T-} = \lim\limits_{(n)} Z^y_{S_n}$, $\underset{\sim}{Z}_{T-} = \underset{\sim}{Z}_T = \lim\limits_{(n)} \underset{\sim}{Z}_{S_n}$ ps. Mais S_n est $\mathcal{F}_T$-mesurable et ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs, donc d'après (3) on a: $Z^y_{S_n} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}_{S_n}|\mathcal{F}_T\}$. En passant à la limite dans cette égalité, ce qui est possible car la suite $(\underset{\sim}{Z}_{S_n})$ est bornée ou croissante, on obtient:

$$Z^y_{T-} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}_T|\mathcal{F}_T\} = Z^y_T \qquad \underset{\sim}{P}^{x,y}\text{-ps.}$$

Donc le processus (Z^y_t) est ps continu. Si $T^y(\omega) = \inf(t;\ Z^y_{t-}(\omega) \neq Z^y_t(\omega))$, il est clair que $\{(\omega,y);\ T^y(\omega)<t\}\in(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$. Posons:

$$Z'^y_t(\omega) = \begin{cases} Z^y_t(\omega) & \text{si } t<T^y(\omega) \\ Z^y_{T^y-}(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les processus (Z'^y_t) vérifient les conditions requises de mesurabilité et toutes leurs trajectoires sont continues. Enfin $P^x\{T^y<\infty\} = 0$, donc les processus (Z^y_t) et (Z'^y_t) sont indistinguables et (Z'^y_t) vérifie (3).

La démonstration de (i) est achevée. (ii) découle de [8]. (iii) découle de (i) et d'un argument de classe monotone, car la tribu des prévisibles est engendrée par les processus adaptés, continus et bornés. ∎

On a montré en passant le corollaire suivant:

COROLLAIRE.- <u>Soit $(\underset{\sim}{Z}_t)$ un processus continu à droite et limité à gauche, borné ou croissant. Pour tout</u> $T\in\mathcal{T}$ <u>on a alors</u>:

(4) $$\Delta Z^y_T = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\Delta\underset{\sim}{Z}_T|\mathcal{F}_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\Delta\underset{\sim}{Z}_T|\mathcal{F}\}.$$

II- LA SECONDE COMPOSANTE D'UN PRODUIT SEMI-DIRECT

1- Rappels: les noyaux multiplicatifs d'un processus de Markov [6].

DEFINITION.- <u>Une famille</u> $q = (q_{t,\omega}(y,.);\ t\geq 0,\ \omega\in\Omega,\ y\in E_2)$ <u>de mesures positives sur</u> E_2 <u>s'appelle un noyau multiplicatif (NM) de</u> X <u>si</u>:

<u>N-1</u>. Pour tous $t\geq 0$, $A\in\mathcal{E}_2$, $q_{t,\omega}(y,A)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable.

N-2. Pour tous $s,t\geq 0$, $y\in E_2$ et tout ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de s,t et y), on a:

$$q_{t+s,\omega}(y,.) = \int q_{t,\omega}(y,dy')q_{s,\theta_t(\omega)}(y',.). \tag{5}$$

N-3. Pour tous $t\geq 0$, $y\in E_2$, on a $q_{t,\omega}(y,E_2) = 1_{t<\zeta(\omega)}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on écrit q_t au lieu de $q_{t,\omega}$. Deux NM q et r sont *équivalents* si $P^x\{q_t(y,.)\neq r_t(y,.)\} = 0$ pour tout $(x,y)\in E_3$, $t\geq 0$. Un NM q est *continu à droite et limité à gauche* (resp *ps-continu à droite*) si pour tous $f\in C(E_2)$ $y\in E_2$, la fonction $q_{t,\omega}(y,f)$ possède ces propriétés pour tout ω (resp pour presque tout ω). Un NM q est *fort* si dans N-1 et N-2 on peut rempacer t par un temps d'arrêt quelconque $T\in\mathcal{T}$. Enfin la formule

$$Q_t(x,y;A\times B) = E^x\{1_A(X_t)q_t(y,B)\}$$

définit un semi-groupe $\mathcal{Q}$ sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$, appelé *le semi-groupe engendré par* q.

2- *La seconde composante d'un PSD*.- Rappelons que $\underset{\sim}{X}$ est un PSD "droit", de semi-groupe $\mathcal{Q}$, de première composante X.

THEOREME 1.- *Il existe un NM q de X, unique à une équivalence près, ps-continu à droite, fort, engendrant $\mathcal{Q}$, tel que pour tous $(x,y)\in E_3$, $f\in b\mathcal{E}_2$, $T\in\mathcal{T}$, on ait:*

$$q_T(y,f) = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{f(Y_T)|\mathcal{F}_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{f(Y_T)|\mathcal{F}\}. \tag{6}$$

Si de plus les trajectoires de (Y_t) sont ps limitées à gauche, on peut choisir pour q un NM continu à droite et limité à gauche.

Démonstration.- $\mathcal{Q}$ vérifie (1), donc le théorème 1 de [6] entraine l'existence d'un NM q de X, unique à une équivalence près, engendrant $\mathcal{Q}$. Par ailleurs il est clair que $\mathcal{Q}$ est un semi-groupe mesurable (i.e.: si $f\in b\mathcal{E}_3^*$, $Q_tf(x,y)$ est $\mathcal{R}\otimes\mathcal{E}_3^*$-mesurable en (t,x,y)), et si $T_n\in\mathcal{T}$ décroit vers T et $f\in C(E_2)$, on a $\lim_{(n)} Q_{T_n} 1\otimes f = Q_T 1\otimes f$ (continuité à droite de (Y_t)): d'après la proposition 6 de [6], on peut choisir pour q un NM ps-continu à droite. Si de plus (Y_t) est ps limité à gauche, pour tout $f\in C(E_2)$ et toute suite $T_n\in\mathcal{T}$ croissant vers T, $Q_{T_n} 1\otimes f$ converge vers une limite: on peut alors choisir pour q un NM continu à droite et limité à gauche. Enfin d'après la remarque qui suit la proposition 12 de [6], ce NM est fort.

Montrons maintenant que q vérifie (6) lorsque $T = t$. Compte tenu de (2), il suffit de prouver que si $t_1<\ldots<t_n$, $f_i\in b\mathcal{E}_1$, on a:

$$(7)\qquad \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})f(Y_{t_n})\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})q_{t_n}(y,f)\}.$$

Pour n = 1, cette formule exprime simplement que q engendre $\mathcal{Q}$. Supposons (7) vérifiée pour n-1 et tous $t_1<\ldots<t_{n-1}$, $f_i\in b\mathcal{E}_1$. D'après le lemme 3, on a:

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{E}^{x,y}\{\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})f(Y_{t_n})\} &= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i})\underset{\sim}{E}^{X_{t_{n-1}},Y_{t_{n-1}}}\{f_n(X_{t_n-t_{n-1}})f(Y_{t_n-t_{n-1}})\}\}\\
&= E^x\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i})\int q_{t_{n-1}}(y,dy')E^{X_{t_{n-1}}}\{f_n(X_{t_n-t_{n-1}})q_{t_n-t_{n-1}}(y',f)\}\}\\
&= E^x\{\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})\int q_{t_{n-1}}(y,dy')q_{t_n-t_{n-1},\theta_{t_{n-1}}(.)}(y',f)\}\\
&= E^x\{\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})q_{t_n}(y,f)\},\end{aligned}$$

et (7) est vérifié pour n. Ceci achève la démonstration de (6) pour T = t. Enfin pour $T\in\mathcal{C}$, on montre (6) pour $f\in C(E_2)$ en utilisant la continuité à droite de $f(Y_t)$ et de $q_t(y,f)$, puis pour $f\in b\mathcal{E}_2$ par un argument de classe monotone. ∎

Remarques.- 1) Si $\mathcal{Q}$ est borélien, on montre qu'on peut choisir un NM q vérifiant en outre: pour tout $A\in\mathcal{E}_2$, $q_{t,\omega}(y,A)$ est $\mathcal{F}_t^o\otimes\mathcal{E}_2$-mesurable en (ω,y). De même si $\mathcal{Q}$ est un semi-groupe sur $(E_3,\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)$, on peut choisir un NM q vérifiant: pour tout $A\in\mathcal{E}_2$, $q_{t,\omega}(y,A)$ est $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2$-mesurable en (ω,y).

2) On peut montrer ce théorème sans utiliser [6]: si $f\in C(E_2)$, on appelle $q_t(y,f)$ une y-projection de $(f(Y_t))$ sur $\mathcal{F}$; on montre alors qu'on peut modifier ces projections de sorte que $f\mapsto q_t(y,f)$ soit la restriction à $C(E_2)$ d'une mesure $q_t(y,.)$ sur E_2, vérifiant les propriétés requises (démonstration dûe à MEYER).

Dans toute la suite, on désignera par q le NM de X ayant les propriétés ci-dessus. En utilisant (6), il est facile de vérifier que si $\underset{\sim}{Z}\in b\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t$, on a:

$$(8)\qquad \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}f(Y_{t+s})|\mathcal{F}\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}q_{s,\theta_t(.)}(Y_t,f)|\mathcal{F}\},$$

formule qui a une signification intuitive claire: conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}$, le processus (Y_t) est markovien non homogène, et admet la famille $(q_{s,\theta_t(\omega)})_{s,t\geq o}$ pour probabilités de transition.

Bien entendu cette famille n'est pas en général un "semi-groupe non homogène", puisque (5) n'est vérifié que ps. D'autre part le terme "processus de Markov non homogène" doit être pris en un sens faible, car il n'existe pas en général de probabilités conditionnelles régulières par rapport à $\mathcal{F}$, ce qui ne permet pas de donner au terme précédent sa signification habituelle.

Cependant dans [6], nous avons donné deux conditions suffisantes, permettant de construire un système $(P^y_{t,\omega})$ de probabilités sur Ω, tel que: a) $P^y_{o,\omega}$ est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à $\mathcal{F}$ pour chaque $(\underset{\sim}{P}^{x,y};\ x\in E_1)$; b) $P^y_{o,\theta_t(\omega)} = P^y_{t,\omega}$ P^x-ps en ω; c) pour chaque ω, le processus $(\Omega, Y_t, P^y_{t,\omega})$ est un processus de Markov non homogène au sens de Dynkin (dans [6], ces probabilités sont construites sur l'espace canonique $\Omega' = E_2^{[0,\infty[}$; on se ramène à la situation présente par une méthode classique, utilisant les images réciproques de probabilité par rapport à l'application canonique de Ω dans Ω'. Nous n'écrivons pas le détail ici). L'une de ces deux conditions s'énonce ainsi: le NM q est <u>parfait</u>, ce qui signifie que l'ensemble exceptionnel de N-2 est indépendant de s,t et y.

III- FONCTIONNELLES ADDITIVES D'UN PRODUIT SEMI-DIRECT

Rappelons d'abord [6] qu'une famille $((A^y_t);\ y\in E_2)$ de processus croissants (constants pour $t\geq\zeta$) sur Ω est une <u>fonctionnelle additive</u> (FA) de (X,q) si

(i)- $A^y_t(\omega)$ est $(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{E}_2)^*$-mesurable en (ω,y);

(ii)- pour tous $s,t\geq 0$, $y\in E_2$ et ω n'appartenant pas à un ensemble négligeable (dépendant de s,t et y), on a:

$$A^y_{t+s}(\omega) = A^y_t(\omega) + \int q_{t,\omega}(y,dy')A^{y'}_s\circ\theta_t(\omega). \tag{9}$$

A cause de la continuité à droite, l'ensemble exceptionnel de (ii) ne dépend pas en réalité de s. Deux FA A et B sont <u>équivalentes</u> si $P^x\{A^y_t \neq B^y_t\} = 0$ pour tous $t\geq 0$, $(x,y)\in E_3$. Une FA A est <u>prévisible</u> (resp <u>continue</u>) si pout tout y, le processus (A^y_t) est prévisible (resp continu). Enfin une FA est <u>forte</u> si dans (ii), on peut remplacer t par un temps d'arrêt quelconque $T\in\mathcal{C}$ (à cause de la continuité à droite, on peut toujours remplacer t par $T\in\mathcal{C}$ dans (i)).

THEOREME 2.- <u>Soit $\underset{\sim}{A}$ une FA de $\underset{\sim}{X}$. Il existe une FA forte de</u> (X,q), <u>unique à l'équivalence près, vérifiant pour tout</u> $T\in\mathcal{C}$:

$$A^y_T = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_T|\mathcal{F}_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_T|\mathcal{F}\}: \tag{10}$$

<u>si de plus $\underset{\sim}{A}$ est prévisible (resp continue)</u>, A <u>est prévisible (resp on peut choisir</u> A <u>continue</u>).

<u>Démonstration</u>.- Pour chaque y, on prend pour (A_t^y) la y-projection de $(\underset{\sim}{A}_t)$ sur $\mathcal{F}$. (10) est la transcription de (3). Si $\underset{\sim}{A}$ est prévisible (resp continue), on sait d'après la proposition 3 que chaque (A_t^y) est prévisible (resp peut être choisi continu). Il nous reste à prouver que la famille $A = ((A_t^y);\ y\in E_2)$ est une FA forte de (X,q).

Par construction, A vérifie la condition (i). Chaque processus (A_t^y) est croissant et continu à droite, et on a

$$A^y_{\zeta+t} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_{\zeta+t}|\mathcal{F}\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_{\zeta}|\mathcal{F}\} = A^y_\zeta,$$

ce qui montre que (A_t^y) est constant pour $t\geq\zeta$. Enfin si $T\in\mathcal{T}$, $Z_1\in\mathcal{F}_T^+$, $Z_2\in\mathcal{F}^+$, on a:

$$E^x\{A^y_{T+s}Z_1Z_2\circ\theta_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_{T+s}Z_1Z_2\circ\theta_T\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{(\underset{\sim}{A}_T + \underset{\sim}{A}_s\circ\theta_T)Z_1Z_2\circ\theta_T\}$$

$$= E^x\{A^y_T Z_1Z_2\circ\theta_T\} + E^x\{Z_1\int q_T(y,dy')E^{X_T}\{A^{y'}_s Z_2\}\}$$

$$= E^x\{(A^y_T + \int q_T(y,dy')A^{y'}_s\circ\theta_T)Z_1Z_2\circ\theta_T\},$$

en utilisant le lemme 3 pour obtenir la dernière égalité. Par suite (9) est ps vérifiée, et A est une FA forte de (X,q). ∎

Le λ-potentiel de la FA $\underset{\sim}{A}$ de $\underset{\sim}{X}$ est le noyau $U^\lambda_{\underset{\sim}{A}}$ sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ défini par

$$U^\lambda_{\underset{\sim}{A}}(x,y;f) = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int e^{-\lambda t}f(X_t,Y_t)d\underset{\sim}{A}_t\}.$$

On écrit $u^\lambda_{\underset{\sim}{A}}$ au lieu de $U^\lambda_{\underset{\sim}{A}}1$. De même le λ-potentiel de la FA A de (X,q) est la mesure de transition U^λ_A de $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ sur $(E_1,\mathcal{E}_1^*)$ définie par:

$$U^\lambda_A(x,y;f) = E^x\{\int e^{-\lambda t}f(X_t)dA^y_t\},$$

et on écrit u^λ_A au lieu de $U^\lambda_A 1$. Enfin si $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$, le noyau Q^λ_T sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ est défini par

$$Q^\lambda_T(x,y;f) = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{e^{-\lambda T}f(X_T,Y_T)\}.$$

PROPOSITION 5.- <u>Sous les hypothèses du théorème 2, on a</u> $u^\lambda_A = u^\lambda_{\underset{\sim}{A}}$; <u>Si</u> u^λ_A <u>est fini, pour tout</u> $f\in(\mathcal{E}_1)^+$ <u>on a:</u>

(11) $$U^\lambda_{\underset{\sim}{A}}(x,y;f,1) = U^\lambda_A(x,y;f).$$

Démonstration.- On peut écrire:

$$u^\lambda_{\underset{\sim}{A}}(x,y) = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\lim_{(n)}\uparrow \sum_{h=o}^{\infty} \exp(-\lambda\frac{h+1}{2^n})(\underset{\sim}{A}_{\frac{h+1}{2^n}} - \underset{\sim}{A}_{\frac{h}{2^n}})\},$$

et une égalité analogue pour u^λ_A. L'égalité $u^\lambda_{\underset{\sim}{A}} = u^\lambda_A$ découle alors de ce que $\underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{A}_t\} = E^x\{A^y_t\}$.

Supposons que u^λ_A soit fini. Pour terminer, il suffit de montrer (11) pour tout $f\in C(E_1)$. La fonction g_n définie par $g_n(t) = f(X_{(h+1)/2^n})\exp(-\lambda\frac{h+1}{2^n})$ lorsque $t\in [h/2^n,(h+1)/2^n[$, tend vers $g(t) = f(X_t)e^{-\lambda t}$ lorsque $n\uparrow\infty$, et est majorée par $\|f\|e^{-\lambda t}$. Cette dernière fonction étant ps intégrable par rapport aux processus croissants $(\underset{\sim}{A}_t)$ et (A^y_t), on a ps:

$$\underset{\sim}{Z}_n = \sum_{h=o}^{\infty} \exp(-\lambda\frac{h+1}{2^n})f(X_{\frac{h+1}{2^n}})(\underset{\sim}{A}_{\frac{h+1}{2^n}} - \underset{\sim}{A}_{\frac{h}{2^n}}) \longrightarrow \int e^{-\lambda t}f(X_t)d\underset{\sim}{A}_t,$$

$$Z^y_n = \sum_{h=o}^{\infty} \exp(-\lambda\frac{h+1}{2^n})f(X_{\frac{h+1}{2^n}})(A^y_{\frac{h+1}{2^n}} - A^y_{\frac{h}{2^n}}) \longrightarrow \int e^{-\lambda t}f(X_t)dA^y_t.$$

Mais $\underset{\sim}{Z}_n$ (resp Z^y_n) est majoré par $\|f\|\int e^{-\lambda t}d\underset{\sim}{A}_t$ (resp $\|f\|\int e^{-\lambda t}dA^y_t$), qui est $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-intégrable. Comme $\underset{\sim}{E}^{x,y}\{\underset{\sim}{Z}_n\} = E^x\{Z^y_n\}$ d'après (10), le résultat découle de l'application du théorème de Lebesgue. ∎

Rappelons d'autre part la définition suivante [6]:

DEFINITION.- Une fonction f sur E_3 est un λ-potentiel (resp λ-potentiel régulier) pour (X,Q) si elle est finie, (λ,Q)-excessive, et si pour toute suite (T_n) d'éléments de $\mathscr{C}$ croissant vers +∞ (resp T), $Q^\lambda_{T_n} f$ décroit vers 0 (resp vers $Q^\lambda_T f$).

La définition donnée dans [6] est un peu différente. Cependant, si on se rappelle que toute fonction (λ,Q)-excessive est presque-borélienne (car $\underset{\sim}{X}$ est un processus droit), et par suite est "fortement" excessive, on voit que les deux définitions coïncident.

On sait que le λ-potentiel u^λ_A d'une FA de (X,q), s'il est fini, est un λ-potentiel pour (X,Q), régulier si la FA est continue. Réciproquement on a montré que tout λ-potentiel (resp λ-potentiel régulier) pour (X,Q) est le λ-potentiel d'une FA prévisible (resp continue) de (X,q), unique à une équivalence près.

Remarquons que la définition précédente est exactement la définition des λ-potentiels et λ-potentiels réguliers pour $\underset{\sim}{X}$, à ceci près que les suites (T_n) sont choisies dans $\mathcal{T}$. Il y a donc a-priori plus de λ-potentiels pour $(X,\mathcal{Q})$ que pour $\underset{\sim}{X}$.

IV- CONTINUITE DES PROJECTIONS D'UNE FONCTIONNELLE ADDITIVE

1- Classification des temps d'arrêt de $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$.- Nous allons examiner en premier lieu la continuité de la y-projection d'un processus croissant $(\underset{\sim}{Z}_t)$ adapté à $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t\geq o}$. On peut toujours mettre $(\underset{\sim}{Z}_t)$ sous la forme $\underset{\sim}{Z}_t = \underset{\sim}{U}_t + \sum_{(n)} 1_{T_n \leq t} \Delta \underset{\sim}{Z}_{T_n}$, où $(\underset{\sim}{U}_t)$ est la partie continue de $(\underset{\sim}{Z}_t)$ et (T_n) la suite de ses temps de discontinuité. On sait que les projections de $(\underset{\sim}{U}_t)$ sont continues, et nous sommes amenés à étudier la continuité des projections des processus croissants élémentaires $\underset{\sim}{Z}_t = 1_{T\leq t}$, où $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$. A cet effet, introduisons la classification suivante des temps d'arrêt de $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$:

DEFINITION.- $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ est y-totalement étranger à $\mathcal{T}$ (on écrit $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$) si pour tous $S\in\mathcal{T}$, $x\in E_1$, on a $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{S = T<\infty\}= 0$.
$T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ est y-étranger à $\mathcal{T}$ s'il existe $S\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$ et $x\in E_1$ tels que $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{S = T<\infty\}>0$.
$T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ est y-compris dans $\mathcal{T}$ (on écrit $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_c^y$) si T n'est pas y-étranger à $\mathcal{T}$.

Notre objectif est de montrer que la y-projection de $(\underset{\sim}{Z}_t)$ est continue si et seulement si tous les temps de discontinuité de ce processus sont dans $\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$. Commençons par quelques remarques faciles. Si $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ et si $A\in\underset{\sim}{\mathcal{F}}_T$, on note T^A le temps d'arrêt défini par $T^A = T$ sur A et $T^A = +\infty$ sur A^c.

PROPOSITION 6.- Si $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{T}}_c^y$) et si $A\in\underset{\sim}{\mathcal{F}}_T$, alors $T^A\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$ (resp $\underset{\sim}{\mathcal{T}}_c^y$).

Démonstration.- Supposons d'abord que $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$, et soit $S\in\mathcal{T}$. On a:

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}\{T^A = S<\infty\} = \underset{\sim}{P}^{x,y}\{T = S<\infty, A\} \leq \underset{\sim}{P}^{x,y}\{T = S<\infty\} = 0,$$

donc $T^A\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$. Si maintenant T^A est y-étranger à $\mathcal{T}$, il existe $x\in E_1$ et $S\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$ tels que $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{T^A = S<\infty\}>0$. Mais a-fortiori on a $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{T = S<\infty\}>0$, et T est y-étranger à $\mathcal{T}$. On en déduit que si $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_c^y$, alors $T^A\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_c^y$. ∎

PROPOSITION 7.- Soit $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$. Pour tout $y\in E_2$ il existe une partition $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_T$-mesurable de $\{T<\infty\}$ en deux parties A et A' (dépendant de y) telles que $T^A\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_c^y$ et que $T^{A'}\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}_e^y$.

<u>Pour tout</u> $x\in E_1$, <u>cette partition est</u> $\underset{\sim}{P}^{x,y}$<u>-essentiellement unique</u>.

<u>Démonstration</u>.- Appelons $(\underset{\sim}{Z}_t)$ le processus croissant adapté à $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$, défini par $\underset{\sim}{Z}_t = 1_{T\leq t}$, et (Z^y_t) son y-projection sur $\mathcal{F}$. y étant fixé, on appelle $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des temps de discontinuité de (Z^y_t): chaque S_n est dans $\mathcal{T}$, et les graphes des S_n sont disjoints. On va vérifier que les ensembles $A = \{T=0\}\bigcup(\bigcup_{(n)}\{T=S_n<\infty\})$ et $A' = \{T<\infty\} - A$, qui appartiennent clairement à $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_T$, sont les ensembles cherchés.

Soit $R\in\mathcal{T}$. On pose $B = (\bigcup_{(n)}\{S_n=R<\infty\})^c$ et $S = R^B\in\mathcal{T}$. Par définition de B, $\Delta Z^y_S = 0$ et d'après (4) on a $\Delta\underset{\sim}{Z}_S = 0$ ps, donc $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{S=T<\infty\} = 0$. Mais par définition de A', on a $\{R=T^{A'}<\infty\} = \{S=T<\infty\}$, d'où il résulte que $T^{A'}\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_e$. Supposons maintenant que $R\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_e$ vérifie $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{R=T^A<\infty\}>0$. Par définition de A, $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{R=0\}>0$, ou $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{R=S_n<\infty\}>0$ pour une valeur de n; ceci contredit le fait que R appartient à $\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_e$. Par suite $T^A\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_c$.

Enfin supposons que (B,B') soit un couple vérifiant les mêmes propriétés que (A,A'). Soit $C = B'-A'\bigcap B' = A-A\bigcap B$. D'après la proposition 6, $T^C = (T^{B'})^C\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_c$, et $T^C = (T^A)^C\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_e$. Donc $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{T^C<\infty\} = \underset{\sim}{P}^{x,y}\{C\} = 0$ pour tout x. On montre de même que $B-A\bigcap B$ est $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-négligeable pour tout x, d'où l'unicité. ∎

On a montré en passant le corollaire suivant:

COROLLAIRE.- <u>Pour que</u> $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_c$, <u>il faut et il suffit qu'il existe une suite</u> (S_n) <u>d'éléments de</u> $\mathcal{T}$ <u>à graphes disjoints, telle que pour tout</u> x <u>on ait</u>:

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}\{T<\infty\} = \sum_{(n)} \underset{\sim}{P}^{x,y}\{T = S_n < \infty\}.$$

Soit $(\underset{\sim}{Z}_t)$ un processus croissant adapté à $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$; soient $(\underset{\sim}{U}_t)$ sa partie continue et (T_n) la suite de ses temps de discontinuité. y étant fixé, on appelle T'_n et T''_n les parties y-comprise dans $\mathcal{T}$ et y-totalement étrangère à $\mathcal{T}$ de T_n, et on pose:

$$\underset{\sim}{V}_{t,y} = \sum_{(n)} 1_{T'_n\leq t}\Delta\underset{\sim}{Z}_{T'_n},$$

$$\underset{\sim}{W}_{t,y} = \sum_{(n)} 1_{T''_n\leq t}\Delta\underset{\sim}{Z}_{T''_n}.$$

On a évidemment $\underset{\sim}{Z}_t = \underset{\sim}{U}_t + \underset{\sim}{V}_{t,y} + \underset{\sim}{W}_{t,y}$.

PROPOSITION 8.- <u>Avec les notations précédentes, les</u> y-<u>projections de</u> $(\underset{\sim}{U}_t)$ <u>et</u> $(\underset{\sim}{W}_{t,y})$ <u>sont continues; la</u> y-<u>projection de</u> $(\underset{\sim}{V}_{t,y})$ <u>est purement discontinue</u>.

Démonstration.- On a déjà vu l'assertion concernant $(\underset{\sim}{U}_t)$. Notons $(V^y_{t,y})$ et $(W^y_{t,y})$ les y-projections de $(\underset{\sim}{V}_{t,y})$ et $(\underset{\sim}{W}_{t,y})$. Soit $S\in\mathcal{T}$. Comme chaque T''_n appartient à $\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_e$, pour tout x on a $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\Delta\underset{\sim}{W}_{S,y}>0,\ S<\infty\} = \sum_{(n)} \underset{\sim}{P}^{x,y}\{S = T''_n<\infty\} = 0$. D'après (4) il vient $P^x\{\Delta W^y_{S,y}>0,\ S<\infty\} = 0$, et $(W^y_{t,y})$ n'admet pas de temps de discontinuité. D'autre part chaque T'_n appartient à $\underset{\sim}{\mathcal{T}}^y_c$, donc d'après le corollaire précédent il existe une suite (S_p) d'éléments de $\mathcal{T}$, de graphes disjoints, telle que pour tous $x\in E_1$, $n\geq 1$, on ait:

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}\{T'_n<\infty\} = \sum_{(p)} \underset{\sim}{P}^{x,y}\{T'_n = S_p<\infty\}.$$

Par suite si $\underset{\sim}{V}_p = \Delta\underset{\sim}{Z}_{S_p}$, on a

$$\underset{\sim}{V}_{t,y} = \sum_{(p)} 1_{S_p\leq t}\underset{\sim}{V}_p.$$

Si V^y_p est la y-projection de $\underset{\sim}{V}_p$, il vient alors:

$$V^y_{t,y} = \sum_{(p)} 1_{S_p\leq t}V^y_p, \qquad P^x\text{-ps}$$

pour tout x, ce qui montre que $(V^y_{t,y})$ est purement discontinu. ∎

COROLLAIRE.- Soit $(\underset{\sim}{Z}_t)$ un processus croissant adapté à $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t\geq o}$.

(i)- Pour que sa y-projection soit continue, il faut et il suffit que ses temps de discontinuité soient y-totalement étrangers à $\mathcal{T}$.

(ii)- Pour que sa y-projection soit purement discontinue, il faut et il suffit qu'il soit purement discontinu et que ses temps de discontinuité soient y-compris dans $\mathcal{T}$.

On peut appliquer ce résultat lorsque $(\underset{\sim}{Z}_t)$ est une FA de $\underset{\sim}{X}$. Il faut prendre garde toutefois que si $(\underset{\sim}{U}_t)$ est une FA, il n'en est pas de même des processus $(\underset{\sim}{V}_{t,y})$ et $(\underset{\sim}{W}_{t,y})$, qui de plus dépendent de y. En vue d'une étude plus fine de la projection des FA de $\underset{\sim}{X}$, il faut distinguer les FA quasi-continues à gauche des FA prévisibles. Auparavant nous allons compléter les résultats de cette section, et les étendre aux ensembles bien-mesurables à coupes dénombrables.

2-Application aux ensembles bien-mesurables.- Si T est un temps d'arrêt, on note $[T]$ son graphe, et π désigne la projection de $[0,\infty[\times\Omega$ sur Ω.

PROPOSITION 9.- Soient $y\in E_2$ et $\underset{\sim}{\Gamma}$ un ensemble $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$-bien-mesurable, à coupes dénombrables, il existe un ensemble aléatoire Γ^y, $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurable et à coupes dénombrables, unique à une évanescence près, tel que pour tous $S\in\mathcal{T}$, $x\in E_1$, on ait l'équivalence: $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([S]\cap\underset{\sim}{\Gamma})\} = 0 \iff P^x\{\pi([S]\cap\Gamma^y)\} = 0$.

On dit que Γ^y est la y-projection de $\underset{\sim}{\Gamma}$ sur $\mathcal{F}$ (nous employons la même terminologie que pour les processus, car il n'y a pas de confusion possible).

Démonstration.- On sait [4] que $\underset{\sim}{\Gamma}$ est somme disjointe des graphes d'une suite (T_n) d'éléments de $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$. Soit le processus croissant borné $\underset{\sim}{Z}_t = \sum_{(n)} \frac{1}{2^n} 1_{T_n\leq t}$, et (Z^y_t) son y-projection. On pose $\Gamma^y = \{(t,\omega);\ Z^y_{t-}(\omega) \neq Z^y_t(\omega)\}$. Si $S\in\mathcal{T}$, on a les équivalences suivantes: $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([S]\cap\underset{\sim}{\Gamma})\} = 0 \iff \underset{\sim}{P}^{x,y}\{\Delta\underset{\sim}{Z}_S>0\} = 0 \iff$ $P^x\{\Delta Z^y_S<0\} = 0$ (d'après (4)) $\iff P^x\{\pi([S]\cap\Gamma^y)\} = 0$. Enfin l'unicité est évidente.∎

Remarques.- 1) Si $\underset{\sim}{\Gamma} = \sum_{(n)}[T_n]$, on appelle T'_n et T''_n les parties y-comprise dans $\mathcal{T}$ et y-totalement étrangère à $\mathcal{T}$ de T_n. Soient $\underset{\sim}{\Gamma}{}^y_c = \sum_{(n)}[T'_n]$ et $\underset{\sim}{\Gamma}{}^y_e = \sum_{(n)}[T''_n]$: on a $\underset{\sim}{\Gamma} = \underset{\sim}{\Gamma}{}^y_c + \underset{\sim}{\Gamma}{}^y_e$, et on vérifie que:

(i)- Si $S\in\mathcal{T}$, $x\in E_1$, on a $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([S]\cap\underset{\sim}{\Gamma}{}^y_e)\} = 0$.

(ii)- Γ^y est le plus petit ensemble $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurable et à coupes dénombrables qui contienne $\underset{\sim}{\Gamma}{}^y_c$. Cette décomposition de $\underset{\sim}{\Gamma}$ est essentiellement unique, et bien-entendu si $\underset{\sim}{\Gamma} = [T]$ on retrouve la décomposition $\underset{\sim}{\Gamma}{}^y_c = [T^A]$ et $\underset{\sim}{\Gamma}{}^y_e = [T^{A'}]$ de la proposition 8.

2) Il y a une autre interprétation de Γ^y: considérons le processus $\underset{\sim}{Z} = 1_{\underset{\sim}{\Gamma}}$ (ce n'est pas un processus croissant), et (Z^y_t) son y-projection. On vérifie aisément à l'aide de (3) que $\Gamma^y = \{(t,\omega);\ Z^y_t(\omega)>0\}$ (à une évanescence près).

3-Fonctionnelles additives quasi-continues à gauche.- On appelle ainsi les FA $\underset{\sim}{A}$ telles que pour toute suite (T_n) de $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ croissant vers T, $\underset{\sim}{A}_{T_n}$ croit ps vers $\underset{\sim}{A}_T$. Pour cela, il faut et il suffit que les temps de saut de $\underset{\sim}{A}$ soient totalement inaccessibles.

Comme $\underset{\sim}{X}$ est un processus droit, on sait [1,9] qu'il existe un ensemble aléatoire $\underset{\sim}{V}$, $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$-bien-mesurable, à coupes dénombrables, unique à une évanescence près, jouissant de la propriété suivante: pour que $T\in\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ soit $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-totalement inaccessible, il faut et il suffit que $[T]\subset\underset{\sim}{V}$ à un ensemble $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-évanescent près; de plus si $(t,\omega)\in\underset{\sim}{V}$, $\underset{\sim}{X}_{t-}(\omega)$ existe, et $\underset{\sim}{X}_{t-}(\omega) \neq \underset{\sim}{X}_t(\omega)$. X étant un processus droit, il existe de même un ensemble aléatoire V jouissant des mêmes propriétés que $\underset{\sim}{V}$, relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)$ et au processus X.

LEMME 4.- Pour tout $y \in E_2$, la y-projection V^y de $\underset{\sim}{V}$ est contenue dans V.

Démonstration.- Supposons que $S \in \mathcal{T}$ vérifie $P^x\{\pi([S] \cap V)\} = 0$. S est accessible pour la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq o}$, donc a-fortiori pour la famille $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t \geq o}$, et on a $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([S] \cap \underset{\sim}{V})\} = 0$. Par suite $P^x\{\pi([S] \cap V^y)\} = 0$ d'après la proposition 9, et on en déduit que $V^y \subset V$ (théorème de section des ensembles bien-mesurables). ∎

Remarques.- 1) Si $\underset{\sim}{X}$ est un processus de Hunt, on sait que $\{(t,\omega);\ \underset{\sim}{X}_{t-}(\omega) \neq \underset{\sim}{X}_t(\omega)\}$ est une version de $\underset{\sim}{V}$; de plus la première composante X est également de Hunt, donc on a aussi $V = \{(t,\omega);\ X_{t-}(\omega) \neq X_t(\omega)\}$. Mais alors si $S \in \mathcal{T}$ vérifie $[S] \cap \underset{\sim}{V} = \emptyset$, on a $\underset{\sim}{X}_{S-} = \underset{\sim}{X}_S$, donc $X_{S-} = X_S$ et $[S] \cap V = \emptyset$. On en déduit que si $\underset{\sim}{X}$ est un processus de Hunt, on a $V^y = V$ pour tout y, et d'autre part $V \subset \underset{\sim}{V}$.

2) Plus généralement on a le même résultat si la famille $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t \geq o}$ est quasi-continue à gauche (en effet si $T \in \mathcal{T}$ est $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$-accessible, donc $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)$-prévisible, la projection (Z^y_t) de $\underset{\sim}{Z}_t = 1_{T \leq t}$ est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible d'après la proposition 3, et on a $Z^y_t = 1_{T \leq t}$; donc T est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible).

THEOREME 3.- Soit $\underset{\sim}{A}$ une FA de $\underset{\sim}{X}$ quasi-continue à gauche. Il existe une décomposition unique (à une équivalence près) $\underset{\sim}{A}_t = \underset{\sim}{B}_t + \underset{\sim}{C}_t$, telle que:

(i)- $\underset{\sim}{B}$ est une FA dont toutes les projections sont continues.

(ii)- $\underset{\sim}{C}$ est une FA dont toutes les projections sont purement discontinues.

Démonstration.- Soient $(\underset{\sim}{U}_t)$ la partie continue de $\underset{\sim}{A}$,

$$\underset{\sim}{C}_t(\omega) = \sum_{s \leq t} 1_V(s,\omega) \Delta \underset{\sim}{A}_s(\omega)$$

$$\underset{\sim}{D}_t(\omega) = \sum_{s \leq t} 1_{\underset{\sim}{V} \cap V^c}(s,\omega) \Delta \underset{\sim}{A}_s(\omega)$$

et $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{D}$. Comme V et $\underset{\sim}{V}$ sont des ensembles aléatoires "homogènes", $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{D}$ et $\underset{\sim}{B}$ sont des FA de $\underset{\sim}{X}$. Comme $\underset{\sim}{A}$ est quasi continue à gauche, ses temps de saut ont leurs graphes contenus dans $\underset{\sim}{V}$, donc $\underset{\sim}{A}$ est équivalente à $\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{C}$; quitte à changer $\underset{\sim}{U}$ (par exemple) sur un ensemble de mesure nulle, ce qui ne change pas ses projections, on peut supposer qu'on a identiquement $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{C}$.

Il existe une suite $S_n \in \mathcal{T}$ de graphes disjoints, telle que $V = \sum_{(n)} [S_n]$. Si $\Delta A^y_{S_n}$ est la y-projection de $\Delta \underset{\sim}{A}_{S_n}$, on a:

$$C^y_t = \sum_{(n)} 1_{T_n \leq t} \Delta A^y_{S_n},$$

qui est purement discontinue. Par ailleurs on sait (proposition 3) que (U^y_t) est continue. Enfin d'après le lemme 4, on a $\Delta \underset{\sim}{D}_S = 0$ pour tout $S \in \mathcal{T}$, donc $\Delta D^y_S = 0$ et (D^y_t) est ps continu. On peut alors modifier les processus (D^y_t) de façon à les rendre continus, de la même manière qu'à la proposition 3.∎

4-Fonctionnelles additives prévisibles.- Pour étudier la continuité des projections d'une FA naturelle, nous utilisons une méthode de théorie du potentiel. Les résultats obtenus sont moins forts que ceux qui précèdent, et ils supposent de plus l'hypothèse (L) (cf. [7]).

Rappelons d'abord que si f et g sont deux fonctions (λ,Q)-excessives, on dit que f majore g au sens de l'ordre fort si f-g est (λ,Q)-excessive. Si $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ sont deux FA prévisibles de λ-potentiels respectifs f et g, $\underset{\sim}{A}$ majore $\underset{\sim}{B}$ (i.e.: $\underset{\sim}{A}_t \geq \underset{\sim}{B}_t$ pour tout t, ce qui équivaut au fait que $\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}$ est une FA) si et seulement si f majore fortement g.

THEOREME 4.- Supposons que $\underset{\sim}{X}$ vérifie l'hypothèse (L), et soit f un λ-potentiel de $\underset{\sim}{X}$. Il existe une décomposition unique $f = f_1 + f_2 + f_3$ telle que:

(i)- f_1 est un λ-potentiel régulier pour $\underset{\sim}{X}$.

(ii)- f_2 est un λ-potentiel régulier pour (X,Q), qui n'est minoré (au sens fort) par aucun λ-potentiel régulier pour $\underset{\sim}{X}$.

(iii)- f_3 est un λ-potentiel pour $\underset{\sim}{X}$, qui n'est minoré (au sens fort) par aucun λ-potentiel régulier pour (X,Q).

Démonstration.- Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des λ-potentiels réguliers pour (X,Q), qui sont fortement majorés par f. D'après l'hypothèse (L), $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure u pour l'ordre fort ([7], p.169), et nous allons montrer que $u \in \mathcal{A}$. D'abord u est fortement majoré par f, donc c'est le λ-potentiel d'une FA prévisible $\underset{\sim}{A}$. Soit T un temps de discontinuité de (A^y_t), et $\Gamma = \{(t+T\circ\theta_t(\omega),\omega);\ t\geq 0\}$: comme $T>0$, Γ est à coupes dénombrables, et il existe une suite $T_n \in \mathcal{T}$, de graphes disjoints, telle que $\Gamma = \sum_{(n)} [T_n]$. Comme Γ est un ensemble aléatoire homogène,

$$\underset{\sim}{B}_t = \sum_{(n)} 1_{T_n \leq t} \Delta \underset{\sim}{A}_{T_n}$$

est une FA (prévisible), ainsi que $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}$. On a:

$$B^y_t = \sum_{(n)} 1_{T_n \leq t} \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\Delta \underset{\sim}{A}_{T_n} | \mathcal{F}\},$$

qui est purement discontinue. Soit v le λ-potentiel de $\underset{\sim}{C}$. Si $g \in \mathcal{A}$, c'est le λ-potentiel d'une FA prévisible $\underset{\sim}{D}$, majorée par $\underset{\sim}{A}$, et dont les projections sont continues:

on en déduit que les projections de $\underset{\sim}{D}$ sont majorées par celles de $\underset{\sim}{C}$, donc g est fortement majorée par v (car f-v est le λ-potentiel de la FA de (X,q) définie par $C_t^y - D_t^y$). Comme u est la borne supérieure de $\mathcal{A}$, u = v et $\underset{\sim}{B} = 0$. Cela implique que $T = +\infty$ ps, donc les projections (A_t^y) de $\underset{\sim}{A}$ sont continues, et $u \in \mathcal{A}$.

La fonction $f_3 = f - u$ satisfait la condition (iii) de l'énoncé, et la décomposition $f = f_3 + u$, où f_3 satisfait (iii) et $u \in \mathcal{A}$ est clairement unique. Enfin on décompose u de manière classique [2] en $u = f_1 + f_2$, où f_1 est régulier pour $\underset{\sim}{X}$, et où f_2 n'est minoré par aucun λ-potentiel régulier pour $\underset{\sim}{X}$. ∎

Le résultat suivant, immédiat, résoud le problème de la continuité des projections d'une FA prévisible de $\underset{\sim}{X}$; comme toute FA est la somme d'une FA prévisible et d'une FA quasi-continue à gauche, on achève ainsi la résolution du problème posé, du moins lorsque la FA est de λ-potentiel fini.

COROLLAIRE.- Supposons que $\underset{\sim}{X}$ vérifie l'hypothèse (L), et soit $\underset{\sim}{A}$ une FA prévisible de $\underset{\sim}{X}$, de λ-potentiel fini. Il existe une décomposition, unique à une équivalence près, $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^1 + \underset{\sim}{A}^2 + \underset{\sim}{A}^3$, telle que:

(i)- $\underset{\sim}{A}^1$ est une FA continue.

(ii)- $\underset{\sim}{A}^2$ est une FA purement discontinue, prévisible, dont les projections sont continues.

(iii)- $\underset{\sim}{A}^3$ est une FA purement discontinue, prévisible, qui n'est minorée par aucune FA prévisible dont les projections soient continues.

Remarque.- Dans cette décomposition, les projections de $\underset{\sim}{A}^3$ ne sont pas forcément purement discontinues. On peut seulement dire qu'il existe $(x,y) \in E_3$ tel que $P^x\{A_t^{3,y}$ n'est pas continu$\} > 0$.

V- SYSTEME DE LEVY D'UN PRODUIT SEMI-DIRECT

1-Forme du système de Lévy.- Nous supposerons dans tout ce paragraphe que $\underset{\sim}{X}$ est un PSD de Hunt. On sait (BENVENISTE, JACOD [1]) qu'il admet un système de Lévy $(\underset{\sim}{N},\underset{\sim}{A})$: on appelle ainsi la donnée d'un noyau positif $\underset{\sim}{N}$ sur $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ (on pourrait rafiner sur les questions de mesurabilité, mais nous ne le ferons pas ici) tel que $\underset{\sim}{N}(x,y;\{x,y\}) = 0$, et d'une FA continue $\underset{\sim}{A}$, le couple $(\underset{\sim}{N},\underset{\sim}{A})$ vérifiant pour toute $f \in (\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3)^+$ nulle sur la diagonale:

(12) $$\underset{\sim}{E}^{x,y}\{\sum_{s\leq t} f(X_{s-},Y_{s-};X_s,Y_s)\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int_0^t d\underset{\sim}{A}_s \int \underset{\sim}{N}(X_s,Y_s;dx',dy')f(X_s,Y_s;x',y')\}.$$

THEOREME 5.- Soit $\underset{\sim}{X}$ un PSD de Hunt. Il existe un système de Lévy $(\underset{\sim}{N},\underset{\sim}{A})$ pour $\underset{\sim}{X}$ (resp (N,A) pour X), une fonction $f\in(\mathcal{E}_3^*)^+$, un noyau positif N_1 de $(E_3,\mathcal{E}_3^*)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2^*)$ et un noyau positif K de $(E_3\times E_1,\mathcal{E}_3^*\otimes\mathcal{E}_1)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2)$, tels que:

(13) $$A_t = \int_0^t f(X_s,Y_s)d\underset{\sim}{A}_s \quad \text{ps}$$

(14) $$\underset{\sim}{N}(x,y;dx',dy') = N_1(x,y;dy')\varepsilon_x(dx') + f(x,y)N(x,dx')K(x,y,x';dy')$$

(15) $$K(x,y,x';E_2) = 1_{x\neq x'}$$

(16) $$N_1(x,y;\{y\}) = 0.$$

Nous verrons dans la section 3 ci-dessous une interprétation des noyaux N_1 et K.

Démonstration.- Si $\underset{\sim}{X}$ est de Hunt, il est très facile de vérifier qu'il en est de même de X. On sait que $\underset{\sim}{X}$ et X admettent des systèmes de Lévy, notés respectivement $(\underset{\sim}{N}^o,\underset{\sim}{A})$ et (N,A). Rappelons une méthode de construction de $\underset{\sim}{A}$: on choisit une FA $\underset{\sim}{F}$, purement discontinue, de λ-potentiel fini, telle que $\Delta\underset{\sim}{F}_s(\omega)>0$ si et seulement si $\underset{\sim}{X}_{s-}(\omega) \neq \underset{\sim}{X}_s(\omega)$;on prend alors pour $\underset{\sim}{A}$ la projection duale prévisible de $\underset{\sim}{F}$. De même on choisit une FA F de X, purement discontinue, telle que $\Delta F_s>0$ si et seulement si $X_{s-} \neq X_s$; A est la projection duale prévisible (relativement à l'une des familles $(\mathcal{F}_t)_{t\geq o}$ ou $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t\geq o}$, ce qui revient au même) de F. Comme F est absolument continue par rapport à $\underset{\sim}{F}$, A est absolument continue par rapport à $\underset{\sim}{A}$; les FA A et $\underset{\sim}{A}$ étant continues, on en déduit [1] l'existence de $f\in(\mathcal{E}_3^*)^+$, vérifiant (13).

Posons $P(x,y;dx') = \underset{\sim}{N}^o(x,y;dx',E_2)$. Soit (g_p) une suite de fonctions positives de $C(E_1)$, engendrant un sous-espace vectoriel dense dans cet espace; soient $D(p,q) = \{x;\ Ng_p(x)\leq q\}$, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions suivantes sur $E_1\times E_1$: $h_{p,q}(x,x') = \frac{1}{q}1_{D(p,q)}(x)g_p(x')1_{x\neq x'}$. h étant fixée dans $\mathcal{H}$, on considère les FA suivantes:

$$\underset{\sim}{G}_t = \int_0^t d\underset{\sim}{A}_s \int P(X_s,Y_s;dx')h(X_s,x')$$

$$\underset{\sim}{H}_t = \int_0^t d\underset{\sim}{A}_s \int N(X_s,dx')f(X_s,Y_s)h(X_s,x'),$$

de λ-potentiels respectifs $u^\lambda_{\underset{\sim}{G}}$ et $u^\lambda_{\underset{\sim}{H}}$. Par définition de $\underset{\sim}{N}^o$, N et f, on a:

$$u^\lambda_{\underset{\sim}{G}}(x,y) = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\sum_{(s)} e^{-\lambda s}h(X_{s-},X_s)\} = E^x\{\int e^{-\lambda t}dA_t \int N(X_s,dx')h(X_s,x')\}\}$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int e^{-\lambda t}d\underset{\sim}{A}_s f(X_s,Y_s)\int N(X_s,dx')h(X_s,x')\} = u^\lambda_{\underset{\sim}{H}}(x,y).$$

Les deux FA continues $\underset{\sim}{G}$ et $\underset{\sim}{H}$ ont même λ-potentiel, et comme $h\in\mathcal{H}$ on a $\underset{\sim}{G}_t\leq\underset{\sim}{A}_t$, donc ce

λ-potentiel est fini; $\underset{\sim}{G}$ et $\underset{\sim}{H}$ sont donc équivalentes. Par suite si $H_h = \{(x,y);$ $\int P(x,y;dx')h(x,x') \neq f(x,y)\int N(x,dx')h(x,x')\}$, H_h est de $\underset{\sim}{A}$-potentiel nul. Il en est évidemment de même de $H = \bigcup_{h\in\mathcal{H}} H_h$.

Comme $\bigcup_{(q)} D(p,q) = E_1$ et comme la suite (g_p) engendre $C(E_1)$, les mesures $P(x,y;.)$ et $f(x,y)N(x,.)$ coïncident si $(x,y)\notin H$. On pose:

$$\underset{\sim}{N}(x,y;dx',dy') = 1_H(x,y)f(x,y)N(x,dx')\varepsilon_y(dy') + 1_{H^c}(x,y)\underset{\sim}{N}^o(x,y;dx',dy').$$

Comme $\underset{\sim}{N}$ et $\underset{\sim}{N}^o$ ne diffèrent que sur un ensemble de $\underset{\sim}{A}$-potentiel nul, $(\underset{\sim}{N},\underset{\sim}{A})$ est encore un système de Lévy de $\underset{\sim}{X}$. $\mathcal{E}_1$ étant séparable, il existe un noyau markovien L de $(E_3\times E_1, \mathcal{E}_3^*\times\mathcal{E}_1)$ dans $(E_2,\mathcal{E}_2)$, tel que

$$\underset{\sim}{N}(x,y;dx',dy')1_{x\neq x'} = \underset{\sim}{N}(x,y;dx',E_2)L(x,y,x';dy')1_{x\neq x'}.$$

On termine alors la démonstration en posant:

$$N_1(x,y;dy') = N(x,y;\{x\},dy'),$$

$$K(x,y,x';.) = L(x,y,x';.)1_{x\neq x'}. \blacksquare$$

<u>Remarques</u>. 1) Si $\underset{\sim}{Q}$ est un semi-groupe borélien (resp sur $(E_3,\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)$), on peut choisir pour $\underset{\sim}{N}$ un noyau borélien (resp de $(E_3,\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)$ dans $(E_3,\mathcal{E}_3)$) [1].

2) Si $\underset{\sim}{X}$ est simplement un processus droit, il possède également un système de Lévy $(\underset{\sim}{N},\underset{\sim}{A})$, qui vérifie:

$$\underset{\sim}{E}^{x,y}\{\sum_{s\leq t} 1_{\underset{\sim}{V}}(s)f(X_{s-},Y_{s-};X_s,Y_s)\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int_o^t d\underset{\sim}{A}_s\int\underset{\sim}{N}(X_s,Y_s;dx',dy')f(X_s,Y_s;x',y')\}$$

au lieu de (12). Lorsque <u>la famille</u> $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t\geq o}$ <u>est quasi-continue à gauche, le théorème reste valable</u>. En effet la démonstration précédente repose sur le fait que F est absolument continue par rapport à $\underset{\sim}{F}$, ce qui équivaut à "$V\subset\underset{\sim}{V}$"; or cette inclusion est vérifiée sous l'hypothèse de quasi-continuité à gauche de $(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t)_{t\geq o}$ (remarque 2 suivant le lemme 4).

Avant d'étudier la signification des noyaux N_1 et K, appliquons ce qui précède à l'étude des projections d'une FA quasi-continue à gauche. Rappelons d'abord que comme $\underset{\sim}{X}$ est de Hunt, le NM q est continu à droite et limité à gauche. D'autre part toute FA quasi-continue à gauche est équivalente à une FA de la forme ci-dessous.

PROPOSITION 10.- <u>Soient</u> $\underset{\sim}{X}$ <u>un PSD de Hunt</u>, g <u>une fonction positive universellement mesurable sur</u> $E_3\times E_3$, <u>nulle sur la diagonale, et</u> $\underset{\sim}{B}$ <u>la FA définie par</u>

$$(17) \qquad \underset{\sim}{B}_t = \sum_{s\leq t} g(X_{s-},Y_{s-};X_s,Y_s).$$

son y-projection sur $\mathcal{F}$ est donnée par:

$$(18)\quad B_t^y = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int_0^t d\underset{\sim}{A}_s \int N_1(X_s,Y_s;dy')g(X_s,Y_s;X_s,y')|\mathcal{F}\} +$$

$$+ \sum_{s\leq t} \int q_{s-}(y,dy')K(X_{s-},y',X_s;dy'')g(X_{s-},y';X_s,y'').$$

Démonstration.- Il suffit de montrer la proposition pour les fonctions g telles que $\underset{\sim}{B}$ soit de λ-potentiel fini, ce que nous supposerons. Considérons les FA

$$\underset{\sim}{C}_t = \sum_{s\leq t} g(X_s,Y_{s-};X_s,Y_s)1_{X_{s-}=X_s}$$

$$\underset{\sim}{C}'_t = \int_0^t d\underset{\sim}{A}_s \int N_1(X_s,Y_s;dy')g(X_s,Y_s;X_s,y')$$

$$\underset{\sim}{D}_t = \sum_{s\leq t} g(X_{s-},Y_{s-};X_s,Y_s)1_{X_{s-}\neq X_s},$$

et appelons $(D_t'^y)$ le dernier terme du second membre de (18). Il suffit de prouver d'une part que $\underset{\sim}{C}$ et $\underset{\sim}{C}'$ ont mêmes projections, d'autre part que $(D_t'^y)$ est la y-projection de $\underset{\sim}{D}$.

D'après (12) et (14), les deux FA $\underset{\sim}{C}$ et $\underset{\sim}{C}'$ ont même λ-potentiel, qui est aussi le λ-potentiel de leurs projections $C = (C_t^y)$ et $C' = (C_t'^y)$. $\underset{\sim}{C}'$ est continue, donc C' aussi. Les temps de discontinuité de $\underset{\sim}{C}$ ont leurs graphes contenus dans $\underset{\sim}{V}\cap V^c$, donc ils sont y-totalement étrangers à $\mathcal{T}$ (lemme 4) pour tout y, et on en déduit que C est continu (corollaire de la proposition 8). C et C' sont deux FA de (X,q) ayant même λ-potentiel fini, donc elles sont équivalentes.

Il est très facile de vérifier que $D' = (D_t'^y)$ est une FA de (X,q) (pour la mesurabilité, utiliser une extension évidente du lemme 2 et le lemme 3). Cherchons son λ-potentiel $U^\lambda_{D'}$. Comme $q_{s-}(y,A) = \underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_{s-}\in A|\mathcal{F}\}$, il vient:

$$U^\lambda_{D'}h(x,y) = E^x\{\sum_{(s)} e^{-\lambda s}\int q_{s-}(y,dy')K(X_{s-},y',X_s;dy'')h(X_s)g(X_{s-},y';X_s,y'')\}$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\sum_{(s)} e^{-\lambda s}\int K(X_{s-},Y_{s-},X_s;dy')h(X_s)g(X_{s-},Y_{s-};X_s,y')\}$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int e^{-\lambda s}d\underset{\sim}{A}_s\int \underset{\sim}{N}(X_s,Y_s;dx',dy')h(x')K(X_s,Y_s,x';dy'')g(X_s,Y_s;x',y'')\}$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int e^{-\lambda s}f(X_s,Y_s)d\underset{\sim}{A}_s\int N(X_s,dx')h(x')K(X_s,Y_s,x';dy')K(X_s,Y_s,x';dy'')$$
$$g(X_s,Y_s;x',y'')\}$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int e^{-\lambda s}f(X_s,Y_s)d\underset{\sim}{A}_s\int N(X_s,dx')h(x')K(X_s,Y_s,x';dy')g(X_s,Y_s;x',y')\}.$$

D'autre part le λ-potentiel $U^\lambda_{\underset{\sim}{D}}$ de $\underset{\sim}{D}$ est:

$$U^\lambda_{\underset{\sim}{D}}(x,y;h,1) = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{ \sum_{(s)} e^{-\lambda s} h(X_s) g(X_{s-},Y_{s-};X_s,Y_s) 1_{X_{s-}\neq X_s} \}$$

$$= \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int e^{-\lambda s} d\underset{\sim}{A}_s \int \underset{\sim}{N}(X_s,Y_s;dx',dy') h(x') g(X_s,Y_s;x',y') 1_{X_s \neq x'}\}$$

$$= U^\lambda_{D'} h(x,y).$$

Comme d'après (11) le λ-potentiel U^λ_D de la projection D de $\underset{\sim}{D}$ égale $U^\lambda_{D'}$, les FA D et D' de (X,q) sont équivalentes [6], et on en déduit le résultat. ■

Remarque.- Toutes les y-projections de $\underset{\sim}{C}$ (resp $\underset{\sim}{D}$) sont continues (resp purement discontinues): on retrouve les résultats du théorème 4.

2-Discontinuités fixes de la seconde composante.- Pour donner une interprétation des noyaux N_1 et K, nous devons introduire la notion de "discontinuités fixes de (Y_t) conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}$". Précisons ce que ce que nous entendons par là:

DEFINITION.- On appelle ensemble des y-discontinuités fixes de (Y_t) (sous-entendu: conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}$) la y-projection D^y de l'ensemble aléatoire $\underset{\sim}{D} = \{(t,\omega);\ Y_{t-}(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$.

La terminologie se justifie ainsi: le processus conditionnel (Y_t) étant markovien non homogène, admet éventuellement des temps de discontinuité fixes; en gros, t est un tel temps pour la probabilité conditionnelle $\underset{\sim}{P}^{x,y}(.|\mathcal{F})(\omega)$ si $(t,\omega)\in D^y$. Pour rendre les choses plus précises, nous allons supposer qu'il existe un système de probabilités conditionnelles régulières $(P^y_\omega;\ y\in E_2,\ \omega\in\Omega)$ par rapport à $\mathcal{F}$, ce qui signifie que

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}\{A|\mathcal{F}_t\}(.) = P^y_{.}\{A\} \quad \underset{\sim}{P}^{x,y}\text{-ps},$$

pour tout $A\in\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t$. On a alors:

PROPOSITION 11.- Sous les hypothèses précédentes, pour tout $(x,y)\in E_3$, D^y est P^x-indistinguable de $F^y = \{(t,\omega);\ P^y_\omega\{Y_{t-} \neq Y_t\}>0\}$.

Démonstration.- Montrons d'abord que F^y est $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurable. Soit H une suite dense de $C(E_2)$. Si $f,g\in H$, on pose pour y fixé:

$$Z^n_t(\omega) = E^y_\omega\{f(Y_{t-1/n})g(Y_t)\},$$

$$Z_t(\omega) = E^y_\omega\{f(Y_{t-})g(Y_t)\},$$

$$Z'_t(\omega) = E^y_\omega\{f(Y_t)g(Y_t)\}.$$

(Z^n_t) et (Z'_t) sont continus à droite et adaptés à $(\mathcal{F}_t)$, donc $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurables; comme $Z^n_t(\omega)$ converge vers $Z_t(\omega)$, il en est de même de (Z_t), ainsi que de l'ensemble $F^y_{f,g} = \{(t,\omega);\ Z_t(\omega) \neq Z'_t(\omega)\}$. Il est clair que $F^y_{f,g} \subset F^y$, et réciproquement supposons que $(t,\omega) \notin \bigcup_{f,g\in H} F^y_{f,g}$; on a alors

$$E^y_\omega\{h(Y_{t-},Y_t)\} = E^y_\omega\{h(Y_t,Y_t)\}$$

pour toute fonction h sur $E_2 \times E_2$ de la forme $h(y,y') = f(y)g(y')$, où $f,g \in H$, donc pour tout $f \in b(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_2)$; en prenant $h(y,y') = 1_{y\neq y'}$ on voit que $(t,\omega) \notin F^y$, et finalement $F^y = \bigcup_{f,g\in H} F^y_{f,g}$, donc F^y est $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurable.

Soit maintenant $S \in \mathcal{T}$, tel que $P^x\{\pi([S]\cap F^y)\} = 0$. P^x-ps en ω, on a $P^y\{Y_{S(\omega)-} \neq Y_{S(\omega)}\} = 0$, donc $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_{S-} \neq Y_S\} = 0$ et $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([S]\cap \underset{\sim}{D})\} = 0$. Inversement si $S \in \mathcal{T}$ vérifie $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([S]\cap \underset{\sim}{D})\} = 0$, le même raisonnement en sens inverse conduit à $P^x\{\pi([S]\cap F^y)\} = 0$. D'après la proposition 9, F^y et D^y sont donc indistinguables. ∎

Revenons maintenant au cas général. Soit $\beta(x,y,x') = K(x,y,x';E_2 - \{y\})$. On peut donner la caractérisation suivante de D^y:

PROPOSITION 12.- <u>Soit $\underset{\sim}{X}$ un PSD de Hunt. Pour tout</u> $(x,y) \in E_3$, D^y <u>est</u> P^x-<u>indistinguable de</u> $G^y = \{(t,\omega);\ \int q_{t-,\omega}(y,dy')\beta(X_{t-}(\omega),y',X_t(\omega))>0\}$.

<u>Démonstration</u>.- Soit (g_n) une suite de fonctions de $(\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3)^+$, croissant vers $g(x,y;x',y') = 1_{x\neq x'}1_{y\neq y'}$ et telle que la FA $\underset{\sim}{B}^n$ définie par (17) à partir de g_n soit de λ-potentiel fini; la projection de $\underset{\sim}{B}^n$ est:

$$B^{n,y}_t = \sum_{s\leq t} \int q_{s-}(y,dy')K(X_{s-},y',X_s;dy'')g_n(X_{s-},y';X_s,y'').$$

Elle est de λ-potentiel fini, donc pour tout t, $B^{n,y}_t$ est ps fini, et $G^y_n = \{(t,\omega);\ \Delta B^{n,y}_t(\omega)>0\}$ croit vers G^y (à un ensemble évanescent près) Comme G^y_n est $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurable, il en est de même de G^y.

Soit maintenant une fonction $g \in (\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3)^+$, nulle sur la diagonale, telle que la FA $\underset{\sim}{B}$ définie par (17) soit de λ-potentiel fini. Si $T \in \mathcal{T}$, on a $\Delta B^y_T = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\Delta \underset{\sim}{B}_T|\mathcal{F}\}$, donc:

(19) $$\underset{\sim}{E}^{x,y}\{g(X_{T-},Y_{T-};X_T,Y_T)|\mathcal{F}\} = \int q_{T-}(y,dy')K(X_{T-},y',X_T;dy'')g(X_{T-},y';X_T,y'').$$

Cette égalité est vraie (par un argument de classe monotone) pour toute fonction

$g\in(\mathcal{E}_3\otimes\mathcal{E}_3)^+$ nulle sur la diagonale, et en particulier pour $g(x,y;x',y') = 1_{y\neq y'}$.
Il vient alors:

$$\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_{T-} \neq Y_T|\mathcal{F}\} = \int q_{T-}(y,dy')\beta(X_{T-},y',X_T).$$

Donc $P^x\{\pi([T]\bigcap G^y)\} = 0$ si et seulement si $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_{T-}\neq Y_T|\mathcal{F}\} = 0$ $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-ps, donc si et seulement si $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_{T-}\neq Y_T\} = 0$, soit $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{\pi([T]\bigcap \underset{\sim}{D})\} = 0$. On termine en utilisant la proposition 9. ■

Etant donné (15), le résultat précédent implique en particulier que D^y est contenu dans $V = \{(t,\omega);\ X_{t-}(\omega) \neq X_t(\omega)\}$. Cela peut se voir directement en utilisant la remarque 1 qui suit le lemme 4: on a $V^y = V$ et $\underset{\sim}{V} = V\bigcup\underset{\sim}{D}$, donc $D^y\subset V$.

Soit enfin $D_1^y = \{(t,\omega);\ q_{t-,\omega}(y,.) \neq q_{t,\omega}(y,.)\}$. D_1^y est $(\mathcal{F}_t)$-bien-mesurable, et $D_1^y\subset D^y$ à un ensemble P^x-évanescent près pour tout x (en effet, si $T\in\mathcal{T}$ vérifie $P^x\{\pi([T]\bigcap D^y)\} = 0$, on a $\underset{\sim}{P}^{x,y}\{Y_{T-}\neq Y_T|\mathcal{F}\} = 0$ P^x-ps, donc $q_{T-}(y,.) = q_T(y,.)$ P^x-ps).

<u>3-Interprétation des noyaux</u> N_1 <u>et</u> K.-

PROPOSITION 13.- <u>Soient</u> $\underset{\sim}{X}$ <u>un PSD de Hunt</u>, $T\in\mathcal{T}$ <u>et</u> $h\in b(\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{E}_2)$.
(i)- <u>Si</u> $[T]\subset D^y$, $\underset{\sim}{E}^{x,y}\{h(Y_{T-},Y_T)|\mathcal{F}\} = \int q_{T-}(y,dy')K(X_{T-},y',X_T;dy'')h(y',y'')$.

(ii)- <u>Si</u> $[T]\bigcap D^y = \emptyset$, $\underset{\sim}{E}^{x,y}\{h(Y_{T-},Y_T)|\mathcal{F}\} = \int q_T(y,dy')h(y',y')$.

<u>Démonstration</u>.- Si $[T]\subset D^y$, on a $X_{T-} \neq X_T$ ps d'après la fin de la section 2. (i) découle alors de (19), appliquée à la fonction $g(x,y;x',y') = 1_{x\neq x'}h(y,y')$. Si $[T]\bigcap D^y = \emptyset$, on sait que $Y_{T-} = Y_T$ $\underset{\sim}{P}^{x,y}$-ps (par définition de D^y), et (ii) n'est autre que la formule (6). ■

Appliquons la proposition 10 à une fonction $g\in b(\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{E}_2)^+$, nulle sur la diagonale:

$$(20)\quad \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\sum_{s\leq t} g(Y_{s-},Y_s)|\mathcal{F}\} = \underset{\sim}{E}^{x,y}\{\int_0^t d\underset{\sim}{A}_s\int N_1(X_s,Y_s;dy')g(Y_s,y')|\mathcal{F}\} + $$
$$+ \sum_{s\leq t}\int q_{s-}(y,dy')K(X_{s-},y',X_s,dy'')g(y',y'').$$

La proposition 13 et la formule (20) ont une signification intuitive claire, en fonction de la propriété de Markov non homogène de (Y_t), conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}$. En effet un processus de Markov non homogène admet éventuellement des discontinuités fixes (nous l'avons déjà vu) et, sous certaines hypothèses, un système de Lévy représentant les discontinuités "mobiles"; de plus le noyau de Lévy dépend (en général) du temps. On peut dire que:

- D'une part $K(X_{T-},y,X_T;.)$ est la loi de Y_T lorsque $Y_{T-}=y$, au temps de discontinuité fixe T de (Y_t).

- D'autre part $N_1(X_t,.;.)$ est un noyau de Lévy, dépendant du temps t, pour le processus (Y_t).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENVENISTE A., J. JACOD: Systèmes de Lévy des processus de Markov (à paraitre).

[2] BLUMENTHAL R.M., R.K. GETOOR: Markov processes and potential theory. Academic Press, New-York, 1968.

[3] ÇINLAR E.: Markov additive processes I,II. Z. Wahr. Th., 24, p.85-122, 1972.

[4] DELLACHERIE C.: Capacités et processus stochastiques. Springer, Berlin, 1972.

[5] JACOD J.: Générateurs infinitésimaux des processus à accroissements semi-markoviens. Ann. Inst. H. Poinc., VII, p.219-233, 1971.

[6] JACOD J.: Noyaux multiplicatifs d'un processus de Markov (à paraitre dans le même volume).

[7] MEYER P.A.: Processus de Markov. Springer, Lect. N. Math., Berlin, 1967.

[8] MERTENS J.-F.: Théorie des processus stochastiques généraux, applications aux surmartingales. Z. Wahr. Th., 22, p.45-68, 1972.

[9] WALSH J.B., P.A. MEYER: Quelques applications des résolvantes de Ray. Inv. Math 14, p.143-166, 1971.

Jean JACOD
Centre de Morphologie mathématique
35 rue Saint-Honoré
77300 FONTAINEBLEAU