MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL BONNARD

Sur des applications du calcul fonctionnel holomorphe

Mémoires de la S. M. F., tome 34 (1973), p. 5-54

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__34__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 34, 1973, p. 5-54.

SUR DES APPLICATIONS DU CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE

par MICHEL BONNARD

(Thèse sc. math. Poitiers 1969)

Résumé. - Soit A une algèbre sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, commutative, unitaire, munie d'une topologie localement multiplicativement convexe séparée et complète. On appelle caractère de A toute application linéaire multiplicative et unitaire de A dans $\mathbb{C}$. On appelle spectre algébrique (resp. topologique) de A l'ensemble $\hat{A}_{alg}$ (resp. $\hat{A}_{top}$) des caractères (resp. des caractères continus) de A, muni de la topologie faible. Si $a = (a_1,\dots,a_n)$ est une famille finie d'éléments de A on appelle spectre algébrique (resp. topologique) de a l'ensemble $sp_{alg}\ a$ (resp. $sp_{top}\ a$) image dans $\mathbb{C}^n$ de $\hat{A}_{alg}$ (resp. $\hat{A}_{top}$) par l'application $\chi \mapsto \chi(a_1),\dots,\chi(a_n))$. Le calcul fonctionnel holomorphe associe à toute famille finie a d'éléments de A un morphisme (d'algèbres topologiques unitaires) à valeurs dans A et défini sur l'algèbre $\mathcal{O}(sp_{top}\ a)$ des fonctions analytiques au voisinage de $sp_{top}\ a$. La formulation globale de ce calcul est un morphisme à valeurs dans A et défini sur une sous algèbre $\mathfrak{S}_A$ de la limite inductive des $\mathcal{O}(sp_{top}\ a)$, limite prise suivant l'ensemble des familles finies d'éléments de A. Par transposition ce morphisme donne un homéomorphisme de $\hat{\mathfrak{S}}_{alg}$ sur $\hat{A}_{alg}$. On en déduit que $\hat{A}_{alg}$ est limite projective des voisinages polynomialement convexes des spectres topologiques des familles finies d'éléments de A. Ceci est un début de réponse à la question de savoir si $\hat{A}_{alg}$ est "beaucoup plus gros" que $\hat{A}_{top}$. On introduit une classe d'algèbres, les algèbres d'Arens-Calderon dont le spectre topologique est dense dans le spectre algébrique.

On suppose de plus que A est à inverse continu. Tous ses caractères sont alors continus et on écrit $\hat{A}$ et $\hat{a}$, au lieu de $\hat{A}_{top}$ et $\hat{a}_{top}$. Soit ϑ une variété étalée par π dans $\mathbb{C}^n$. La simulation de A dans ϑ est l'ensemble $Sim(A,\vartheta)$ des couples (a,μ) où $a \in A^n$ et où $\mu : \hat{A} \to \vartheta$ est continue et telle que $\pi \circ \mu = \hat{a}$. Alors $Sim(A,\vartheta)$ est naturellement étalé dans A^n ; c'est un revêtement si ϑ est un revêtement. Si ϑ est analytiquement contractile $Sim(A,\vartheta)$ est contractile. Si $f : \vartheta \to \vartheta'$ est analytique, on définit une application continue $Sim(A,f)$ de $Sim(A,\vartheta)$ dans $Sim(A,\vartheta')$. Si $L : A \to B$ est linéaire, multiplicative unitaire et continue, on définit une application continue $Sim(L,\vartheta)$ de $Sim(A,\vartheta)$ dans $Sim(B,\vartheta)$. Ainsi $Sim(-,-)$ est un foncteur covariant à 2 variables. S'il existe un groupe de Lie complexe opérant holomorphiquement et transitivement dans ϑ, alors les groupes d'homotopie de $Sim(A,\vartheta)$ ne dépendent que du spectre de A, ce qui généralise un résultat de Novodworski [21]. Si ϑ est un groupe de Lie, $Sim(A,\vartheta)$ est un groupe topologique dont le quotient par la composante neutre ne dépend que du spectre de A, ce qui généralise un résultat d'Arens [1] et Royden [14].

- INTRODUCTION -

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines propriétés des algèbres topologiques sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; nos principaux résultats se divisent en deux groupes (réunis respectivement dans les chapitres II et III) reliés entre eux par le fait qu'on utilise pour les démontrer la "formulation globale" du calcul fonctionnel holomorphe ; c'est-à-dire une transcription du théorème 3 de [4] avec un vocabulaire différent ; on peut dire aussi que c'est la technique qui consiste, pour étudier les algèbres, à se ramener au cas des algèbres de type fini.

Avant de résumer nos principaux résultats, introduisons quelques notations. Soit B une algèbre sur $\mathbb{C}$, commutative et unitaire. On appelle caractère de B toute application linéaire multiplicative et unitaire de B dans $\mathbb{C}$, et on appelle spectre algébrique de B l'ensemble $\hat{B}_{alg}$ des caractères de B, muni de la structure uniforme de la convergence simple dans B. Si de plus B est munie d'une topologie, on appelle spectre topologique de B le sous-espace uniforme $\hat{B}_{top}$ de $\hat{B}_{alg}$ constitué par les caractères qui sont continus.
Si $a = (a_1,\ldots,a_n)$ est une famille finie d'éléments de B, et si $\chi \in \hat{B}_{alg}$, on note $\chi(a)$ l'élément $(\chi(a_1),\ldots,\chi(a_n)) \in \mathbb{C}^n$; on note ensuite $\hat{a}_{alg}$ l'application $\chi \longrightarrow \chi(a)$ de $\hat{B}_{alg}$ dans $\mathbb{C}^n$, et $\hat{a}_{top}$ la restriction de $\hat{a}_{alg}$ à $\hat{B}_{top}$; enfin on appelle spectre topologique de a l'image $sp_{top}a$ de l'application $\hat{a}_{top}$.

Le mot morphisme, employé sans plus de précision, désignera une application linéaire, multiplicative, unitaire et continue d'une algèbre topologique unitaire dans une autre.

Le chapitre I, assez bref, contient des préliminaires nécessaires à la description des spectres de l'algèbre $\mathcal{F}_A$ que nous introduisons ensuite au chapitre II.

Tout au long des chapitres II et III, A sera une algèbre sur $\mathbb{C}$, commutative, unitaire et munie d'une topologie localement multiplicativement convexe, séparée et complète.

Le but du chapitre II est de donner une réponse à la question, assez naturelle, de savoir si $\hat{A}_{alg}$ est "beaucoup plus gros" que $\hat{A}_{top}$. Notre corollaire 2 dit que $\hat{A}_{alg}$ est limite projective des intersections des voisinages polynomialement convexes des spectres topologiques des familles finies d'éléments de A ; ce qui répond à la question puisque $\hat{A}_{top}$ est dense dans la limite projective des spectres topologiques des familles finies d'éléments de A. L'outil qui nous permet d'obtenir ce résultat est la formulation globale du calcul fonctionnel holomorphe.

Le calcul fonctionnel holomorphe (en abrégé : calcul f. h.) fait correspondre à toute famille finie $a = (a_1,\ldots,a_n)$ d'éléments de A et à toute fonction f holomorphe au voisinage de $sp_{top} a$, un élément $\bar{f}(a) \in A$, de sorte que l'on ait les propriétés suivantes (cf. [4]) :

(i) $(\bar{f}(a))\hat{}_{top} = f \circ \hat{a}_{top}$ (compatibilité avec les caractères continus) ;

(ii) si f est la i-ème fonction coordonnée, $\bar{f}(a) = a_i$;

(iii) si f ne dépend que des m premières variables, c'est-à-dire si $f(z_1,\ldots,z_n) = g(z_1,\ldots,z_m)$, alors on a $\bar{f}(a) = \bar{g}(a')$, où a' est la famille $(a_1,\ldots,a_m)$ (simplifiabilité) ;

(iv) l'application $f \to \bar{f}(a)$ est linéaire, multiplicative, unitaire ;

(v) l'application $f \to \bar{f}(a)$ est continue.

Les propriétés (iv) et (v) nous disent que le calcul f.h. associe à toute famille finie a un morphisme à valeurs dans A, et défini sur l'algèbre $\mathcal{O}(sp_{top} a)$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de $sp_{top} a$ (cf. ci-dessous, conventions et notations n°2, pour la définition précise de $\mathcal{O}(sp_{top} a)$). L'idée qui est à la base de la formulation globale c'est que l'on peut utiliser la propriété (iii) pour passer à la limite inductive suivant toutes les familles finies d'éléments de A, et exprimer le calcul f. h. comme un seul morphisme, à valeurs dans A, et défini sur une certaine algèbre $\mathcal{O}_A$, limite inductive des $\mathcal{O}(sp_{top} a)$. Cette idée est due à Waelbroeck qui l'a utilisée dans [18], mais semble la juger de peu d'intérêt (cf. [19], ch. III, fin du § 3 - 3). Une difficulté, purement formelle d'ailleurs, est que l'ensemble des familles finies d'éléments de A ne se munit pas naturellement d'une structure de préordre filtrant. On pourrait l'en munir "artificiellement" en mettant sur A une structure de bon ordre ; toutefois, ici, nous avons préféré passer des familles finies aux parties finies de A, ordonnées naturellement par inclusion ; ceci nous a paru plus simple, malgré quelques difficultés de notations (distinction entre le calcul f. h. qui opère sur les familles finies ou sur les parties finies).

Le résultat principal du chapitre II est le théorème 1, qui nous dit qu'il existe un homéomorphisme canonique entre le spectre algébrique de A et celui d'une certaine sous-algèbre $\mathcal{P}_A$ de $\mathcal{O}_A$; on en déduit immédiatement une description de $\hat{A}_{alg}$ (corollaire 2) car on sait décrire le spectre algébrique $\hat{\mathcal{P}}_A$.

Pour terminer le chapitre II, nous définissons une classe d'algèbres, les algèbres d'Arens-Calderón, dont le spectre topologique est dense dans le spectre algébrique, et pour lesquelles le calcul f. h. est compatible avec les caractères discontinus.

Dans le chapitre III nous étudions la notion de simulation dans A d'une variété étalée dans $\mathbb{C}^n$. Par définition, la subsimulation dans A d'une variété $\mathcal{V}$, étalée par π dans $\mathbb{C}^n$, c'est l'ensemble A_ϑ des $a \in A^n$ tels qu'il existe une application $\mu : \hat{A}_{top} \to \vartheta$, continue et telle que $\hat{a}_{top} = \pi \circ \mu$; notant $\mathcal{C}(\hat{A}_{top}, \vartheta)$ l'ensemble des applications continues de $\hat{A}_{top}$ dans ϑ , muni de la topologie de la convergence compacte, nous appelons simulation de ϑ dans A le sous-espace topologique $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ de l'espace produit $A^n \times \mathcal{C}(\hat{A}_{top}, \vartheta)$ constitué par les couples (a,μ) tels que $\hat{a}_{top} = \pi \circ \mu$. Ces définitions s'introduisent naturellement quand on étudie certaines équations analytiques dans A (cf. [4] chapitre III) ; en effet, pour une certaine variété ϑ , l'ensemble A_ϑ est alors l'ensemble des $a \in A^n$ pour lesquels une certaine équation possède des solutions, et les points de $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ sont en bijection avec ces solutions. Le mot "simulation" vient de ce que $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ ressemble à ϑ ; par exemple si $\vartheta = GL(n, \mathbb{C})$, étalé trivialement dans $\mathbb{C}^{n^2}$, on a $\mathrm{Sim}(A, \vartheta) = GL(n,A)$; si ϑ est le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ est le revêtement universel de A_ϑ .

Nous n'étudions ces notions que dans le cas où A est à inverse continu, et de fait la compacité du spectre joue un rôle fondamental dans nos démonstrations.

Après un premier paragraphe consacré à des préliminaires topologiques, nous montrons que $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ est étalée dans A^n ; et que c'est un revêtement si ϑ est un revêtement. Si $f_- : \vartheta \to \vartheta'$ est une fonction analytique (ϑ' étant une autre variété étalée), nous définissons une application continue

$$\mathrm{Sim}(A,f) : \mathrm{Sim}(a, \vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A, \vartheta') .$$

Si B est autre algèbre, vérifiant les mêmes hypothèses que A , et si $L : A \to B$ est un morphisme, nous définissons une application continue

$$\mathrm{Sim}(L, \vartheta) : \mathrm{Sim}(A, \vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(B, \vartheta) .$$

Ces applications ont des propriétés qui font de $\mathrm{Sim}(-,-)$ un foncteur covariant à deux variables. Nous montrons également que $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ est contractile dès que ϑ est analytiquement contractile. Nous donnons aussi un résultat technique (lemme 11) qui peut s'exprimer en disant que "pour étudier $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ on peut se ramener au cas où A est de type fini" (pour se convaincre que c'est bien là la signification "profonde" de notre lemme 11, on pourra comparer la démonstration de notre théorème 2 à celle du théorème 1 de [21]).

Nous étudions ensuite les propriétés d'homotopie de $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$; notre résultat principal dit que, s'il existe un groupe de Lie complexe qui opère holomorphiquement et transitivement dans ϑ , alors les groupes d'homotopie de $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ sont égaux à ceux de $\mathcal{C}(\hat{A}_{top}, \vartheta)$; si de plus ϑ est un revêtement, on a un résultat analogue pour A_ϑ . Novodvorski avait déjà montré ([21], théorème 1) que les composantes connexes de $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ sont en bijection avec celles de $\mathcal{C}(\hat{A}_{top}, \vartheta)$, dans le cas où ϑ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ étalé trivialement et où

A est une algèbre de Banach sans radical.

Si ϑ est munie d'une loi de composition analytique, nous construisons sur Sim(A, ϑ) une loi de composition continue ; les propriétés habituelles des lois de composition (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, existence de symétriques) sont vérifiées par la loi de Sim(A, ϑ) dès qu'elles le sont par la loi de ϑ . Si ϑ est un groupe de Lie oomplexe, Sim(A, ϑ) est un groupe topologique et le quotient de Sim(A, ϑ) par sa composante neutre est isomorphe au quotient de $\mathcal{C}(\hat{A}_{top}, \vartheta)$ par sa composante neutre. Pour illustrer ce résultat, nous donnons des expressions cohomologiques des quotients du groupe multiplicatif A^* des éléments inversibles de A par le sous-groupe constitué par les éléments ayant un logarithme, puis par le sous-groupe constitué par les éléments ayant une racine n-ième ; nous retrouvons en particulier un résultat d'Arens [1] et de Royden [14].

***

CONVENTIONS ET NOTATIONS

1° - Applications produits et applications juxtaposées.

Si $f : E \longrightarrow F$ et $f' : E' \longrightarrow F'$ sont des applications, on appellera application produit et on notera

$$f \times f' : E \times E' \longrightarrow F \times F'$$

l'application définie par $(f \times f')(e,e') = (f(e),f'(e'))$. En particulier, si $e = (e_1,\dots,e_n) \in E^n$, on écrira $f(e)$ pour $(f \times\dots\times f)(e) = (f(e_1),\dots,f(e_n))$.

Par contre, si f et f' ont même espace de départ (c'est-à-dire si $E = E'$) , on définit l'application juxtaposée de f et f' , soit

$$(f,f') : E \longrightarrow F \times F' ,$$

en posant $(f,f')(e) = (f(e),f'(e))$.

2° - Espaces de fonctions et de germes.

Si S et X sont des espaces topologiques, on désignera par $\mathcal{C}(S,X)$ l'espace des applications continues de S dans X , muni de la topologie de la convergence compacte. Pour simplifier on notera $\mathcal{C}(S)$ au lieu de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$.

Si de plus S et X sont des variétés analytiques, on notera $\mathcal{O}(S,X)$ le sous-espace topologique de $\mathcal{C}(S,X)$ constitué par les fonctions qui sont analytiques. Pour tout compact K de S , on notera $\mathcal{O}(K,X)$ l'espace des germes au voisinage de K de fonctions analytiques à valeur dans X , c'est-à-dire la limite inductive des $\mathcal{O}(U,X)$, pour U voisinage de K dans S .
Pour une partie quelconque H de S , on notera $\mathcal{O}(H,X)$ la limite projective des $\mathcal{O}(K,X)$ pour K compact contenu dans H (lorsque H est ouvert, on retrouve bien la notion ci-dessus). Pour simplifier, on écrira $\mathcal{O}(H)$ au lieu de $\mathcal{O}(H, \mathbf{C})$. Ces notions de germes sont définies plus en détail au début du chapitre II de [4].

3° - Transposée

Le mot transposée sera employé dans ce qui suit avec des sens apparemment divers. Donnons une définition qui les contiendra tous. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie d'ensembles et d'applications ; pour X et Y objets de $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{A}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{A}$ qui ont pour source X et pour but Y . Fixons nous un objet privilégié Q de $\mathcal{A}$. Soit alors $f \in \mathcal{A}(X,Y)$; nous appellerons transposée de f (relativement à la catégorie $\mathcal{A}$ et à l'objet privilégié Q) l'application qui à tout $\varphi \in \mathcal{A}(Y,Q)$ fait correspondre $\varphi \,.\, f \in \mathcal{A}(X,Q)$. En fait, dans ce qui suit, quand nous parlons de la transposée t_f d'une certaine application f , nous n'indiquons souvent que les espaces de départ et d'arrivée de

t_f (c'est-à-dire $\mathcal{A}(Y,Q)$ et $\mathcal{A}(X,Q)$), pensant que la catégorie $\mathcal{A}$ et l'objet privilégié Q s'imposent naturellement à l'esprit.

Par exemple, prenons pour $\mathcal{A}$ la catégorie des ensembles et des applications, et pour objet privilégié $\mathbf{C}$. Soient $I \supseteq J$ deux ensembles (finis ou non), nous noterons

$$P(I,J) : \mathbf{C}^I \to \mathbf{C}^J$$

la transposée de l'injection canonique de J dans I, c'est-à-dire <u>l'application qui, dans toute famille</u> $(\lambda_i)_{i\in I}$, <u>consiste à supprimer les termes dont l'indice n'appartient pas à</u> J. En particulier, notons Δn l'ensemble des n premiers entiers positifs ; comme on a $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{\Delta n}$, l'application

$$P(\Delta(n+p),\Delta n) : \mathbf{C}^{n+p} \to \mathbf{C}^n$$

est l'application qui consiste à supprimer les p dernières coordonnées.

Soit E un ensemble, et soit $\varphi : \Delta n \to E$ une famille finie d'éléments de E ; l'image a de φ est une partie finie de E, et on peut définir une application

$$^t\varphi : \mathbf{C}^a \to \mathbf{C}^n$$

comme transposée de φ (considérée comme à valeurs dans a).

4° - <u>Algèbres</u>.

Toutes les <u>algèbres</u> considérées dans ce travail sont des <u>algèbres sur</u> $\mathbf{C}$, <u>commutatives et unitaires</u>. Quand on parlera de <u>morphismes</u>, sans préciser davantage, il s'agira d'applications <u>linéaires</u>, <u>multiplicatives</u>, <u>unitaires</u> et <u>continues</u> d'une algèbre topologique dans une autre. Les topologies dont on munira les algèbres seront toujours, sauf au chapitre I n°1, localement multiplicativement convexes.

Soient B et B' deux algèbres topologiques et $L : B \to B'$ un morphisme ; on définit deux transposées de L, la <u>transposée algébrique</u> de $\hat{B}'_{alg}$ dans $\hat{B}_{alg}$, et la <u>transposée topologique</u> de $\hat{B}'_{top}$ dans $\hat{B}_{top}$.

Les espaces $\hat{B}_{alg}$ et $\hat{B}_{top}$ sont naturellement plongés dans l'espace produit $\mathbf{C}^B$, qui est aussi l'espace des applications de B dans $\mathbf{C}$, muni de la topologie de la convergence simple.

Soit a une partie finie de B, on note $\hat{\hat{a}} : \mathbf{C}^B \to \mathbf{C}^a$ l'application (notée aussi $P(B,a)$) transposée de l'injection canonique de a dans B.

Soit $a : \Delta n \to B$ une famille finie d'éléments de B, on note $\hat{\hat{a}} : \mathbf{C}^B \to \mathbf{C}^n$ la transposée de a

Que a soit une famille ou une partie finie, on appelle <u>spectres algébrique</u> et <u>topologique</u> de a les ensembles

$$sp_{alg}a = \hat{a}(\hat{B}_{alg}) ,$$

$$sp_{top}a = \hat{a}(\hat{B}_{top}) ;$$

et on appelle <u>transformées de Gelfand algébrique et topologique</u> de a les applications

$$\hat{a}_{alg} = \hat{a} \mid \hat{B}_{alg} ,$$

$$\hat{a}_{top} = \hat{a} \mid \hat{B}_{top} ;$$

enfin on pose, pour tout $\chi \in \hat{A}_{alg}$,

$$\chi(a) = \hat{a}(\chi) .$$

Remarquons que si a est une famille finie on retombe bien sur les notations de l'introduction ci-dessus.

Pour a partie réduite à un seul élément, les applications $a \to \hat{a}_{top}$ et $a \to \hat{a}_{alg}$ seront appelées <u>transformations de Gelfand algébrique et topologique</u> de B .

Pour une <u>algèbre dont tous les caractères sont continus</u>, ces notations se simplifient ; l'ensemble $\hat{B}_{top} = \hat{B}_{alg}$ sera noté $\hat{B}$ et appelé <u>spectre</u> de B ; l'ensemble $sp_{top}a = sp_{alg}a$ sera noté $sp\ a$ et appelé <u>spectre</u> de a ; l'application $\hat{a}_{top} = \hat{a}_{alg}$ sera notée $\hat{a}$ et appelée <u>transformée de Gelfand de</u> a .

Mettons enfin le lecteur en garde contre le fait que les notations du présent travail diffèrent légèrement de celle de [4] . Ce qui est noté $\hat{B}$, $\hat{a}$ et $sp\ a$ dans [4] est noté $\hat{B}_{top}$, $\hat{a}_{top}$ et $sp_{top}a$ dans le présent article ; et ce qui est appelé spectre dans [4] est appelé spectre topologique dans le présent article. Néanmoins, pour une algèbre ayant tous ses caractères continus, les notations et la terminologie du présent article coïncident avec celles de [4] .

***

- CHAPITRE I -

PRELIMINAIRES

1° - Conditions de densité du spectre topologique dans le spectre algébrique.

L'espace produit $\mathbb{C}^B$ est limite projective des espaces $\mathbb{C}^a$, quand a décrit l'antifiltre $\mathcal{F}$ des parties finies de B , les applications canoniques étant les $\hat{\hat{a}}$. D'autre part on sait que dans une limite projective, tout sous ensemble est dense dans la limite projective de ses images canoniques ; ici les ensembles $\hat{B}_{top}$ et $\hat{B}_{alg}$ sont donc denses dans $\varprojlim sp_{top}a$ et $\varprojlim sp_{alg}a$, respectivement. Mais il est facile de voir que $\hat{B}_{alg}$ est complet, on a donc

$$\hat{B}_{alg} = \varprojlim_{\mathcal{F}} sp_{alg}a . \tag{1}$$

Par contre, $\hat{B}_{top}$ n'est généralement pas égal à la limite projective des $sp_{top}a$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1. Soit X le semi-segment de droite transfinie $[0,\Omega[$, où Ω désigne le plus petit ordinal non dénombrable ; soit $B = \mathcal{C}(X)$, on peut alors montrer que, pour toute partie finie a de B , on a $sp_{top}a = sp_{alg}a$, et que cependant $\hat{B}_{top} \neq \hat{B}_{alg}$.

Ce qui précède cet exemple nous donne immédiatement une condition de densité de $\hat{B}_{top}$ dans $\hat{B}_{alg}$.

Proposition 1. Soit B une algèbre topologique quelconque ; on suppose que pour toute famille finie a d'éléments de B on a

$$sp_{top}a = sp_{alg}a ;$$

alors $\hat{B}_{top}$ est dense dans $\hat{B}_{alg}$.

Indiquons un cas où cette proposition s'applique

Proposition 2. Soit B une algèbre topologique. On suppose que, pour toute famille finie $(a_1,\ldots,a_n)$ d'éléments de B telle que les fonctions $\hat{\hat{a}}_1,\ldots,\hat{\hat{a}}_n$ soient sans zéro commum dans $\hat{B}_{top}$, il existe des éléments $b_1,\ldots,b_n$ de B tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = e .$$

Alors toute partie finie de B a son spectre algébrique égal à son spectre topologique.

Démonstration : Supposons qu'il existe une partie finie a de B et un point $z \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$z \in (sp_{alg} a) \setminus (sp_{top} a) \quad ;$$

et appelons $a_1, \dots, a_n$ les éléments de a . On peut, en modifiant les a_i , se ramener au cas où $z = 0$. Alors il existe $\chi_o \in \hat{B}_{alg}$ tel que $\chi_o(a) = 0$; mais, pour tout $\chi \in \hat{B}_{top}$ on a $\chi(a) \neq 0$; les $\hat{a}_i$ sont donc sans zéro commun sur $\hat{B}_{top}$, il existe par conséquent $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = e \quad ;$$

mais alors

$$\chi_o(e) = \sum_{i=1}^{n} \chi_o(a_i)\, \chi_o(b_i) = 0 \ ,$$

d'où contradiction puisque $\chi_o(e) = 1$. ∎

Signalons au passage que l'idée d'un résultat de ce genre est due à Michael (cf. [11] proposition 12-5).

Appliquons cette proposition à certaines algèbres qui interviendront constamment par la suite.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soit $\mathcal{V}$ une variété étalée dans $\mathbb{C}^n$ et réunion dénombrable de compacts</u>. <u>Alors l'algèbre $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ a tous ses caractères continus et son spectre est l'enveloppe d'holomorphie $\overset{*}{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$</u> .

<u>Démonstration</u> : D'après un théorème de Rossi ([13] théorème 2-6), $\overset{*}{\mathcal{V}}$ est le spectre topologique de l'algèbre $\mathcal{O}(\mathcal{V})$, laquelle s'identifie alors à $\mathcal{O}(\overset{*}{\mathcal{V}})$. D'après le théorème des zéros de Cartan et les propositions 1 et 2 ci-dessus, le spectre topologique de $\mathcal{O}(\overset{*}{\mathcal{V}})$ est dense dans son spectre algébrique. Enfin, d'après un théorème de Guennebaud ([8] proposition 3), le spectre topologique de l'algèbre métrisable $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ est fermé dans son spectre algébrique. ∎

Signalons que ce résultat était déjà connu, au moins dans le cas où $\overset{*}{\mathcal{V}}$ est uniforme (cf. [11] théorème 12-7).

2° - <u>Algèbres polynomiales</u>.

Soit X une partie quelconque de $\mathbb{C}^n$; on note $\mathcal{P}(X)$ la sous-algèbre topologique adhérence dans $\mathcal{C}(X)$ de l'ensemble des fonctions polynômes de X dans $\mathbb{C}$; on appelle <u>enveloppe</u> <u>polynomialement</u> <u>convexe</u> de X le spectre topologique $\tilde{X}$ de $\mathcal{P}(X)$, et l'on dit que X est polynomialement convexe si $X = \tilde{X}$.

Avec ces définitions, il est bien connu que, pour un compact K de $\mathbb{C}^n$, l'enveloppe $\tilde{K}$ est le compact constitué par les $z \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout polynôme P on ait

$$|P(z)| \leq \sup \{ |P(z')| \ ; \ z' \in K \} \ .$$

Il est alors facile de voir que $\mathcal{P}(K)$ s'identifie à $\mathcal{P}(\tilde{K})$, les fonctions appartenant à $\mathcal{P}(K)$ se prolongeant canoniquement en des fonctions sur $\tilde{K}$. Mais, par ailleurs, $\mathcal{P}(\tilde{K})$ est égale à l'algèbre $\mathcal{H}_2(\tilde{K})$, adhérence dans $\mathcal{C}(\tilde{K})$ des restrictions à $\tilde{K}$ de fonctions analytiques au voisinage de $\tilde{K}$ dans $\mathbb{C}^n$ (cf. par exemple [9] 3e partie § 6-3) .

Soit maintenant X un ouvert de $\mathbb{C}^n$; par passage à la limite projective suivant l'antifiltre des compacts de X on voit aisément que $\tilde{X}$ est *ouvert et est la réunion des enveloppes polynomialement convexes des compacts de* X , que toute fonction appartenant à $\mathcal{P}(X)$ se prolonge canoniquement à $\tilde{X}$ et que les algèbres $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}(\tilde{X})$ et $\mathcal{O}(\tilde{X})$ sont ainsi canoniquement isomorphes. En particulier, d'après ce qu'on a vu plus haut, $\mathcal{P}(X)$ a tous ses caractères continus et on a $\overset{*}{\tilde{X}} = \tilde{X}$. En particulier, $\tilde{X}$ *est une variété de Stein*.

Pour une partie H quelconque de $\mathbb{C}^n$, nous noterons $\overset{\approx}{H}$ *l'intersection des ouverts polynialement convexes contenant* H . Signalons qu'on pourrait montrer qu'en général $\overset{\approx}{H}$ est distinct de $\tilde{H}$ (sauf si H est ouvert ou compact).

3° - *Algèbres localement multiplicativement convexes*.

Une algèbre topologique B est dite *localement multiplicativement convexe* (en abrégé l.m.c.) si son origine possède une *base de voisinages convexes, équilibrés et idempotents*. Il revient au même de dire que la topologie de B est définie par une *famille filtrante de semi-normes sous-multiplicatives*.

On sait qu'une algèbre topologique unitaire B est dite à *inverse continu* si l'ensemble des éléments inversibles de B est ouvert, et si de plus l'application $x \to x^{-1}$ est continue sur cet ensemble. Si B est l.m.c., la 2e de ces conditions est toujours réalisée (cf. [11] proposition 2-8). Signalons qu'inversement, toute algèbre localement convexe à inverse continu est l.m.c. (cf.[16]). Rappelons enfin qu'une algèbre à inverse continu a tous ses caractères continus (cf. par exemple [9] 2e partie § 1-7).

Dans les chapitres qui suivent nous nous intéresserons à des *algèbres l.m.c. séparées et complètes*. Pour un élément x d'une telle algèbre, les 3 propriétés suivantes sont équivalentes (cf. [11] théorème 5-4) :

1° - x est inversible,

2° - x n'est annulé par aucun caractère,

3° - x n'est annulé par aucun caractère continu.

La propriété des algèbres l.m.c. qui nous servira le plus est l'existence du calcul f.h.(cf.[4]) . D'autre part, il est facile de montrer que, *pour qu'une algèbre l.m.c. séparée complète soit à inverse continu il faut et il suffit qu'elle ait son spectre topologique compact et sa transformation de Gelfand topologique continue*.

Nous utiliserons souvent, par la suite, des limites inductives d'algèbres. Donnons un moyen de décrire leurs spectres.

Soit B une algèbre sur $\mathbb{C}$, commutative et unitaire. On suppose que B est limite inductive des algèbres (non topologiques) B_i dans la catégorie des algèbres commutatives et unitaires et des applications linéaires, multiplicatives et unitaires. Supposons les B_i munies de topologies l.m.c. rendant continues les applications canoniques $B_i \to B_j$, alors la plus fine des topologies l.m.c. rendant continues les applications canoniques $B_i \to B$ fait de B la limite inductive des B_i dans la catégorie des algèbres l.m.c. et des morphismes (cela résulte de la proposition 1 de [20]). Nous déduisons alors facilement le résultat suivant :

Proposition 3 - Le spectre algébrique (resp. topologique) de B est limite projective des spectres algébriques (resp. topologiques) des B_i, les applications canoniques décrivant cette limite projective s'obtenant par transposition des morphismes décrivant B comme limite inductive des B_i.

***

- CHAPITRE II -

FORMULATION GLOBALE DU CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE

Dans tout ce chapitre, A sera une algèbre sur $\mathbb{C}$, commutative, unitaire, localement multiplicativement convexe, séparée et complète.

1° - Les algèbres holomorphe et polynomiale globales de A.

Soit V un voisinage ouvert de $\hat{A}_{top}$ dans $\mathbb{C}^A$, et soit a une partie finie de A. La projection $\hat{a}$ est une application continue et ouverte ; par conséquent, quand V décrit l'ensemble des voisinages ouverts de $\hat{A}_{top}$ dans $\mathbb{C}^A$, $\hat{a}(V)$ décrit l'ensemble des voisinages ouverts dans $\mathbb{C}^a$ de l'ensemble

$$sp_{top}a = \hat{a}(\hat{A}_{top}) .$$

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de A et $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages ouverts de $\hat{A}_{top}$ dans $\mathbb{C}^A$. L'ensemble $\mathcal{F} \times \mathcal{V}$ sera muni d'une relation de préordre définie par $(b,W) \geqslant (a,V)$ si l'on a $b \supseteq a$ et

$$P(b,a)(\hat{b}(W)) = \hat{a}(W) \subseteq \hat{a}(V) .$$

Pour cette relation de préordre, l'ensemble $\mathcal{F} \times \mathcal{V}$ est évidemment filtrant supérieurement.

Soient $(b,W) \geqslant (a,V)$ deux éléments de $\mathcal{F} \times \mathcal{V}$; alors la restriction de $P(b,a)$ est une fonction polynôme de $\hat{b}(W)$ dans $\hat{a}(V)$ qui nous donne par transposition trois morphismes:

$$M\mathcal{C}^{b,W}_{a,V} : \mathcal{C}(\hat{a}(V)) \to \mathcal{C}(\hat{b}(W)) ,$$

$$M\mathcal{O}^{b,W}_{a,V} : \mathcal{O}(\hat{a}(V)) \to \mathcal{O}(\hat{b}(W)) ,$$

$$M\mathcal{P}^{b,W}_{a,V} : \mathcal{P}(\hat{a}(V)) \to \mathcal{P}(\hat{b}(W)) .$$

Ces morphismes forment trois systèmes inductifs d'algèbres l.m.c. indexés par $\mathcal{F} \times \mathcal{V}$. Nous appellerons par définition algèbre holomorphe globale de A, l'algèbre l.m.c.

$$\mathcal{O}_A = \varinjlim_{\mathcal{F}\times\mathcal{V}} \mathcal{O}(\hat{a}(V)) ,$$

et algèbre polynomiale globale de A l'algèbre

$$\mathcal{P}_A = \varinjlim_{\mathcal{F}\times\mathcal{V}} \mathcal{P}(\hat{a}(V)) .$$

Nous noterons les morphismes canoniques

$$M\mathcal{O}_{a,V} : \mathcal{O}(\hat{a}(V)) \to \mathcal{O}_A \ ,$$

$$M\mathcal{S}_{a,V} : \mathcal{S}(\hat{a}(V)) \to \mathcal{S}_A \ .$$

Donnons deux autres descriptions de $\mathcal{S}_A$. Pour un élément quelconque (a,V) de $\mathfrak{F} \times \mathcal{V}$ on a $\mathcal{O}(\widetilde{\hat{a}(V)}) = \mathcal{S}(\hat{a}(V))$, d'où

$$\mathcal{S}_A = \varinjlim_{\mathfrak{F}\times\mathcal{V}} \mathcal{O}(\widetilde{\hat{a}(V)}) \ ;$$

d'autre part, on définit un élément V' de $\mathcal{V}$ en posant $V' = \overset{-1}{a}(\widetilde{\hat{a}(V)})$; on a alors $\widetilde{\hat{a}(V)} = \hat{a}(V')$; notant $\mathfrak{T}$ *l'ensemble des couples* $(a,V) \in \mathfrak{F}\times\mathcal{V}$ *tels que* $\hat{a}(V)$ *soit polynomialement convexe*, on trouve alors

$$\mathcal{S}_A = \varinjlim_{\mathfrak{T}} \mathcal{O}(\hat{a}(V)) \ .$$

Les morphismes injectifs canoniques $\mathcal{S}(\hat{a}(V)) \to \mathcal{O}(\hat{a}(V))$ donnent, par passage à la limite inductive, un *morphisme canonique injectif* $\mathcal{S}_A \to \mathcal{O}_A$. Ce morphisme peut aussi être considéré comme le morphisme canonique de la limite inductive partielle (suivant $\mathfrak{T}$) dans la limite inductive totale des algèbres $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$. Nous pouvons donc considérer $\mathcal{S}_A$ comme une sous-algèbre (non topologique) de $\mathcal{O}_A$. Signalons que nous ignorons si la topologie de $\mathcal{S}_A$ est celle induite par $\mathcal{O}_A$; signalons aussi que nous ne savons ni si $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{O}_A$ sont séparées, ni si elles sont complètes.

Un élément de $\mathcal{O}_A$ c'est une *classe d'équivalence de triades* (a,V,f) , *où* $(a,V) \in \mathfrak{F}\times\mathcal{V}$ *et* $f \in \mathcal{O}(\hat{a}(V))$, deux telles triades (a,V,f) et (b,W,g) étant identifiées s'il existe une triade (c,U,h) telle que

$$(a,V) \leqslant (c,U) \geqslant (b,W)$$

et que

$$M\mathcal{O}_{a,V}^{c,U}(f) = h = M\mathcal{O}_{b,W}^{c,U}(g) \ .$$

Si ξ est la classe de la triade (a,V,f) , on dira inversement que (a,V,f) est un *représentant* de ξ . Notons qu'il faut se garder de confondre les "triades" dont il est question ici avec les "triplets" dont on se sert dans le calcul f.h. multiforme (cf. [4]).

La sous-algèbre $\mathcal{S}_A$ de $\mathcal{O}_A$ est l'ensemble des $\xi \in \mathcal{O}_A$ ayant un représentant (a,V,f) tel que $f \in \mathcal{S}(\hat{a}(V))$; c'est aussi l'ensemble des $\xi \in \mathcal{O}_A$ ayant un représentant (a,V,f) tel que $(a,V) \in \mathfrak{T}$.

Soit $(a,V) \in \mathfrak{F}\times\mathcal{V}$, soit $x \in a$ et soit $f_x : \mathbb{C}^a \to \mathbb{C}$ la fonction coordonnée d'indice x . Alors la triade (a,V,f_x) sera appelée une *triade*

<u>élémentaire</u>, et l'élément x sera appelé sa <u>base</u>. Il est facile de voir que <u>les classes des triades élémentaires engendrent $\mathcal{S}_A$</u> en tant qu'algèbre topologique.

<u>Exemple 2</u>. Les algèbres $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{S}_A$ ne sont, en général, des algèbres de fonctions ni sur $\hat{A}_{top}$, ni sur $\hat{A}_{alg}$. Par exemple, pour $A = \mathbb{C}$, il est facile de voir que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est un espace de germes de fonctions $\mathbb{C}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, au voisinage d'un certain point χ_o qui s'identifie au spectre (réduit à 1 seul point) de l'algèbre $\mathbb{C}$; et on voit aisément qu'on peut trouver deux tels germes distincts et prenant la même valeur en χ_o .

D'après le corollaire 1 et la proposition 3 , <u>les algèbres $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{S}_A$ ont tous leurs caractères continus, et l'on a</u>

$$\hat{\mathcal{O}}_A = \widehat{\varprojlim_{\mathbb{F}\times\mathcal{N}} \overset{*}{\hat{a}}(V)}^{\,*}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_A = \widetilde{\varprojlim_{\mathbb{F}\times\mathcal{N}} \overset{*}{\hat{a}}(V)} = \varprojlim_{\mathcal{T}} \overset{*}{\hat{a}}(V)$$

***

2° - <u>La formulation globale du calcul fonctionnel holomorphe</u>.

Nous allons maintenant utiliser les notions que nous venons d'introduire pour donner une nouvelle formulation de l'existence du calcul fonctionnel holomorphe $\circledast u(A)$ (cf. [4] § II).

Ce calcul f.h. associe à toute famille finie φ d'éléments de A un certain morphisme $\circledast u(A)(\varphi)$. Mais une famille finie φ d'éléments de A c'est une application de Δn dans A . Supposons φ injective et soit $a = \varphi(\Delta n)$ l'image de φ ; par transposition on obtient un morphisme

$${}^{t}\varphi : \mathbb{C}^a \to \mathbb{C}^n$$

dont la restriction est évidemment, par définition, une bijection de $sp_{top} a$ sur $sp_{top} \varphi$; une deuxième transposition nous donne un autre isomorphisme

$${}^{tt}\varphi : \mathcal{O}(sp_{top}\varphi) \to \mathcal{O}(sp_{top} a) .$$

Soit Ψ une autre injection de Δn dans A , telle que l'on ait encore $\Psi(\Delta n) = a$; la compatibilité de $\mathcal{H}u(A)$ avec les simplifications de type 3 (cf. [4] début du § II) nous donne :

$$\mathcal{H}u(A)(\Psi) \circ ({}^{tt}\Psi)^{-1} \circ {}^{tt}\varphi = \mathcal{H}u(A)(\varphi) ,$$

car on associe, de façon évidente, à $\Psi \circ \varphi^{-1} : \Delta n \to \Delta n$ une simplification de type 3.

Pour $a \in \mathcal{F}$ et $V \in \mathcal{M}$, <u>nous définissons un morphisme de</u> $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$ <u>dans</u> A <u>en posant</u>

$$\mathcal{H}'(a,V) = \mathcal{H}u(A)(\varphi) \circ ({}^{tt}\varphi)^{-1} \circ M(\hat{a}(V), sp_{top}a)$$

où φ est une famille finie injective d'image a , et où $M(\hat{a}(V), sp_{top}a)$ est le morphisme canonique (restriction) de $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$ dans $\mathcal{O}(sp_{top}a)$ (la valeur trouvée pour $\mathcal{H}'(a,V)$ ne dépendant pas du choix de φ d'après ce qu'on vient de voir).

Soit (a,V,f) une triade élémentaire ; alors le fait que $\mathcal{H}u(A)(\varphi)$ soit un morphisme f. h. (pour φ famille finie injective d'image a) nous donne (cf. 4 § II)

$$\mathcal{H}'(a,V)\ (f_x) = x$$

D'autre part soient $(a,V) \leq (b,W)$ deux éléments de $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$; la <u>simplifiabilité</u> du calcul f. h. $\mathcal{H}u(A)$ nous donne

$$\mathcal{H}'(b,W) \circ M\ \mathcal{O}^{b,W}_{a,V} = \mathcal{H}'(a,V) .$$

Par passage à la limite suivant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$ on trouve <u>deux morphismes</u>

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}_A \to A , \qquad \mathcal{H}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_A \to A ,$$

<u>caractérisés respectivement</u> par

$$\forall (a,V) \in \mathcal{T},\ \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \circ M\ \mathcal{O}_{a,V} = \mathcal{H}'(a,V) ,$$

$$\forall (a,V) \in \mathcal{F} \times \mathcal{M},\ \mathcal{H}_{\mathcal{O}} \circ M\ \mathcal{O}_{a,V} = \mathcal{H}'(a,V) ,$$

Evidemment, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ est la restriction de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ à $\mathcal{S}_A$.

Nous appellerons <u>morphisme fonctionnel holomorphe</u> (resp. <u>polynomial</u>) <u>global</u> tout morphisme de $\mathcal{O}_A$ (resp. $\mathcal{S}_A$) dans A transformant la classe de toute triade élémentaire en la base de cette triade. Ce que l'on vient de voir donne alors immédiatement la proposition suivante

<u>Proposition 4. Soit</u> A <u>une algèbre l. m. c. séparée complète, alors il existe un morphisme f. h. global de</u> $\mathcal{O}_A$ <u>dans</u> A .

Comme les classes des triades élémentaires engendrent $\mathcal{S}_A$ en tant qu'algèbre topologique, nous avons une proposition analogue

Proposition 5. Soit A une algèbre l. m. c. séparée complète ; alors il existe un et un seul morphisme fonctionnel polynomial global de $\mathfrak{S}_A$ dans A. ■

Indiquons encore que la compatibilité du calcul f. h $\mathfrak{M}u(A)$ avec les caractères continus nous donne, quels que soient $\chi \in \hat{A}_{top}$, $(a,V) \in \mathfrak{P} \times \mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{O}(\hat{a}(V))$, la relation

$$\chi \circ \mathfrak{M}'(a,V)\,(f) = f(\chi(a))$$

(le 2e membre de cette relation ayant bien un sens car $\chi(a) = \hat{a}(\chi)$ est élément de $sp_{top}a = \hat{a}(\hat{A}_{top})$ et à plus forte raison élément de $\hat{a}(V)$). Nous verrons plus loin que, dans certain cas, le calcul f. h est compatible avec les caractères discontinus.

Signalons enfin que $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ (et à plus forte raison $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}}$) n'est généralement pas injectif, même pour $A = \mathbb{C}$ (cf. ci-dessus exemple 2).

***

3° - Plongement de $\hat{\mathfrak{S}}_A$ dans $\mathbb{C}^A$.

Etant donné $a \in \mathfrak{P}$, nous noterons $\mathfrak{T}_a$ l'ensemble des couples $(a,V) \in \mathfrak{T}$. L'ensemble $\mathfrak{T}_a$ n'est jamais vide car il contient toujours le couple $(a,\mathbb{C}^A)$. De plus, il est immédiat que, lorsque (a,V) décrit $\mathfrak{T}_a$, $\hat{a}(V)$ décrit l'ensemble des voisinages ouverts polynomialement convexes de $sp_{top}a = \hat{a}(\hat{A}_{top})$; Par conséquent

(1) $$\bigcap_{\mathfrak{T}_a} \hat{a}(V) = (sp_{top}a)^{\approx} .$$

Soit $(a,V) \in \mathfrak{T}$; alors $\hat{a}(V)$ est une variété de Stein et par conséquent le spectre (algébrique et topologique) de $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$ est $\hat{a}(V)$; plus précisément les caractères de $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$ sont les évaluations des fonctions en les points de $\hat{a}(V)$.

D'après la proposition 3, l'espace topologique $\hat{\mathfrak{S}}_A$ est <u>limite du système projectif d'espaces topologiques, indexé par</u> $\mathfrak{T}$ <u>et constitué par les espaces topologiques</u> $\hat{a}(V)$ et les applications continues ${}^t M\mathcal{O}^{b,W}_{a,V}$, transposées algébriques (et topologiques) des $M\mathcal{O}^{b,W}_{a,V}$; de plus les applications canoniques de $\hat{\mathfrak{S}}_A$ sur les $\hat{a}(V)$ sont alors les ${}^t M\mathcal{O}_{a,V}$.

Par construction des $M\mathcal{O}^{b,W}_{a,V}$, on a :

$$ {}^t M\mathcal{O}^{b,W}_{a,V} = P(b,a)|\hat{b}(W) \quad . $$

Utilisant cette égalité, l'égalité (1) (page précédente), et la caractérisation des limites projectives par leur propriété universelle, on trouve que l'espace topologique $\hat{\mathfrak{S}}_A$ <u>est également limite projective du système projectif d'espaces topologiques indexé par</u> $\mathfrak{F}$, <u>et constitué par les espaces</u> $(sp_{top}a)^{\approx}$ <u>et les applications</u> $P(b,a)|(sp_{top}b)^{\approx}$ (il est facile de voir que $P(b,a)$ envoie $(sp_{top}b)^{\approx}$ dans $(sp_{top}a)^{\approx}$) .

Mais $\mathbb{C}^A$ est limite projective du système projectif, indexé par $\mathfrak{F}$, et constitué par les espaces $\mathbb{C}^a$ et les applications $P(b,a)$. Comme les sous-espaces topologiques passent à la limite projective, $\hat{\mathfrak{S}}_A$ <u>est sous-espace topologique de</u> $\mathbb{C}^A$; plus précisément, comme les applications canoniques de $\mathbb{C}^A$ sur les $\mathbb{C}^a$ sont les $\hat{\hat{a}}$, on a

$$ \hat{\mathfrak{S}}_A = \bigcap_{a\in\mathfrak{F}} \hat{\hat{a}}^{-1}\left[(sp_{top}a)^{\approx}\right] , $$

et les applications canoniques de $\hat{\mathfrak{S}}_A$ sur les $(sp_{top}a)^{\approx}$ sont les restrictions des $\hat{\hat{a}}$.

La double description de $\hat{\mathfrak{S}}_A$ comme limite projective nous donne, quel que soit $(a,V)\in\mathfrak{T}$, le triangle commutatif

$$ \begin{tikzcd} & \hat{\mathfrak{S}}_A \arrow[dl, "\hat{\hat{a}}|\hat{\mathfrak{S}}_A"'] \arrow[dr, "{}^t M\mathcal{O}_{a,V}"] & \\ (sp_{top}a)^{\approx} \arrow[rr] & & \hat{a}(V) \end{tikzcd} $$

où la flèche horizontale est l'injection canonique. Par conséquent, quels que soient $\omega\in\hat{\mathfrak{S}}_A$ et $(a,V)\in\mathfrak{T}$, les points $\hat{\hat{a}}(\omega)\in(sp_{top}a)^{\approx}$ et ${}^t M\mathcal{O}_{a,V}(\omega)\in\hat{a}(V)$ sont confondus ; autrement dit <u>le caractère</u> $\omega\circ M\mathcal{O}_{a,V}$ <u>de</u> $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$ <u>est l'évaluation en</u> $\hat{\hat{a}}(\omega)$.

Quant au spectre de $\mathcal{O}_A$, un raisonnement analogue ne permettrait pas de le plonger dans $\mathbb{C}^A$; en effet, $\mathcal{O}_A$ est limite projective, indexée par $\mathfrak{F}\times\mathfrak{V}$, des enveloppes d'holomorphie des $\hat{\hat{a}}(V)$, lesquelles enveloppes ne se plongent pas dans les $\mathbb{C}^a$.

***

4° - Identification des spectres algébriques de A et $\mathfrak{S}_A$.

Les transposées algébrique et topologique du morphisme $\Theta_{\mathfrak{S}}$ de $\mathfrak{S}_A$ sur A sont des applications continues et injectives de $\hat{A}_{alg}$ et $\hat{A}_{top}$ dans $\hat{\mathfrak{S}}_A$ (l'une de ces applications étant d'ailleurs la restriction de l'autre).
Nous noterons ${}^t\Theta_{\mathfrak{S}}$ la transposée algébrique. Comme les spectres de A et $\mathfrak{S}_A$ sont naturellement plongés dans $\mathbb{C}^A$, le résultat suivant répond à une question naturelle.

Proposition 6. La transposée algébrique de $\Theta_{\mathfrak{S}}$ est la restriction à $\hat{A}_{alg}$ de l'identité de $\mathbb{C}^A$.

Démonstration : Un caractère χ (continu ou non) de A s'identifie au point de $\mathbb{C}^A$ dont la projection sur chaque $\mathbb{C}^a$ est $\chi(a)$. Nous voulons montrer que χ et $\chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}}$ s'identifient au même point de $\mathbb{C}^A$. Il revient au même de montrer que, pour tout $a \in \mathfrak{F}$, la projection de $\chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}}$ sur $\mathbb{C}^a$ est $\chi(a)$.
Vu la façon dont on a plongé $\hat{\mathfrak{S}}_A$ dans $\mathbb{C}^A$, il revient également au même de montrer que, pour tout couple $(a,V)\in\mathfrak{T}$, le caractère $\chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}} \circ M\mathcal{O}_{a,V}$ de $\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V))$ est l'évaluation en $\chi(a)$.

Pour χ continu, cette dernière assertion pourrait se déduire de la compatibilité du calcul f. h. avec les caractères continus ; mais de toute façon, pour χ quelconque, elle résultera immédiatement du lemme 1 ci-dessous, puisque, par définition de $\Theta_{\mathfrak{S}}$, on a $\Theta_{\mathfrak{S}} \circ M\mathcal{O}_{a,V} = \Theta'(a,V)$. ∎

Lemme 1. Soit $(a,V)\in\mathfrak{T}$ et soit $f\in\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V))$. Alors pour tout $\chi\in\hat{A}_{alg}$ on a $\chi(a)\in\hat{\hat{a}}(V)$ et

$$\chi(\Theta'(a,V)(f)) = f(\chi(a)) \quad .$$

Démonstration : Soit $f_x : \mathbb{C}^a \to \mathbb{C}$ la fonction coordonnée d'indice $x \in a$; on a, par définition du calcul f. h.,

$$x = \mathcal{H}'(a,V)(f_x|\hat{a}(V))$$

d'où

(1) $$\chi(x) = \chi \circ \mathcal{H}'(a,V)(f_x|\hat{a}(V)) \quad .$$

De cette égalité, valable pour tout $x \in a$, on déduit, notant g l'injection canonique de $\hat{a}(V)$ dans $\mathbb{C}^a$,

$$\chi(a) = \chi \circ \mathcal{H}'(a,V)(g) \quad ;$$

mais $\hat{a}(V)$ est une variété de Stein, donc le caractère $\chi \circ \mathcal{H}'(a,V)$ de $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$ est l'évaluation en un point de $\hat{a}(V)$, donc $\chi(a)$ est une valeur prise sur $\hat{a}(V)$ par la fonction g ; autrement dit $\chi(a) \in \hat{a}(V)$.

Reste à montrer que

(2) $$\chi \circ \mathcal{H}'(a,V)(f) = f(\chi(a)) \quad ;$$

dans cette égalité le membre de droite est évidemment fonction continue de $f \in \mathcal{O}(\hat{a}(V))$, quant au membre de gauche il dépend, lui aussi, continûment de f car $\chi \circ \mathcal{H}'(a,V)$ est continu, comme tous les caractères de $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$. Il nous suffit donc, puisque les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\hat{a}(V))$, d'établir l'égalité (2) dans le cas où f est un polynôme et cela se déduit immédiatement de l'égalité (1) , valable pour tout $x \in a$. ■

<u>Théorème 1.</u> <u>La transposée algébrique du morphisme fonctionnel polynomial de</u> A <u>réalise un homéomorphisme du spectre algébrique de</u> A <u>sur le spectre de son algèbre polynomiale globale</u>.

Avant de démontrer ce théorème, établissons des lemmes techniques.

<u>Lemme 2.</u> <u>Soit</u> g <u>une fonction polynôme sur</u> $\mathbb{C}^A$ (c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{C}^A$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $b \in \mathcal{F}$ et f , fonction polynôme de $\mathbb{C}^b$ dans $\mathbb{C}$, avec $g = f \circ \hat{\hat{b}}$) . <u>Alors si</u> g <u>est nulle sur</u> $\hat{A}_{top}$, <u>elle est nulle sur</u> $\hat{\mathcal{S}}_A$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout entier positif k nous définissons un élément W_k de $\mathcal{V}$ en posant

$$W_k = \{w \in \mathbb{C}^A \; ; \; |g(w)| < 1/k\} \quad ;$$

alors les $\hat{\hat{b}}(W_k)$ sont polynomialement convexes, donc tous les couples (b, W_k) appartiennent à $\mathcal{T}$, et par conséquent

$$\bigcap_k \hat{\hat{b}}^{-1}(\hat{b}(W_k)) \supseteq \bigcap_{\mathcal{T}} \hat{\hat{a}}^{-1}(\hat{a}(V)) = \hat{\mathcal{S}}_A \quad .$$

Mais il résulte de la définition des W_k que l'on a $W_k = \hat{\hat{b}}^{-1}(\hat{b}(W_k))$, et que g est nulle sur $\bigcap_k W_k$; alors g est à plus forte raison nulle, sur $\hat{\mathfrak{S}}_A$. ∎

<u>Lemme 3</u>. <u>Soit</u> $\xi \in \mathfrak{S}_A$ <u>et soit</u> (a,V,f) <u>un représentant de</u> ξ , <u>avec</u> $(a,V) \in \mathfrak{Z}$. <u>Alors on a</u>

$$\hat{\xi}_{top} = f \circ \hat{\hat{a}}|\hat{\mathfrak{S}}_A \ .$$

<u>Démonstration</u> : Par définition, on a $\xi = M\,\mathcal{O}_{a,V}(f)$; donc si ω est un caractère de $\mathfrak{S}_A$, on a

$$\omega(\xi) = \omega \circ M\,\mathcal{O}_{a,V}(f) \ ,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\omega(\xi) = [{}^tM\,\mathcal{O}_{a,V}(\omega)]\,(f) \ ;$$

mais, vu la façon dont on a plongé $\hat{\mathfrak{S}}_A$ dans $\mathbb{C}^A$, le caractère ${}^tM\,\mathcal{O}_{a,V}(\omega)$ de $\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V))$ est l'évaluation en $\hat{\hat{a}}(\omega)$, ce qui donne

$$\omega(\xi) = f(\hat{\hat{a}}(\omega)) \ . \ ∎$$

<u>Lemme 4</u>. <u>Soit</u> B <u>la sous-algèbre de</u> $\mathfrak{S}_A$ <u>formée par les éléments ayant un représentant</u> (a,V,f) <u>où</u> f <u>est un polynôme</u>. <u>Soit</u> ω' <u>un caractère continu de</u> B , <u>et soit</u> $\xi \in B$ <u>tel que</u> $\mathfrak{N}_{\mathfrak{S}}(\xi) = 0$; <u>alors on a</u> $\omega'(\xi) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Soit (a,V,f) un représentant de ξ , où f est un polynôme (c'est-à-dire un polynôme en les fonctions coordonnées dans $\mathbb{C}^a$) , on a alors, par définition de $\mathfrak{N}_{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{S}}(\xi) = f(a)$. D'autre part, la fonction $g = f \circ \hat{\hat{a}}$ est une fonction polynôme sur $\mathbb{C}^A$; cette fonction est nulle sur $\hat{A}_{top}$ car

$$f \circ \hat{\hat{a}}|\hat{A}_{top} = (f(a))\hat{\ }_{top} = (\mathfrak{N}_{\mathfrak{S}}(\xi))\hat{\ }_{top} = 0 \ ;$$

le lemme 2 nous dit alors que g est nulle sur $\hat{\mathfrak{S}}_A$.

Mais B est dense dans $\mathfrak{S}_A$ (car, pour chaque $(a,V) \in \mathfrak{Z}$, les polynômes sont denses dans $\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V))$) , donc ω' se prolonge en caractère (continu) ω de $\mathfrak{S}_A$; on a alors

$$\omega'(\xi) = \omega(\xi) = \hat{\xi}_{top}(\omega) = f \circ \hat{\hat{a}}(\omega) = g(\omega) \ ,$$

et comme g est nulle sur $\hat{\mathfrak{S}}_A$, cela donne $\omega'(\xi) = 0$. ∎

<u>Démonstration du théorème 1</u> : puisque ${}^t\mathfrak{N}_{\mathfrak{S}}$ envoie $\hat{A}_{alg}$ dans $\hat{\mathfrak{S}}_A$ et est la restriction de l'identité de $\mathbb{C}^A$, il nous suffit de montrer maintenant que ${}^t\mathfrak{N}_{\mathfrak{S}}$ est surjective, c'est-à-dire que pour tout caractère ω de $\mathfrak{S}_A$ il existe un

caractère χ de A tel que

$$\omega = \chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}} .$$

Soit ω' la restriction de ω à B ; d'après le lemme 4, ω' est nul sur le noyau de $\Theta_{\mathfrak{S}}|B$, il existe donc un caractère (éventuellement discontinu) χ de A tel que

$$\omega' = \chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}}|B .$$

Alors ω et $\chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}}$ sont des caractères de $\mathcal{S}_A$ qui coïncident sur B ; mais B est dense dans $\mathcal{S}_A$ et tous les caractères de $\mathcal{S}_A$ sont continus, par conséquent

$$\omega = \chi \circ \Theta_{\mathfrak{S}} . \quad \blacksquare$$

***

5° - Description du spectre algébrique de A .

Le théorème 1 et la proposition 3 nous donnent des descriptions de $\hat{A}_{alg}$ comme limite projective :

$$\hat{A}_{alg} = \varprojlim_{\mathfrak{T}} \hat{\hat{a}}(V) = \lim_{\mathfrak{P}\times\mathfrak{T}} \widetilde{(\hat{\hat{a}}(V))} .$$

Compte tenu de de qu'on a vu au chapitre II - 3° , on peut donner une description de $\hat{A}_{alg}$ comme sous ensemble de $\mathbb{C}^A$.

Corollaire 2. *Le spectre algébrique de A étant plongé dans $\mathbb{C}^A$, on a l'égalité*

$$\hat{A}_{alg} = \bigcap_{a\in\mathfrak{P}} \overset{*}{\hat{a}}{}^{-1} [(sp_{top} a)^{\approx}] .$$

Donnons maintenant une description faisant intervenir (implicitement) le spectre de $\mathcal{O}_A$.

Soit $a \in \mathfrak{P}$, soit $x \in a$ et soit $f_x : \mathbb{C}^a \to \mathbb{C}$ la fonction coordonnée d'indice x . Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^a$. Le prolongement canonique de $f_x|U$ à $\overset{*}{U}$ est la seule fonction analytique sur $\overset{*}{U}$ qui prolonge $f_x|U$, c'est donc la composée de $\overset{*}{f}_x$ et de la projection canonique de $\overset{*}{U}$ sur $\mathbb{C}^a$. Notons $\tilde{\tilde{U}}$ l'image de $\overset{*}{U}$ par cette projection. On a vu que U est le spectre (algébrique et topologique) de $\mathcal{O}(U)$, par conséquent, si ω est un caractère de $\mathcal{O}(U)$, le nombre complexe $\omega(f_x|U)$ est une valeur prise sur $\overset{*}{U}$ par le composé de f_x et de la projection de $\overset{*}{U}$ sur $\tilde{U}$; il en résulte que $\omega(f_x|U)$ est une valeur prise sur $\tilde{U}$ par f_x .

Donnons nous maintenant de plus $V \in \mathcal{V}$ et $\chi \in \hat{A}_{alg}$. Par définition du calcul f. h. on a

$$x = \Theta'(a,V)(f_x|\hat{a}(V)) \quad ;$$

prenant $\hat{a}(V)$ pour U et $\chi \circ \Theta'(a,V)$ pour ω , on déduit de ce qui précède que le nombre $\chi(x)$ est une valeur prise sur $\overset{\sim}{\hat{a}(V)}$ par f_x . Comme ceci vaut pour tout $x \in a$, on en déduit que $\chi(a) \in \overset{\sim}{\hat{a}(V)}$. Enfin, ceci étant vrai quel que soit χ , on trouve

(1) $$sp_{alg}a \subseteq \overset{\sim}{\hat{a}(V)} \ .$$

Par ailleurs, $\widetilde{\hat{a}(V)}$ est une variété de Stein, on a donc

$$\overset{\sim}{\widetilde{\hat{a}(V)}} = \widetilde{\hat{a}(V)} \quad ;$$

D'autre part il est facile de voir que $U \subseteq U'$ implique $\tilde{U} \subseteq \overset{\sim}{U'}$, en effet le rectangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^a & \longrightarrow & \mathbb{C}^a \end{array}$$

où les flèches sont les injections canoniques, donne, par prolongement aux enveloppes d'holomorphie, le rectangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overset{*}{U} & \longrightarrow & \overset{*}{U'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^a & \longrightarrow & \mathbb{C}^a \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les projections canoniques, et dont on déduit aisément que $\tilde{U} \subseteq \overset{\sim}{U'}$. De l'inclusion de $\hat{a}(V)$ dans $\widetilde{\hat{a}(V)}$ on déduit alors

(2) $$\overset{\sim}{\hat{a}(V)} \subseteq \widetilde{\hat{a}(V)} \ .$$

Pour toute partie X de $\mathbb{C}^a$, notons $\overset{\approx}{X}$ l'intersection des $\tilde{U}$ quand U décrit l'ensemble des voisinages ouverts de X dans $\mathbb{C}^a$; alors le corollaire 2 , les inclusions (1) et (2) que l'on vient de voir et l'égalité (1) du 1° du chapitre I nous donnent une nouvelle description de $\hat{A}_{alg}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{C}^A$

$$\hat{A}_{alg} = \bigcap_{a \in \mathcal{F}} \hat{\hat{a}}^{-1}(sp_{top}a)^{**} .$$

* * *

6° - Algèbres d'Arens-Calderón

Par définition, nous dirons que A est une algèbre d'Arens-Calderón si l'ensemble $\mathcal{C}$ est cofinal dans l'ensemble préordonné $\mathcal{F} \times \mathcal{V}$. On a alors, évidemment, $\mathcal{O}_A = \mathcal{S}_A$; en particulier les propositions 4 et 5 se réduisent à une seule.

Montrons que, dans ce cas, le calcul f. h. est compatible avec les caractères discontinus.

Proposition 7. On suppose que A est une algèbre d'Arens-Calderón. Alors quels que soient $a \in \mathcal{F}$, $V \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V))$ et $\chi \in \hat{A}_{alg}$, on a $\chi(a) \in \hat{\hat{a}}(V)$ et

$$\chi(\mathfrak{G}'(a,V)(f)) = f(\chi(a)) .$$

Démonstration : Soit $(b,W) \in \mathcal{C}$ tel que $(b,W) \geq (a,V)$. On a, alors

$$\chi(a) = P(b,a)(\chi(b)) ;$$

mais le lemme 1 nous dit que $\chi(b) \in \hat{\hat{b}}(W)$, d'où

$$\chi(a) \in P(b,a)(\hat{\hat{b}}(W)) = \hat{\hat{a}}(W) \subseteq \hat{\hat{a}}(V) .$$

Définissons $g \in \mathcal{O}(\hat{\hat{b}}(W))$ en posant

$$g = M\mathcal{O}_{a,V}^{b,W}(f) = f \circ P(b,a)|\hat{\hat{b}}(W) ;$$

le lemme 1 nous donne alors

$$\chi(\mathfrak{G}'(b,W)(g)) = g(\chi(b)) ;$$

Cette égalité, compte tenu de la définition de g et de la simplifiabilité du calcul f. h. , peut encore s'écrire :

$$\chi(\text{Ⓗ}'(a,V)(f)) = f(\chi(a)) \quad . \ \blacksquare$$

Corollaire 3. On suppose que A est une algèbre d'Arens-Calderon. Alors, pour tout $a \in \mathfrak{P}$, on a

$$sp_{alg} a = sp_{top} a \quad .$$

Démonstration : De la définition de $sp_{alg} a$ et de la proposition 7 résulte aussitôt que

$$sp_{top} a \subseteq sp_{alg} a \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \hat{\hat{a}}(V) \quad ;$$

mais il est facile de voir que les termes extrêmes de cette chaine d'inclusions sont égaux (cf. début du § II - 1°). ∎

Corollaire 4. On suppose que A est une algèbre d'Arens-Calderon. Alors on a

$$\hat{A}_{alg} = \varprojlim_{a \in \mathfrak{P}} sp_{top} a = \varprojlim_{a \in \mathfrak{P}} sp_{alg} a \quad ;$$

en particulier $\hat{A}_{top}$ est dense dans $\hat{A}_{alg}$

Cela résulte immédiatement du corollaire 2 et de ce que l'on a vu au § I , 1°. ∎

Nous ignorons si toute algèbre l. m. c. séparée complète est d'Arens-Calderon. Donnons une condition suffisante

Proposition 8. On suppose que A est à inverse continu. Alors c'est une algèbre d'Arens-Calderon.

Avant de démontrer cela, rappelons que toute algèbre de Banach (commutative et unitaire) est d'Arens-Calderon et que ce fait, qui a été établi par Arens et Calderon ([3] théorème 2 - 3), est la clef de presque toutes les questions concernant la calcul f. h (ce qui justifie l'appellation "algèbre d'Arens-Calderon") Ceci dit, pour établir la proposition 8, il nous suffit d'établir le lemme suivant.

Lemme 5. Quelle que soit $(a_1,\dots,a_n)$ famille finie injective d'éléments de A , et quel que soit U , voisinage ouvert de $sp(a_1,\dots,a_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, il existe une famille finie injective $(a_1,\dots,a_{n+p})$, contenant la famille $(a_1,\dots,a_n)$, et il existe un voisinage ouvert polynomialement convexe W de $sp(a_1,\dots,a_{n+p})$ dans $\mathbb{C}^{n+p}$, vérifiant

$$p(\Delta(n+p),\Delta n)(W) \subseteq U \quad .$$

Démonstration : Soit B l'adhérence, dans $\mathcal{C}(\hat{A})$, de la transformée de

Gelfand FA de A . L'algèbre B est une algèbre de Banach car $\hat{A}$ est compact. Appliquant le lemme 2 - 2 de la 3e partie de [9] à la famille $(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n)$ d'éléments de B (laquelle famille a évidemment même spectre topologique que $(a_1,\ldots,a_n)$ car F est continue) on trouve des éléments $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ de B tels que :

$$P(\Delta(n+p)\ ,\ \Delta n)\{[\,sp.(a_1,\ldots,a_n\ ,\ \varphi_1,\ldots,\varphi_p)]^{\approx}\} \subsetneq U \quad .$$

Comme tout compact polynomialement convexe possède une base de voisinages ouverts polynomialement convexes, il existe un voisinage ouvert polynomialement convexe W de $sp(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n\ ,\ \varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ tel que

$$P(\Delta(n+p),\Delta n)(W) \subsetneq U \quad .$$

On peut choisir des éléments $\varphi'_1,\ldots,\varphi'_p$ dans FA (qui est dense dans B) tous distincts des $\hat{a}_i$, et assez voisins des $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ pour que l'on ait encore

$$sp(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n\ ,\ \varphi'_1,\ldots,\varphi'_p) \subsetneq W$$

Pour $j = 1,\ldots,p$, choisissons $a_{n+j} \in A$ tel que $\hat{a}_{n+j} = \varphi'_j$; il est alors facile de voir que $a_{n+1},\ldots,a_{n+p}$ répondent aux conditions voulues. ∎

<u>Remarque 1</u>. Supposons que A soit une algèbre d'Arens-Calderon. Soient $a_1,\ldots,a_n$ des éléments de A ~~tels~~ que $\hat{\hat{a}}_1,\ldots,\hat{\hat{a}}_n$ soient sans zéro commun dans $\hat{A}_{top}$; alors il existe $b_1,\ldots,b_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = e$. En effet, soit $a \in \mathcal{F}$ la partie de A constituée par $a_1,\ldots,a_n$; par hypothèse l'ouvert $\mathbb{C}^a \setminus \{0\}$ contient $sp_{top} a$; comme A est une algèbre d'Arens-Calderon, il existe donc un voisinage ouvert V de $\hat{A}_{top}$ dans $\mathbb{C}^A$ et une partie finie a' de A de sorte que $\hat{\hat{a}}'(V)$ soit polynomialement convexe, que $a' \supsetneq a$ et que $P(a',a)(\hat{\hat{a}}'(V)) \subsetneq \mathbb{C}^a \setminus \{0\}$.

Soient $f_1,\ldots,f_n$ les fonctions analytiques, restrictions à $\hat{\hat{a}}'(V)$ des fonctions coordonnées $\mathbb{C}^{a'} \longrightarrow \mathbb{C}$ d'indices $a_1,\ldots,a_n \in a'$. On a alors $\Theta'(a',V)(f_i) = a_i$ pour $i = 1,\ldots,n$. D'autre part les f_i sont sans zéro commun sur $\hat{\hat{a}}'(V)$; comme $\hat{\hat{a}}'(V)$ est une variété de Stein, le théorème des zéros de Cartan nous dit qu'il existe des fonctions analytiques $g_1,\ldots,g_n$ dans $\hat{\hat{a}}'(V)$, telles que $\Sigma\, f_i\, g_i = 1$; posant $b_i = \Theta'(a',V)(g_i)$, pour $i = 1,\ldots,n$, nous en déduisons $\Sigma\, a_i\, b_i = e$.

* * *

- CHAPITRE III -

SIMULATION DANS UNE ALGEBRE D'UNE VARIETE ETALEE DANS $\mathbb{C}^n$

Dans tout ce chapitre, A sera une algèbre sur $\mathbb{C}$, commutative, unitaire, localement multiplicativement convexe, séparée, complète et à inverse continu. Tous les espaces étalés considérés, seront supposés séparés ; comme un espace étalé dans $\mathbb{C}^n$ est de façon canonique une variété analytique, nous dirons indifféremment "espace" étalé ou "variété" étalée.

1° - Préliminaires topologiques

Soient S et X des espaces topologiques et ϑ un espace étalé par π dans X . Alors une application continue a de S dans X sera dite relevable à travers ϑ s'il existe $\rho \in \mathscr{C}(S,\vartheta)$ telle que $a = \pi \circ \rho$.

Lemme 6. Soit S un espace compact. Soit X un espace complètement régulier. Soit ϑ un espace étalé par π dans X^n . Soient $a \in \mathscr{C}(S,X^n)$ et $\rho \in \mathscr{C}(S,\vartheta)$ tels que $\pi \circ \rho = a$. Alors il existe un voisinage Ω_1 de a dans $\mathscr{C}(S,X^n)$ et un voisinage Ω_2 de ρ dans $\mathscr{C}(S,\vartheta)$ tels que la composition avec π réalise un homéomorphisme de Ω_2 sur Ω_1 .

Démonstration : La proposition 1 de [4] nous donne une famille $b = (b_1,\dots,b_p)$ d'éléments de A et un voisinage ouvert V de $(\rho,b)(\hat{A})$ dans $\vartheta \times X^p$, tels que, i désignant l'identité de X^p , la restriction de $\pi \times i$ à V soit injective. Soit alors $U = (\pi \times i)(V)$, et soit $\sigma : U \longrightarrow V$ l'inverse de $(\pi \times i)|V$. Soit γ la projection canonique de $\vartheta \times X^p$ sur ϑ . Posons

$$\Omega_1 = \{a' \in \mathscr{C}(S,X^n) \ ; \ (a',b)(S) \subseteq U\} \ ,$$

$$\Omega_2 = \{\rho' \in \mathscr{C}(S,\vartheta) \ ; \ (\rho',b)(S) \subseteq V\} \ ,$$

Alors Ω_1 est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\{c \in \mathscr{C}(S,X^{n+p}) \ ; \ c(S) \subseteq U\}$ par l'application continue $(-,b)$ qui à a' fait correspondre (a',b) . De même Ω_2 est ouvert.

L'application $\pi \circ -$, définie par $\rho' \longrightarrow \pi \circ \rho'$, envoie Ω_2 dans Ω_1 en effet on a $((\pi \circ \rho'),b) = (\pi \times i)\circ(\rho',b)$, et $\pi \times i$ envoie V dans U .

L'application $r : \Omega_1 \rightarrow \mathscr{C}(S,-)$, définie par

$$r(a') = \gamma \circ \sigma \circ (a',b) \ ,$$

est à valeurs dans Ω_2 ; en effet, cela revient à vérifier que $(r(a'),b)$ est à valeurs dans V , ce qui est bien vrai car, par définition de γ , on a $(r(a'),b) = \sigma \circ (a',b)$, et (a',b) est à valeurs dans U , et σ envoie U dans V .

Il est facile de voir que $\pi \circ -$ et r sont continues.

Du fait que $\pi \circ \gamma \circ \sigma$ est la projection canonique de $X^n \times X^p$ sur X^n , on déduit immédiatement l'égalité

(1) $$\pi \circ (r(a')) = a'$$

Inversement, soit $\rho' \in \Omega_2$; posons

$$\rho'' = r(\pi \circ \rho') = \gamma \circ \sigma \circ [(\pi \circ \rho'),b] \quad ;$$

nous avons alors $\rho'' \in \Omega_2$ et nous allons montrer que $\rho'' = \rho'$. Pour cela il suffit de voir que $(\rho',b) = (\rho'',b)$, ou encore, par choix de U et V ,

$$(\pi \times i)(\rho',b) = (\pi \times i)(\rho'',b) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$((\pi \circ \rho'),b) = ((\pi \circ \rho''),b) \quad ,$$

ou enfin

$$\pi \circ \rho' = \pi \circ \rho'' \quad ,$$

et ceci est bien vrai car cela résulte de l'égalité

$$\pi \circ \rho'' = \pi \circ (r(\pi \circ \rho'))$$

et de l'égalité (1) ci-dessus valable pour tout $a' \in \Omega_1$.

En résumé, on a $\pi \circ (r(a')) = a'$ pour tout $a' \in \Omega_1$, et $r(\pi \circ \rho') = \rho'$ pour tout $\rho' \in \Omega_2$; par conséquent r et $\pi \circ -$ sont deux bijections inverses l'une de l'autre ; comme elles sont continues, ce sont des homéomorphismes. ■

Rappelons que l'ensemble des points où deux sections d'un espace étalé coïncident est ouvert et fermé ; et que les sections d'un espace étalé sont des applications ouvertes.

Soit $\mathfrak{V}$ un espace étalé par π dans un espace topologique X ; un ouvert U de X sera dit trivialement revêtu par $\mathfrak{V}$ si $\pi^{-1}(U)$ est somme topologique d'ouverts U_i tels que, pour chaque i , $\pi|U_i$ réalise un homéomorphisme de U_i sur U .

<u>Lemme 7</u>. <u>Soit</u> $\mathfrak{U}$ <u>un espace étalé par</u> τ <u>dans un espace complètement régulier</u> Y . <u>Soit</u> W <u>un ouvert connexe de</u> Y . <u>On suppose que pour tout</u> $a' \in W$ <u>et tout</u> $\rho' \in \tau^{-1}(a')$ <u>il existe</u> (au moins) <u>une section</u> r <u>de</u> $\mathfrak{U}$ <u>au-dessus de</u> W <u>telle que</u> $r(a') = \rho'$. <u>Alors</u> W <u>est trivialement revêtu par</u> $\mathfrak{U}$.

<u>Démonstration</u> : Choisissons un élément a de W . A tout $\rho_\alpha \in \tau^{-1}(a)$ on associe par hypothèse une section r_α telle que $r_\alpha(a) = \rho_\alpha$.

Posant $W'_\alpha = r_\alpha(W)$, nous allons montrer que $\bar{\tau}^1(W)$ est somme topologique des W'_α .

D'abord $\bar{\tau}^1(W)$ est réunion des W'_α ; en effet, soit $a' \in W$ et $\rho' \in \bar{\tau}^1(a')$; par hypothèse il existe une section r de $\mathfrak{V}$ au-dessus de W telle que $r(a') = \rho'$; l'élément $r(a)$ est l'un des ρ_α , soit ρ_{α_0} , donc r coïncide avec r_{α_0} sur un ensemble non vide, ouvert et fermé dans W , donc sur W tout entier ; en particulier on a, au point a' , $\rho' = r(a') = r_{\alpha_0}(a') \in W'_{\alpha_0}$.

Ensuite les W'_α sont deux à deux disjoints ; en effet, soit $\rho \in W'_\alpha \cap W'_\beta$, cela veut dire que l'on a $\rho = r_\alpha(a') = r_\beta(a')$ pour un certain $a' \in W$, et alors les sections r_α et r_β sont égales sur W .

Enfin, comme toute section d'un espace étalé est ouverte, les $W'_\alpha = r_\alpha(W)$ sont ouverts dans $\mathfrak{U}$ donc dans $\bar{\tau}^1(W)$. ■

<u>Lemme 8</u>. <u>Soit</u> S <u>un espace compact</u>. <u>Soit</u> $\mathfrak{V}$ <u>un revêtement d'un ouvert de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>soit</u> π <u>l'étalement de</u> $\mathfrak{V}$. <u>Alors la composition avec</u> π <u>fait de</u> $\mathcal{C}(S,\mathfrak{V})$ <u>un revêtement de l'ensemble</u> $\mathcal{C}(S)_{\mathfrak{V}}$ <u>des applications de</u> S <u>dans</u> $\mathbb{C}^n$ <u>relevables à travers</u> $\mathfrak{V}$.

<u>Démonstration</u> : En vertu du lemme 6 , la composition avec π fait de $\mathcal{C}(S,\mathfrak{V})$ un espace étalé dans $\mathcal{C}(S)^n$. Il en résulte que $\mathcal{C}(S)_{\mathfrak{V}}$ est ouvert dans $\mathcal{C}(S)^n$.

Soit $a \in \mathcal{C}(S)_{\mathfrak{V}}$. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des boules ouvertes de $\mathbb{C}^n$ qui sont trivialement revêtues par $\mathfrak{V}$.

Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini du compact $a(S)$ par des éléments de $\mathfrak{B}$. Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de compacts de $\mathbb{C}^n$ tels que $\bigcup_i K_i = a(S)$ et que, pour tout $i\in I$, on ait $K_i \subseteq V_i$. Pour chaque $i \in I$, posons $S_i = \bar{a}^1(K_i)$; les S_i sont alors des compacts qui recouvrent S (notons au passage qu'il n'y a pas de raison pour qu'ils soient disjoints). Pour chaque i , on définit un ouvert de $\mathcal{C}(S)^n$ en posant

$$W_i = \{a' \in \mathcal{C}(S)^n \ ; \ a'(S_i) \subseteq V_i\} \quad ;$$

comme $\mathcal{C}(S)^n$ est localement connexe, l'ensemble $\bigcap_i W_i$, qui est voisinage de a , contient un voisinage W de a , ouvert, connexe et contenu dans $\mathcal{C}(S)_{\mathfrak{V}}$.

Donnons nous $a' \in W$ et $\rho' \in \mathcal{C}(S,\mathfrak{V})$ tel que $\pi \circ \rho' = a'$; nous allons construire une section r de $\mathcal{C}(S,\mathfrak{V})$ au-dessus de W telle que l'on ait $r(a') = \rho'$.

Construisons d'abord certaines sections de $\mathfrak{V}$. Pour tout $\chi \in S$, posons $I_\chi = \{i \in I \ ; \ \chi \in S_i\}$. Fixons nous $\chi \in S$ et $i \in I_\chi$. Par choix des V_i , l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(V_i)$ est somme topologique d'ensembles $U_{i,\alpha}$ tels que pour chaque α la restriction de π à $U_{i,\alpha}$ soit un homéomorphisme de $U_{i,\alpha}$ sur V_i. Par ailleurs, par définition de W, on a $\pi \circ \rho'(S_i) \subseteq V_i$; et par définition de I_χ, on a $\chi \in S_i$, d'où $\rho'(\chi) \in \overset{-1}{\pi}(V_i)$; appelons donc

$$s_{\chi,i} : V_i \rightarrow \vartheta$$

l'inverse de la restriction de π à celui des $U_{i,\alpha}$ qui contient $\rho'(\chi)$; on a ainsi construit une section de ϑ au-dessus de V_i et cette section vérifie en particulier

$$s_{\chi,i}(a'(\chi)) = \rho'(\chi) \quad .$$

Soient maintenant i, j deux éléments de I_χ. Les sections $s_{\chi,i}$ et $s_{\chi,j}$ sont égales au point $a'(\chi)$ car on a

$$s_{\chi,i}(a'(\chi)) = \rho'(\chi) = s_{\chi,j}(a'(\chi)) \quad ;$$

ces deux sections sont donc égales sur tout l'ouvert connexe $V_i \cap V_j$; il existe par conséquent une et une seule section s_χ de ϑ au-dessus de $\bigcup\{V_i \; ; \; i \in I_\chi\}$ telles que sur chaque V_i on ait $s_{\chi,i} = s_\chi$.

Construisons maintenant la section r. Soit $a'' \in W$, nous définissons une application $r(a'') : S \rightarrow \vartheta$ en posant

$$(r(a''))(\chi) = s_\chi(a''(\chi)) \quad ,$$

ce qui a bien un sens ; en effet, χ appartient à un certain S_i, et alors par définition de W on a $a''(\chi) \in V_i$ avec $i \in I_\chi$. On a alors

$$\pi \circ (r(a'')) = a''$$

car, pour tout $\chi \in S$, on a

$$(\pi \circ (r(a'')))(\chi) = \pi \circ s_\chi(a''(\chi)) = a''(\chi) \quad .$$

Montrons que l'application $r(a'')$ est continue. Puisque les compacts S_i forment un recouvrement fini de S, il suffit de prouver que la restriction de $r(a'')$ à chaque S_i est continue. Par construction, on a $(\pi \circ \rho')(S_i) \subseteq V_i$ donc $\rho'(S_i) \subseteq \overset{-1}{\pi}(V_i)$; par conséquent l'ensemble S_i est somme topologique des $S_{i,\alpha} = S_i \cap [\overset{-1}{\rho}(U_{i,\alpha})]$; et il nous suffit de montrer la continuité de $r(a'')$ sur chacun des $S_{i,\alpha}$. Mais, dire que $\chi \in S_{i,\alpha}$, c'est dire que $\rho'(\chi) \in U_{i,\alpha}$, donc, par construction des s_χ, si χ et χ' sont deux éléments de $S_{i,\alpha}$, on a $s_\chi = s_{\chi'}$ sur V_i. Choisissant un élément χ_0 dans $S_{i,\alpha}$ on a alors, pour $\chi \in S_{i,\alpha}$

$$(r(a''))(\chi) = s_{\chi_0}(a''(\chi))$$

d'où on déduit que $r(a'')$ est continue sur $S_{i,\alpha}$.

Montrons que $r(a'')$ dépend continûment de a'' . Pour cela il suffit de voir que $r(a'')|S_{i,\alpha}$ dépend continûment de a'' pour chaque $S_{i,\alpha}$; et cela est bien vrai car sur $S_{i,\alpha}$ on a $r(a'') = s_{\chi_0} \circ a''$ où χ_0 est un élément de $S_{i,\alpha}$.

Nous avons donc construit une application continue $r : W \to \mathcal{C}(S,\vartheta)$, et nous avons vu que $\pi \circ r$ et l'identité de W ; de plus on a, pour tout $\chi \in S$,

$$(r(a''))(\chi) = s_\chi(a'(\chi)) \quad ,$$

c'est à dire, par construction de s_χ ,

$$(r(a'))(\chi) = \rho'(\chi) \quad ;$$

on a donc bien $r(a') = \rho'$. Le lemme 7 nous dit alors que W est trivialement revêtu par $\mathcal{C}(S,\vartheta)$. Comme tout $a \in \mathcal{C}(S)_\vartheta$ possède un voisinage tel que W , $\mathcal{C}(S,\vartheta)$ est bien un revêtement de $\mathcal{C}(S)_\vartheta$. ■

2° - Simulation d'une variété étalée.

Soit ϑ une variété étalée par π dans $\mathbb{C}^n$. On appelle subsimulation de ϑ dans A le sous-espace topologique A_ϑ de A^n constitué par les $x \in A^n$ tels que $\hat{x}$ soit relevable à travers ϑ . On appelle simulation de ϑ dans A le sous-espace topologique $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ du produit $A^n \times \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ constitué par les couples (x , μ) qui sont tels que

$$\pi \circ \mu = \hat{x} \quad .$$

On notera $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ la restriction à $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ de la projection sur le premier espace facteur, c'est-à-dire l'application $(x,\mu) \to x$ de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ dans $A_\vartheta \subseteq A^n$. Cette application est une surjection de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ sur A (mais ce n'est généralement pas une injection). Par ailleurs, si on note U l'ouvert $\pi(\vartheta)$ de $\mathbb{C}^n$, étalé trivialement, on a en général $A_U \neq A_\vartheta$.

Il est clair que A_ϑ et $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ ne sont jamais vides car on a $(\lambda_1 e,\dots,\lambda_n e) \in A_\vartheta$ dès que $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \pi(\vartheta) \subseteq \mathbb{C}^n$. Les éléments du type $(\lambda_1 e,\dots,\lambda_n e)$ seront appelées les constantes de A_ϑ ; on appellera constantes de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ les couples (x , μ) où x est une constante de A_ϑ et $\mu : \hat{A} \to \vartheta$ une fonction constante.

Dans le cas où ϑ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ étalé trivialement, l'application $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ est évidemment une bijection de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ sur A_ϑ ; c'est de plus un homéomorphisme car alors $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ est le graphe de l'application continue $x \longrightarrow \hat{x}$, et $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ est la projection de ce graphe sur son espace de départ.

Si, maintenant, ϑ est non trivial, et si X est un espace compact, $\mathcal{C}(X)_{\vartheta}$ est l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{C}^n$ qui sont relevables à travers ϑ . De plus, $\mathrm{Sim}(\mathcal{C}(X),\vartheta)$ s'identifie alors à $\mathcal{C}(X,\vartheta)$; en effet $\mathrm{Sim}(\mathcal{C}(X),\vartheta)$ est le graphe de l'application $\pi \circ -$ de $\mathcal{C}(X,\vartheta)$ dans $\mathcal{C}(X)^n = \mathcal{C}(X,\mathbb{C}^n)$, et $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ est la projection de ce graphe sur son espace de départ ; cette projection s'identifie enfin à $\pi \circ -$.

Soit B une autre algèbre ayant les mêmes propriétés que A , et soit $L : A \longrightarrow B$ un morphisme. On notera L_{ϑ} l'application de A_{ϑ} dans B_{ϑ} définie par $x \longrightarrow L\,x$; on notera

$$\mathrm{Sim}(L,\vartheta) : \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(B,\vartheta)$$

l'application définie par $(x , \mu) \longrightarrow (L\,x , \mu \circ {}^tL)$. Ces deux applications sont continues car L est continue et $\mu \longrightarrow \mu \circ {}^tL$ est continue.

Ces définitions s'appliquent en particulier à l'application

$$F : A \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A})$$

et nous donnent deux applications continues

$$F_{\vartheta} : A_{\vartheta} \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A})_{\vartheta}$$

$$\mathrm{Sim}(F,\vartheta) : \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta) \quad ;$$

on remarque d'ailleurs que $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)$ est la projection canonique de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta) \subseteq A^n \times \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ sur le deuxième espace facteur.

Soient ϑ et ϑ' deux espaces étalés par π et π' dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n'}$, et soit $f : \vartheta \longrightarrow \vartheta'$ une application analytique ; on définit une application

$$\mathrm{Sim}(A,f) : \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A,\vartheta')$$

par $(x , \mu) \longrightarrow [\mathcal{O}(A)(x,\vartheta,\mu)(\pi' \circ f) , f \circ \mu]$ (la compatibilité du calcul $f . h$ avec les caractères montre que cette application est bien à valeur dans $\mathrm{Sim}(A, \vartheta')$).

En particulier, l'étalement π de ϑ est analytique, et on retrouve l'application $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ qui avait été introduite plus haut.

Si on donne à la fois une fonction analytique $f : \vartheta \longrightarrow \vartheta'$ et un morphisme $L : A \longrightarrow B$, on déduit du théorème 3 de [4] que l'on a

$$\mathrm{Sim}(B,f) \circ \mathrm{Sim}(L,\vartheta) = \mathrm{Sim}(L,\vartheta') \circ \mathrm{Sim}(A,f) \quad .$$

Proposition 9. Soit ϑ un espace étalé par π dans $\mathbb{C}^n$; l'application $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ est alors un homéomorphisme local de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ dans A^n , et A_ϑ est un ouvert de A^n .

Démonstration : Soit $(x\ ,\ \mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$. Appliquant le lemme 6 aux fonctions $\hat{x}$ et μ , on trouve deux voisinages Ω_1 et Ω_2 de $\hat{x}$ et μ tels que l'application $\pi \circ -$ réalise un homéomorphisme de Ω_2 sur Ω_1 ; l'inverse de cet homéomorphisme sera noté $r : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$. Soient Ω_4 et Ω_3 les images réciproques de Ω_2 et Ω_1 par $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)$ et F_ϑ respectivement ; alors Ω_4 est le graphe de l'application continue $x' \longrightarrow r(\hat{x}')$ de Ω_3 dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ et la projection de ce graphe sur l'espace de départ n'est autre que $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ qui réalise donc un homéomorphisme de Ω_4 sur Ω_3 . ∎

Remarque 2. A tout ouvert Ω de A_ϑ on peut associer l'espace des fonctions continues r de Ω dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ qui sont telles que pour tout $a' \in \Omega$, $\pi \circ r(a') = \hat{a}'$. On obtient ainsi un faisceau qui est exactement, par définition, le faisceau des sections de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ (cf.[4] , remarques 6 et 8).

Corollaire 5. Soient ϑ et ϑ' deux espaces étalés et soit $f : \vartheta \longrightarrow \vartheta'$ une fonction analytique. Alors $\mathrm{Sim}(A,f)$ est continue.

Démonstration. Soit $(x\ ,\ \mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, et soient Ω_3 , Ω_4 et r définis dans la démonstration de la proposition 9. Sur Ω_4 , l'application

$$(x',\mu') \longrightarrow \mathfrak{H}(A)(x',\vartheta,\mu')(\pi' \circ f)$$

coïncide avec l'application

$$(x',\mu') \longrightarrow \mathfrak{H}(A)(x',\vartheta,r(x'))(\pi' \circ f)$$

laquelle est continue d'après le théorème 2 de [4] . Par ailleurs l'application $\mu' \longrightarrow f \circ \mu'$ est évidemment continue, donc $\mathrm{Sim}(A,f)$ est continue sur Ω_4 ; et le corollaire est démontré car tout point de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ possède un voisinage tel que Ω_4 . ∎

Corollaire 6. Dans les hypothèses du corollaire 5, on suppose de plus que f est un étalement. Alors $\mathrm{Sim}(A,f)$ est un étalement de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ dans $\mathrm{Sim}(A,\vartheta')$.

Démonstration : Pour montrer que $\mathrm{Sim}(A,f)$ est un étalement, il suffit de montrer que $\mathrm{Sim}(A,\pi') \circ \mathrm{Sim}(A,f)$ est un étalement ; mais il est facile de voir que

$$\mathrm{Sim}(A,\pi') \circ \mathrm{sim}(A,f) = \mathrm{Sim}(A,\pi' \circ f)$$

et cette dernière application est un étalement en vertu de la proposition 9 appliquée à l'étalement $\pi' \circ f$. ■

Corollaire 7. Soit ϑ un revêtement d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$; alors $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ est un revêtement de A_ϑ .

Démonstration : Soit $x \in A_\vartheta$; soit W' un voisinage de $\hat{x}$ qui soit trivialement revêtu par $\mathscr{C}(\hat{A},\vartheta)$ (un tel W' existe d'après le lemme 8). Nous allons montrer que l'ensemble $W = F_\vartheta^{-1}(W')$ est trivialement revêtu par $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$. En effet, l'image réciproque W'' de W' par $\pi \circ -$ est somme topologique d'ensembles W''_i , chacun d'eux étant envoyé bijectivement par $\pi \circ -$ sur W' .

Comme on a

$$(\pi \circ -) \circ \mathrm{Sim}(F,\vartheta) = F_\vartheta \circ \mathrm{Sim}(A,\pi) ,$$

l'image réciproque W^* de W par $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ est aussi l'image réciproque de W'' par $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)$; par conséquent, l'ensemble W^* est somme topologique des W^*_i qui sont les images réciproques par $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)$ des W''_i . Pour un indice i fixé, si $r_i : W' \longrightarrow W''_i$ est la bijection inverse de $\pi \circ - \mid W''_i$, il est facile de voir que l'application $x' \longrightarrow (x', r_i(\hat{x}'))$ réalise une bijection de W sur W^*_i , et on déduit de cela que W est trivialement revêtu par $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$. ■

Nous allons maintenant montrer une propriété de composition pour les simulations dans A de fonctions analytiques.

Lemme 9. Soient ϑ et ϑ' deux espaces étalés par π et π' dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n'}$ respectivement. Soit $(x,\mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$. Soient $f : \vartheta \longrightarrow \vartheta'$ et $h : \vartheta' \longrightarrow \mathbb{C}^m$ deux fonctions analytiques. On pose

$$y = ⓦ(A)(x,\vartheta,\mu)(\pi' \circ f)$$

$$z = ⓦ(A)(x,\vartheta,\mu)(h \circ f)$$

Alors on a $(y, f \circ \mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta')$ et

$$z = ⓦ(A)(y,\vartheta',f \circ \mu)(h) .$$

Démonstration : Le fait que $(y, f \circ \mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ résulte immédiatement de la compatibilité du calcul f. h avec les caractères ; posant

$$z' = ⓦ(A)(y,\vartheta',f \circ \mu)(h) ,$$

nous allons montrer que $z = z'$.

Soit $t = (t_1,\dots,t_p)$ une famille finie d'éléments de A telle que, i désignant l'identité de $\mathbb{C}^p$, l'application $\pi' \times i$ soit injective au voisinage de $(f \circ \mu, \hat{t})(\hat{A})$ dans $\vartheta' \times \mathbb{C}^p$ (une telle famille t existe d'après la proposition 1 de [4]). Notons σ' l'inverse de $\pi \times i$, défini sur un certain voisinage, dans $\mathbb{C}^{n'} \times \mathbb{C}^p$, de l'ensemble

$$sp(y,t) = (\pi' \times i)[(f \circ \mu , \hat{t})(\hat{A})] = (\hat{y},\hat{t})(\hat{A}) \quad ;$$

notons aussi

$$\gamma : \vartheta \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \vartheta \quad \text{et} \quad \gamma' : \vartheta' \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \vartheta'$$

les projections canoniques.

Par définition de y , on a,

$$(y,t) = Ⓦ(A)((x,t),\vartheta \times \mathbb{C}^p ,(\mu,\hat{t}))((\pi' \times i) \circ (f \times i)) \quad ;$$

d'autre part, par construction du calcul f.h. multiforme (cf.[4] , démonstration du théorème 1) on a

$$z' = Ⓦ u(A)(y,t)(h \circ \gamma' \circ \sigma') \quad .$$

Appliquant le théorème 4 de [4] à ce qu'on vient de voir, on trouve

$$z' = Ⓗ(A)((x,t), \vartheta \times \mathbb{C}^p , (\mu,\hat{t}))(h \circ \gamma' \circ \sigma' \circ (\pi' \times i) \circ (f \times i)) \quad ;$$

on remarque ensuite que

$$h \circ \gamma' \circ \sigma' \circ (\pi' \times i) \circ (f \times i) = h \circ f \circ \gamma$$

d'où

$$z' = Ⓦ(A)((x,t) , \vartheta \times \mathbb{C}^p , (\mu,\hat{t}))(h \circ f \circ \gamma) \quad ;$$

mais le couple formé par les projections canoniques $\vartheta \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \vartheta$ et $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est une simplification (cf. [4] page 404) et la simplifiabilité du calcul f.h. nous donne

$$z' = Ⓦ(A)(x,\vartheta,\mu)(h) = z \quad . \blacksquare$$

<u>Proposition 10</u>. <u>Soient</u> ϑ , ϑ' , ϑ'' <u>des espaces étalés dans</u> $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n'}$ <u>et</u> $\mathbb{C}^{n''}$ <u>respectivement</u>. <u>Soient</u> $f : \vartheta \longrightarrow \vartheta'$ <u>et</u> $g : \vartheta' \longrightarrow \vartheta''$ <u>des applications analytiques</u>. <u>Alors on a</u>

$$\mathrm{Sim}(A,g \circ f) = \mathrm{Sim}(A,g) \circ \mathrm{Sim}(A,f) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soient π , π' , π'' les étalement de ϑ , ϑ' et ϑ'' . Soit $(x,\mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, soient

$$(y,\nu) = \mathrm{Sim}(A,f)(x,\mu) \quad ,$$
$$(z,\rho) = \mathrm{Sim}(A,g \circ f)(x,\mu) \quad ,$$
$$(z',\rho') = \mathrm{Sim}(A,g)(y,\nu) \quad .$$

Remarquons d'abord que $\nu = f \circ \mu$, $\rho = g \circ f \circ \mu$ et $\rho' = g \circ \nu$ d'où $\rho = \rho'$; ensuite on a

$$y = \circledR(A)(x,\vartheta,\mu)(\pi' \circ f) \ ,$$
$$z = \circledR(A)(x,\vartheta,\mu)(\pi'' \circ g \circ f) \ ,$$
$$z' = \circledR(A)(y,\vartheta',\nu)(\pi'' \circ g) \ ;$$

enfin, posant $h = \pi'' \circ g$, le lemme précédent nous dit que $z = z'$. ∎

Nous savons que l'application $(a,f) \longrightarrow \circledR(A)\ (a,\vartheta,\rho)\ (f)$ est séparément continue (cf. [4]). Nous allons montrer qu'elle est continue quand a et f varient simultanément.

Lemme 10. Soit ϑ un espace étalé par π dans $\mathbb{C}^n$; soit $(a,\rho) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$; soit $f \in \mathcal{O}(\vartheta)$; soit Ω un voisinage de a dans A^n. On suppose qu'il existe une application $r : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ continue et telle que, pour tout a', on ait $(a',r(a')) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ et que $r(a) = \rho$. Alors l'application

$$(a',f') \longrightarrow \circledR(A)(a',\vartheta,r(a'))(f') \ ,$$

est continue au point (a,f).

Démonstration : Il suffit de prouver le résultat en supposant que A est de Banach (le cas général s'obtient ensuite par passage à la limite projective, cf. [4] démonstrations du théorème 3 et de la proposition 2). Supposant donc que A est une algèbre de Banach, comme elle est métrisable, il suffit de montrer, pour tout compact K de Ω, la continuité de l'application

$$(a',f') \longrightarrow \circledR(A)(a',\vartheta,r(a'))(f')$$

restreinte à l'ensemble $K \times \mathcal{O}(\vartheta)$. Nous allons procéder comme dans la démonstration du théorème 3 de [4] . Posons $B = \mathcal{C}(K,A)$; rappelons qu'alors $\hat{B} = K \times \hat{A}$, appelons $b \in B^n$ l'injection canonique de K dans A^n et notons $b = (b_1,\dots,b_n)$. Pour $i = 1,\dots,n$ soit $\beta_i : \hat{B} \longrightarrow \vartheta$ l'application définie par $\beta_i(a',\chi) = (r(a'))(\chi)$; alors on a $(b_i,\beta_i) \in \mathrm{Sim}(B,\vartheta)$, et par définition d'un morphisme f. h., l'élément $\circledR(B)(b_i,\vartheta,\beta_i)(f')$ dépend continûment de f'. Par suite, l'élément de B^n :

$$\varphi(f') = \{\circledR(B)(b_1,\vartheta,\beta_1)(f'),\dots,\circledR(B)(b_n,\vartheta,\beta_n)(f')\} \ ,$$

dépend continûment de f'. Mais $\varphi(f')$ n'est autre que l'application continue de K dans A^n définie par

$$a' \longrightarrow \circledR(A)(a',\vartheta,r(a'))(f') \ ;$$

donc à plus forte raison l'application

$$(a',f') \longrightarrow \circledR(A)(a',\vartheta,r(a'))(f')$$

est continue sur $K \times \mathcal{O}(\vartheta)$. ∎

De ce lemme on déduit aisément la proposition suivante

<u>Proposition 11</u>. <u>Soient</u> ϑ <u>et</u> ϑ' <u>deux espaces étalés dans</u> $\mathbb{C}^n$ <u>et</u> $\mathbb{C}^m$; <u>alors l'application de</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta) \times \mathcal{O}(\vartheta,\vartheta')$ <u>dans</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta')$ <u>définie par</u>

$$((x,\mu),f) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A,f)(x,\mu)$$

<u>est continue</u>. ■

<u>Corollaire 8</u>. <u>Soit</u> ϑ <u>une variété étalée analytiquement contractile</u> (c'est-à-dire telle qu'il existe une application continue $h : [0,1] \times \vartheta \to \vartheta$ telle que les $h(t,-)$ soient analytiques, que $h(0,-)$ soit l'identité de ϑ et que $h(1,-)$ soit une certaine fonction constante). <u>Alors</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ <u>est contractile</u>.

<u>Démonstration</u> : On définit une application

$$h^* : [0,1] \times \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$$

en posant

$$h^*(t,(x,\mu)) = \mathrm{Sim}(A,h(t,-))(x,\mu) \quad ;$$

cette application est continue en vertu de la proposition précédente ; ensuite on déduit aisément des propriétés générales du calcul f. h. que $h^*(0,-)$ est l'identité de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ et que $h^*(1,-)$ est une application constante de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ dans $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$. ■

<u>Remarque 3</u>. On peut se demander à quelle condition $\mathrm{Sim}(a,\vartheta)$ est connexe. Si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur A , et si on suppose que $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ est connexe quel que soit A , alors en particulier $\mathscr{C}(S^n,\vartheta)$ est connexe quel que soit n , et comme ϑ est un C.W-complexe, cela implique que ϑ est contractile.

D'autre part si ϑ est un revêtement contractile d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ est un revêtement contractile de A_ϑ (corollaires 7 et 8), c'est par conséquent un revêtement simplement connexe donc universel de A_ϑ .

Par contre si ϑ est le revêtement universel d'un ouvert (connexe) de $\mathbb{C}^n$ et si on ne suppose pas ϑ contractile, il se peut que $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ ne soit pas revêtement universel de A_ϑ . Par exemple, dans $\mathbb{C}^2$, soient S , S' et S'' les sphères euclidiennes de centres $(0,0)$, $(2,0)$ et $(-2,0)$ et de rayon 1 ; soit Y l'ensemble réunion de S' , S'' et de l'intersection de S avec l'hyperplan réel engendré par $(1,0)$, $(i,0)$ et $(0,1)$; soit X l'ensemble réunion de S' , S'' et du segment de droite réelle qui joint les points $(1,0)$ et $(-1,0)$; soit ϑ un voisinage ouvert de Y , "assez petit" pour avoir même type d'homotopie que Y . Alors ϑ , qui est simplement connexe, est revêtement universel de lui-même ; mais on peut montrer que $\mathcal{C}(X,\vartheta) = \mathrm{Sim}(\mathcal{C}(X),\vartheta)$ a des composantes connexes qui ne sont pas simplement connexes, ce n'est donc pas un revêtement universel (cet exemple nous a été communiqué par N. A' Campo).

Soit ϑ un espace étalé quelconque ; les espaces topologiques $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ et A_ϑ sont localement homéomorphes à A^n , ils sont donc localement contractiles, ils ont donc chacun un revêtement universel (cf. par exemple [15] , ch. 2 § 5). Le contre-exemple précédent montre que ces revêtements ne sont pas nécessairement de la forme $\mathrm{Sim}(A,\mathfrak{W})$ pour un certain revêtement $\mathfrak{W}$.

Nous allons maintenant donner un lemme technique qui signifie, si l'on veut, que pour étudier $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ on peut se ramener au cas où A est de type fini.

Soit $(a,V) \in \mathfrak{F} \times \mathcal{V}$, soit ϑ un espace étalé par π dans $\mathbb{C}^n$, nous définissons une fonction

$$\mathfrak{M}'((a,V),\vartheta) : \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$$

en faisant correspondre à la fonction $f : \hat{\hat{a}}(V) \longrightarrow \vartheta$ le couple (x,μ) où $\mu = f \circ \hat{a}$ et $x = \mathfrak{M}'(a,V)(\pi \circ f)$.

<u>Lemme 11</u>. <u>Soit</u> ϑ <u>un espace étalé par</u> π <u>dans</u> $\mathbb{C}^n$. <u>Alors quel que soit</u> $(x,\mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, <u>il existe</u> $(a,V) \in \mathcal{Z}$ <u>et</u> $f \in \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ <u>tels que</u> $(x,\mu) = \mathfrak{M}'((a,V),\vartheta)(f)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $y = (y_1,\dots,y_p)$ une famille finie d'éléments de A , telle que, si i désigne l'identité de $\mathbb{C}^p$, l'application

$$\pi \times i : \vartheta \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$$

soit injective sur un voisinage ouvert W'' du compact $(\rho,\hat{y})(\hat{A})$ dans l'espace produit $\vartheta \times \mathbb{C}^p$ (une telle famille existe d'après la proposition 1 de [4]) ; soit alors $W' = (\pi \times i)(W'')$, soit : $\sigma : W' \longrightarrow W''$ l'inverse de $\pi \times i$, et soient $\tau : \vartheta \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \vartheta$, $\tau' : \mathbb{C}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ les projections canoniques.

Les familles $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $(x,y) = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)$ étant considérées comme des applications définies sur Δ_n et $\Delta(n+p)$ et à valeurs dans A, soient b' et b leurs images et soient :

$$h' : \mathbb{C}^{b'} \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad h : \mathbb{C}^b \longrightarrow \mathbb{C}^{n+p}$$

leurs transposées. Posant alors

$$W = \hat{\hat{b}}^{-1}(h^{-1}(W'))$$

on a $W \in \mathcal{Y}$ et $\hat{\hat{b}}(W) = h^{-1}(W')$. On définit une fonction $g \in \mathcal{O}(\hat{\hat{b}}(W),\vartheta)$ en posant :

$$g = \tau \circ \sigma \circ h \quad .$$

Montrons que l'on a :

$$Ⓗ'((b',W),\vartheta)(g) = (x,\mu) \quad .$$

Tout d'abord on a :

$$\pi \circ g = \pi \circ \tau \circ \sigma \circ h = h' \circ P(b,b') \quad ;$$

mais par définition de h', pour $j = 1,\dots,n$, la composition de h' avec la j-ième fonction coordonnée $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ donne la fonction coordonnée $\mathbb{C}^{b'} \longrightarrow \mathbb{C}$ d'indice $x_j \in b'$; de cela et de la définition d'un morphisme f. h. il résulte

$$x = Ⓗ'(b',W)(h')$$

d'où l'on déduit à l'aide de la simplifiabilité du calcul f. h.

$$x = Ⓗ'(b,W)(\pi \circ g) \quad .$$

D'autre part on a, par construction, $h \circ \hat{b} = (\hat{x},\hat{y})$, mais aussi $\sigma \circ (\hat{x},\hat{y}) = (\mu,\hat{y})$, et également $\tau \circ (\mu,\hat{y}) = \mu$, d'où

$$g \circ \hat{b} = \tau \circ \sigma \circ h \circ \hat{b} = \tau \circ \sigma \circ (\hat{x},\hat{y}) = \tau \circ (\mu,\hat{y}) = \mu$$

On a donc établi que $Ⓗ'((b,W),\vartheta)(h) = (x,\mu)$.

Maintenant, puisque A est une algèbre d'Arens-Calderon, il existe $(a,V) \in \mathcal{G}$ tel que $(a,V) \geq (b,W)$. Posons :

$$f = g \circ P(a,b)|\hat{\hat{a}}(V) \quad ;$$

la simplifiabilité de calcul f. h. nous donne aisément

$$Ⓗ'((a,V),\vartheta)(f) = Ⓗ'((b,W),\vartheta)(g) \quad . \blacksquare$$

***

3° - <u>Propriétés d'homotopie des simulations.</u>

La transformation de Gelfand F de A est continue ; par conséquent, si ϑ est un espace étalé dans $\mathbb{C}^n$, <u>les applications</u> F_ϑ <u>et</u> $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)$ <u>sont continues et induisent des applications</u> S <u>et</u> T <u>des ensembles des composantes connexes de</u> A_ϑ <u>et</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ <u>dans les ensembles des composantes connexes de</u> $\mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$ <u>et de</u> $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$. Comme les espaces topologiques A_ϑ et $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ sont localement homéomorphes à A^n, ils sont localement connexes par arcs ; il en va de même pour $\mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$ et $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ qui sont localement homéomorphes à $\mathcal{C}(\hat{A})^n$; par conséquent <u>les 4 ensembles</u> A_ϑ, $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, $\mathcal{C}(\hat{A})$ <u>et</u> $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ <u>ont leurs composantes connexes égales à leurs composantes connexes par arcs.</u>

Rappelons que si X est un espace compact et ϑ une variété analytique, les notions d'arc et d'homotopie dans $\mathcal{C}(X,\vartheta)$ sont identiques. Plus précisément, si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}(X,\vartheta)$ est une application continue, l'application $h_\gamma : [0,1] \times X \longrightarrow \vartheta$, définie par $h_\gamma(t,\chi) = (\gamma(t))(\chi)$, est continue, et l'opération $\gamma \longrightarrow h_\gamma$ définit une bijection entre les arcs et les homotopies dans $\mathcal{C}(X,\vartheta)$.

Si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{C}(X,\vartheta)$, nous dirons que deux fonctions appartenant à $\mathcal{F}$ sont <u>homotopes dans</u> $\mathcal{F}$ si elles sont reliées par un arc contenu dans $\mathcal{F}$.

Nous admettrons le lemme suivant qui est essentiellement le lemme 3 de [21].

<u>Lemme 12. Soit</u> X <u>un espace compact qui est limite projective d'une certaine famille de compacts</u> (X_i), <u>et notons</u> $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ <u>et</u> $\varphi_i^j : X_j \longrightarrow X_i$ <u>les applications canoniques. Soit</u> ϑ <u>une variété étalée dans</u> $\mathbb{C}^n$.

<u>Alors si deux fonctions</u> f, $g \in \mathcal{C}(X_i,\vartheta)$ <u>sont telles que</u> $f \circ \varphi_i$ <u>et</u> $g \circ \varphi_i$ <u>soient homotopes dans</u> $\mathcal{C}(X,\vartheta)$, <u>il existe un indice</u> j <u>tel que</u> $f \circ \varphi_i^j$ <u>et</u> $g \circ \varphi_i^j$ <u>soient homotopes dans</u> $\mathcal{C}(X_j,\vartheta)$.

<u>D'autre part, quelle que soit</u> $f' \in \mathcal{C}(X,\vartheta)$, <u>il existe un indice</u> i <u>et une fonction</u> $g \in \mathcal{C}(X_i,\vartheta)$ <u>de sorte que</u> f' <u>et</u> $g \circ \varphi_i$ <u>soient homotopes dans</u> $\mathcal{C}(X,\vartheta)$. ∎

On peut, si l'on veut, exprimer cela en disant que l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}(X,\vartheta)$ est limite inductive des ensembles de composantes connexes des $\mathcal{C}(X_i,\vartheta)$.

Nous allons appliquer ce lemme à $\hat{A}$. Les $\hat{\hat{a}}(V)$ ne sont pas compacts, mais comme les sp a sont compacts, il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{T}'$ des $(A,V) \in \mathcal{T}$ tels que $\hat{\hat{a}}(V)$ soit compact est cofinal dans $\mathcal{T}$; alors nous pouvons appliquer le lemme 12 à la description de $\hat{A}$ comme limite projective des $\hat{\hat{a}}(V)$ pour $(a,V) \in \mathfrak{T}'$.

Lemme 13. Soit ϑ une variété étalée dans $\mathbb{C}^n$.

1° - Soient (x,μ) et (y,ν) deux éléments de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ tels que μ et ν soient homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$. Alors il existe $(a,V) \in \mathfrak{T}$ et $f,g \in \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$, homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ tels que

$$(x,\mu) = \Theta'((a,V),\vartheta)(f) \quad , \quad (y,\nu) = \Theta'((a,V),\vartheta)(g) \quad .$$

2° - Inversement, soit $w \in \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$; il existe $(a,V) \in \mathfrak{T}$ et $f \in \mathcal{C}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ tels que $f \circ \hat{a}$ soit homotope à w dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$.

Démonstration : Le 2° résulte immédiatement du lemme 12 et du fait que $\hat{A}$ est limite projective des $\hat{\hat{a}}(V)$ pour $(a,V) \in \mathfrak{T}$.

Montrons maintenant le 1°. D'après le lemme 11, il existe $(a',V') \in \mathfrak{T}$ et $f',g' \in \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}'(V'),\vartheta)$ tels que

$$(x,\mu) = \Theta'((a',V'),\vartheta)(f') \quad \text{et} \quad (y,\nu) = \Theta'((a',V'),\vartheta)(g') \quad ;$$

nous pouvons appliquer la première assertion du lemme 12 à $\hat{A}$ qui est limite projective des $\hat{\hat{a}}(V)$ et aux fonctions

$$\hat{x} = f' \circ \hat{\hat{a}}'|\hat{A} \quad \text{et} \quad \hat{y} = g' \circ \hat{\hat{a}}'|\hat{A} \quad ;$$

nous trouvons alors $(a,V) \in \mathfrak{T}$ tel que $(a,V) \geqslant (a',V')$ et que soient homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ les fonctions

$$f = f' \circ P(a,a')|\hat{\hat{a}}(V) \quad , \quad g = g' \circ P(a,a')|\hat{\hat{a}}(V) \quad ;$$

enfin la simplifiabilité du calcul f. h nous donne

$$\Theta'((a,V),\vartheta)(f) = \Theta'((a',V'),\vartheta)(f') = (x,\mu)$$

$$\Theta'((a,V),\vartheta)(g) = (y,\nu) \quad . \quad \blacksquare$$

Théorème 2. Soit ϑ un espace étalé dans $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe un groupe de Lie complexe L qui opère holomorphiquement et transitivement dans ϑ . Alors la transformation de Gelfand F de A induit de façon naturelle une bijection T entre les composantes connexes de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ et celles de $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$

Démonstration : Soient (x,μ) et (y,ν) des éléments de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ tels que μ et ν soient reliés par un arc dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$. D'après le 1° du lemme 13 il existe $(a,V) \in \mathfrak{T}$ et $f,g \in \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ tels que l'on ait

$$(x,\mu) = \Theta'((a,V),\vartheta)(f) \quad , \quad (y\,\nu) = \Theta'((a,V),\vartheta)(g)$$

et que f et g soient homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$. Nous pouvons appliquer le théorème 2 de [12] au fibré trivial de base la variété de Stein $\hat{\hat{a}}(V)$, de fibre ϑ et de groupe structural L ; nous trouvons que f et g sont homotopes dans $\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$, c'est-à-dire qu'ils y sont reliés par un arc, et l'image de cet arc par $\circledR'((a,V),\vartheta)(f)$ est un arc reliant (x,μ) à (y,ν) dans $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$.

Nous avons donc montré que T est injective.

Soit maintenant $w \in \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$. D'après le 2° du lemme 13, on peut trouver $(a,V) \in \mathcal{E}$ et $f \in \mathcal{C}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ de sorte que w soit homotope à $f \circ \hat{a}$ dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$. Nous pouvons appliquer le théorème 1 de [12] au fibré trivial de base $\hat{\hat{a}}(V)$, de fibre ϑ et de groupe structural L ; nous trouvons que f est homotope dans $\mathcal{C}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ à une certaine $g \in \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$; posant

$$(x,\mu) = \circledR'((a,V),\vartheta)(g) \quad ,$$

on voit que

$$\mathrm{Sim}(F,\vartheta)(x,\mu) = \mu = g \circ \hat{a} \quad ,$$

et $g \circ \hat{a}$ est homotope à $f \circ \hat{a}$ qui est homotope à w . En résumé, étant donnée $w \in \mathcal{C}(A,\vartheta)$, il existe $(x,\mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ tel que $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)(x,\mu)$ soit homotope à w dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$.

Nous avons donc montré que T est surjective. ■

<u>Corollaire 9</u>. <u>De plus,</u> F <u>induit de façon naturelle une application surjective</u> S <u>de l'ensemble des composantes connexes de</u> A_ϑ <u>dans l'ensemble des composantes connexes de</u> $\mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$. <u>Si de plus</u> ϑ <u>est un revêtement, l'application</u> S <u>est bijective et chaque composante connexe de</u> A_ϑ <u>est égale à une composante connexe de</u> $\mathrm{Sim}(A,\pi(\vartheta))$. <u>Si enfin</u> ϑ <u>est contractile,</u> A_ϑ <u>est égal à la composante connexe de</u> $\mathrm{Sim}(A,\pi(\vartheta))$ <u>qui contient les constantes</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit $u \in \mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$. Il existe $\mu' \in \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ tel que $\pi \circ \mu' = u$; d'après le théorème précédent, il existe $(x,\mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ tel que μ soit homotope à μ' dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$; mais on a alors $\pi \circ \mu = \hat{x}$, donc $\hat{x}$ et u sont homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$.

Nous avons donc montré que S est surjective.

Supposons maintenant de plus que ϑ est un revêtement ; soient x , $y \in A_\vartheta$ tels que $\hat{x}$ et $\hat{y}$ soient homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$. En vertu du principe de relèvement des homotopies il existe μ et ν telles que $\pi \circ \mu = \hat{x}$ et $\pi \circ \nu = \hat{y}$ et que μ et ν soient homotopes dans $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$. Comme (x,μ) et (y,ν) sont des éléments de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, le théorème précédent nous dit alors qu'il existe un arc reliant (x,μ) à (y,ν) dans $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$; l'image de cet arc par $\mathrm{Sim}(A,\pi)$ est un arc reliant x à y dans A .

Nous avons donc montré que S est injective.

Ensuite on remarque que $A_\vartheta \subseteq \mathrm{Sim}(A,\pi(\vartheta)) = A_{\pi(\vartheta)}$, et en vertu du principe de relèvement des homotopies, si deux éléments de $A_{\pi(\vartheta)}$ sont reliés par un arc dans $A_{\pi(\vartheta)}$, cet arc est contenu dans A_ϑ ou ne rencontre pas A_ϑ .

Enfin si ϑ est contractile, A_ϑ est connexe (corollaire 8) et contient évidemment les constantes. ■

Soit K un compact quelconque. Le spectre, de l'algèbre $\mathscr{C}(K,A)$ est l'espace topologique produit $K \times \hat{A}$ (cf.[4] page 410 pour le cas où A est de Banach ; on passe au cas où A est à inverse continu en remarquant qu'elle est alors limite projective d'algèbres de Banach ayant toutes le même spectre). Cela étant, nous allons montrer l'égalité des espaces topologiques $\mathrm{Sim}(\mathscr{C}(K,A),\vartheta)$ et $\mathscr{C}(K,\mathrm{Sim}(A,\vartheta))$.

Le premier de ces espaces est le sous-espace topologique du produit $\mathscr{C}(K,A^n) \times \mathscr{C}(K\times\hat{A},\vartheta)$ constitué par les couples (φ,ρ) tels que $\pi\circ\rho = \hat{\varphi}$, c'est-à-dire tels que pour tout $\xi\in K$ et tout $\chi\in\hat{A}$ on ait $\pi(\rho(\xi,\chi)) = \chi(\varphi(\xi))$.

Le second de ces espaces est le sous espace topologique de $\mathscr{C}[K,(A^n\times\mathscr{C}(\hat{A},\vartheta))] = \mathscr{C}(K,A^n)\times\mathscr{C}(K,\mathscr{C}(\hat{A},\vartheta)) = \mathscr{C}(K,A^n)\times\mathscr{C}(K\times\hat{A},\vartheta)$ constitué par les couples (φ,ρ) qui sont tels que pour tout $\xi\in K$ on ait $(\varphi(\xi),\rho(\xi,-))\in\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, c'est-à-dire tels que pour tout $\xi\in K$ et tout $\chi\in\hat{A}$ on ait $\pi(\rho(\xi,\chi)) = \chi(\varphi(\xi))$.

En appliquant le théorème 2 à l'algèbre $\mathscr{C}(K,A)$ on trouve

<u>Corollaire 10</u>. <u>Dans les hypothèses du théorème 2, soit</u> K <u>un compact quelconque ; alors</u> F <u>induit naturellement une bijection entre les composantes connexes des ensembles</u>:

$$\mathrm{Sim}(\mathscr{C}(K,A),\vartheta) \ \underline{\text{et}}\ \mathrm{Sim}(\mathscr{C}(K\times\hat{A}),\vartheta) \ ,$$

<u>c'est-à-dire entre les composantes connexes des ensembles</u> :

$$\mathscr{C}(K,\mathrm{Sim}(A,\vartheta)) \ \underline{\text{et}}\ \mathscr{C}(K\times\hat{A},\vartheta) = \mathscr{C}(K,\mathscr{C}(\hat{A},\vartheta)) \ . \ ■$$

Ceci vaut en particulier si K est une sphère S^n , donc <u>l'application</u> $\mathrm{Sim}(F,\vartheta)$ <u>est une équivalence faible d'homotopie</u>.

On peut voir également que, si ϑ est un revêtement, F induit naturellement une bijection entre les composantes connexes des espaces $\mathscr{C}(K,A)_\vartheta$ et $\mathscr{C}(K\times\hat{A})_\vartheta$.

Notons également que pour que $\mathrm{Sim}(A, \vartheta)$ soit un revêtement universel (c'est-à-dire simplement connexe) de A_ϑ, il faut et il suffit que $\mathcal{C}(\hat{A}, \vartheta)$ soit revêtement universel de $\mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$.

Exemple 3. Nous pouvons appliquer ceci au cas où $U = GL(n, \mathbb{C})$ considéré comme un ouvert de C^{n^2} étalé trivialement.

Remarquons d'abord ce qui suit. Soit x une $n \times n$ matrice à coefficients dans un anneau Λ, commutatif et unitaire, quelconque. On sait associer à x un déterminant $\det x$, de sorte que, si $\det x$ est inversible dans Λ, x est inversible dans l'anneau $M(n,\Lambda)$ des $n \times n$ matrices à coefficients dans Λ. Notons $GL(n,\Lambda)$ le groupe des inversibles de ce dernier anneau.

Prenant maintenant $\Lambda = A$ et $U = GL(n, \mathbb{C})$, nous allons montrer que $A_U = GL(n,A)$. D'abord ces deux ensembles sont des ensembles de $n \times n$ matrices à coefficients dans A. Ensuite, dire que $x \in A_U$ c'est dire que pour tout $\chi \in \hat{A}$ on a $\chi(x) \in GL(n, \mathbb{C})$, ce qui équivaut à $\det \chi(x) \neq 0$, ou encore $\chi(\det x) \neq 0$, donc $\det x$ est inversible dans A, puisque A est séparée complète ; alors, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, $x \in GL(n,A)$. Réciproquement, soit x une $n \times n$ matrice, inversible dans $M(n,A)$, alors, quel que soit $\chi \in \hat{A}$, la matrice $\chi(x)$ est évidemment inversible dans $M(n, \mathbb{C})$, ce qui veut dire que $x \in A_U$.

Ceci vaut en particulier pour l'algèbre $\mathcal{C}(\hat{A})$.

Alors le théorème 2, appliqué au cas où

$$L = \vartheta = U = GL(n, \mathbb{C}) ,$$

nous donne <u>une bijection canonique entre les composantes connexes de</u> $GL(n,A)$ et <u>celles de</u> $GL(n, \mathcal{C}(\hat{A}))$.

Ce résultat est dû initialement à Arens [2], il est également étudié par Novodvorski [21] et Eidlin [22] en liaison avec des questions de topologie algébrique.

Exemple 4. Soit $U = \vartheta = L = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, groupe multiplicatif, et considérons U comme plongé naturellement dans $\mathbb{C}$ et ϑ comme étalé par l'application $z \to z^n$. Alors $A_U = \mathrm{Sim}(A,U)$ est le groupe des éléments inversibles de A et A_ϑ est le sous groupe de A_U formé des éléments ayant une racine n-ième (cf. [4] remarque 7). Le corollaire 9 et le théorème 2 nous donnent l'isomorphisme canonique $A_U/A_\vartheta \approx \mathcal{C}(\hat{A})_U / \mathcal{C}(\hat{A})_\vartheta$; on verra plus loin (corollaire 14) une formulation "explicite", en termes de cohomologie, de ces groupes quotients.

4° - <u>Simulation dans A d'un groupe de Lie étalé dans $\mathbb{C}^n$</u> .

Soit ϑ un espace étalé par π dans $\mathbb{C}^n$, et soit $f : \vartheta \times \vartheta \longrightarrow \vartheta$ une <u>loi de composition analytique</u>. L'espace $\vartheta \times \vartheta$ est naturellement étalé par $\pi \times \pi$ dans $\mathbb{C}^{2n}$ et il est immédiat que $\mathrm{Sim}(A,\vartheta \times \vartheta)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Sim}(A,\vartheta) \times \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$, si bien que l'application

$\mathrm{Sim}(A,f) : \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \times \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ définit une <u>loi de composition dans</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$. D'après le corollaire 5, cette loi est continue.

Si la loi de composition définie par f est associative, cela revient à dire, notant i l'application identique de ϑ dans ϑ ,

$$f \circ (f \times i) = f \circ (i \times f)$$

(les applications $f \times i$ et $i \times f$ sont définies sur $\vartheta \times \vartheta \times \vartheta$ identifié tantôt à $(\vartheta \times \vartheta) \times \vartheta$ tantôt à $\vartheta \times (\vartheta \times \vartheta)$) ; alors la propostion 10 nous donne

$$\mathrm{Sim}(A,f) \circ (\mathrm{Sim}(A,f) \times \mathrm{Sim}(A,i)) = \mathrm{Sim}(A,f) \circ (\mathrm{Sim}(A,i) \times \mathrm{Sim}(A,f))$$

ce qui prouve que la loi de composition sur $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ est <u>associative</u> car, d'après les propriétés du calcul f . h., $\mathrm{Sim}(A,i)$ est l'identité de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$.

Si la loi de composition sur ϑ est commutative, cela veut dire que, si $g : \vartheta \times \vartheta \longrightarrow \vartheta \times \vartheta$ est l'application définie par $(v_1,v_2) \longrightarrow (v_2,v_1)$, on a $f \circ g = f$.

Dire qu'il y a élément neutre pour la loi de composition de ϑ , c'est dire qu'il existe une application $h : \vartheta \longrightarrow \vartheta$ telle que $f \circ (h \times i) = f \circ (i \times h) = i$. Dire que tout élément de ϑ possède un symétrique pour la loi de composition, c'est dire qu'il existe une application $j : \vartheta \longrightarrow \vartheta$ telle que $f \circ (j \times i) = f \circ (i \times j) = h$.

Par conséquent, à l'aide de la propostion 10 on peut montrer que si la loi de ϑ est <u>commutative</u>, celle de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ l'est aussi, si la loi de ϑ <u>possède un élément neutre</u>, celle de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ en possède un, si tout élément de ϑ <u>possède un symétrique</u>, tout élément de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ en possède un.

Il résulte de tout cela que, si ϑ est un <u>groupe de Lie complexe</u> étalé dans $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ est un groupe, c'est même un <u>groupe topologique</u> car les applications $\mathrm{Sim}(A,f)$ et $\mathrm{Sim}(A,j)$ sont continues.

Revenant à l'exemple 3 on pourrait vérifier, utilisant la définition du calcul f.h. , que l'on obtient la même structure d'anneau sur $M(n,A) = \mathrm{Sim}(A,M(n,\mathbb{C}))$ en définissant les lois de composition comme celles de l'anneau des matrices à coefficients dans A , où en prenant les simulations dans A des lois de composition de $M(n,\mathbb{C})$.

Soit ϑ un groupe de Lie complexe étalé dans $\mathbb{C}^n$ (ce groupe n'est pas supposé commutatif) ; alors $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ possède une structure de groupe induite naturellement par celle de ϑ. La compatibilité du calcul f.h avec les caractères nous dit que l'application

$$\mathrm{Sim}(F,\vartheta) : \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$$

est un morphisme de groupes. L'application du théorème 2 nous donne alors

<u>Corollaire 11</u>. <u>La transformation de Gelfand</u> F <u>de</u> A <u>induit un isomorphisme entre les quotients des groupes</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ <u>et</u> $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ <u>par leurs composantes neutres respectives</u>. ■

Dans certains cas nous pouvons exprimer ces quotients en termes de topologie algébrique.

<u>Corollaire 12</u>. <u>On suppose de plus que</u> ϑ <u>est connexe et que le revêtement universel</u> $\mathfrak{w}$ <u>de</u> ϑ <u>est contractile et on note</u> M <u>le noyau de la projection canonique de</u> $\mathfrak{w}$ <u>sur</u> ϑ. <u>Alors la composante neutre</u> G <u>de</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ <u>est l'ensemble des</u> $(x,\mu) \in \mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ <u>tels que</u> μ <u>soit relevable à travers</u> $\mathfrak{w}$; <u>et il existe un isomorphisme canonique entre le groupe quotient</u> $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)/G$ <u>et le groupe de cohomologie de Čech</u> $\check{H}^1(\hat{A},M)$.

<u>Démonstration</u> : A l'aide du théorème 2 on se ramène à démontrer le présent corollaire dans le cas où $A = \mathcal{C}(\hat{A})$. Il est facile de vérifier que la composante neutre de $\mathcal{C}(\hat{A},\vartheta)$ est l'ensemble G des $\mu : \hat{A} \to \vartheta$ relevables à travers $\mathfrak{w}$ (cf. corollaire 9).

Ceci dit on a la suite exacte de groupes (qui, rappelons le au passage, ne sont pas supposés abéliens)

$$e \longrightarrow M \xrightarrow{\tau} \mathfrak{w} \longrightarrow \vartheta \longrightarrow e \ ;$$

on en déduit l'exactitude de la suite des faisceaux de germes de fonctions continues de $\hat{A}$ dans ces groupes, soit

$$e \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A},M) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A},\mathfrak{w}) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta) \longrightarrow e \ .$$

On sait que M est contenu dans le centre de $\mathfrak{w}$ (c'est une propriété classique des revêtements universels des groupes de Lie) donc le théorème 1.4 de [7] nous donne la suite exacte de groupes de cohomologie

$$\mathcal{C}(\hat{A},\mathfrak{w}) \xrightarrow{\tau\, \circ} \mathcal{C}(\hat{A},\vartheta) \longrightarrow H^1(\hat{A},\mathcal{C}(\hat{A},M)) \longrightarrow H^1(\hat{A},\mathcal{C}(\hat{A},\mathfrak{w}))$$

où la première flèche est la composition avec τ . Il est bien connu que le dernier terme de cette suite est en bijection canonique avec les classes d'équivalence de fibrés principaux topologiques de base $\hat{A}$ et de fibre $\mathfrak{w}$;

Comme $\mathfrak{W}$ est contractile, un tel fibré est nécessairement trivial donc

$$H^1(\hat{A}, \mathcal{C}(\hat{A},\mathfrak{W})) = e$$

D'autre part, comme M est discret, le faisceau $\mathcal{C}(\hat{A},M)$ est le faisceau simple de base $\hat{A}$ et de fibre M ; comme $\hat{A}$ est compact on a donc

$$H^1(\hat{A}, \mathcal{C}(\hat{A},M)) = \check{H}^1(\hat{A},M)$$

Finalement on a la suite exacte de groupes

$$\mathcal{C}(A,\mathfrak{W}) \xrightarrow{\tau\circ-} \mathcal{C}(A,\vartheta) \longrightarrow \check{H}^1(A,M) \longrightarrow e \ . \ \blacksquare$$

Rappelons que pour que $\mathfrak{W}$ soit contractile il suffit, par exemple, que le groupe ϑ soit résoluble (cf. [6] théorème 2^a).

Remarque 4. Indiquons comment on pourrait donner du corollaire 12 une démonstration "directe" (c'est à dire sans utiliser le théorème 2).

On part de $(a,V) \in \mathcal{T}$. On appelle M le faisceau simple de base $\hat{\hat{a}}(V)$ et de fibre M ; on appelle $\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\mathfrak{W})$ et $\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta)$ les faisceaux de germes de fonctions analytiques de $\hat{\hat{a}}(V)$ dans $\mathfrak{W}$ et ϑ . On montre qu'on a la suite exacte de faisceaux

$$e \longrightarrow \mathsf{M} \longrightarrow \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\mathfrak{W}) \longrightarrow \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta) \longrightarrow e \ ;$$

le théorème 1.4 de [7] donne alors la suite exacte de cohomologie

$$\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\mathfrak{W}) \longrightarrow \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta) \longrightarrow H^1(\hat{\hat{a}}(V),\mathsf{M}) \longrightarrow H^1(\hat{\hat{a}}(V),\mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\mathfrak{W})) \ .$$

Puisque $\mathfrak{W}$ est contractile, on déduit du théorème 2 de [10] que le dernier terme de cette suite est nul. Passant à la limite inductive suivant $\mathcal{T}$ on trouve la suite exacte

$$\varinjlim_{\mathcal{T}} \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\mathfrak{W}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{T}} \mathcal{O}(\hat{\hat{a}}(V),\vartheta) \longrightarrow \check{H}^1(\hat{A},M) \longrightarrow e \ .$$

et utilisant les propriétés du calcul f.h. on en déduit la suite exacte

$$\mathrm{Sim}(A,\mathfrak{W}) \longrightarrow \mathrm{Sim}(A,\vartheta) \longrightarrow \check{H}^1(\hat{A},M) \longrightarrow e \ .$$

Remarque 5. On peut généraliser le corollaire 12 ; supposons que ϑ est produit de sa composante neutre ϑ par un groupe discret D , notons $\mathfrak{W}$ le revêtement universel de ϑ_0 et M le noyau de la projection de $\mathfrak{W}$ sur ϑ_0 ; supposons $\mathfrak{W}$ contractile nous trouvons alors que le quotient de $\mathrm{Sim}(A,\vartheta)$ par sa composante neutre est isomorphe au produit

$$\mathcal{C}(\hat{A},D) \times \check{H}^1(\hat{A},M) \ .$$

Le corollaire 12 appliqué au cas où ϑ est le groupe multiplicatif $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, redonne un résultat montré par Arens [1] et Royden [14] dans le cas des algèbres de Banach.

Corollaire 13. Soit A^* le groupe des éléments inversibles de A . Alors la composante neutre A_o^* du groupe A^* est l'ensemble des éléments de A ayant un logarithme, et il existe un isomorphisme canonique

$$A^*/A_o^* \approx \check{H}^1(\hat{A},\mathbb{Z}) \ .$$

Démonstration : Prenons pour ϑ le groupe multiplicatif $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; alors $\mathfrak{w}$ est le groupe additif $\mathbb{C}$ étalé dans ϑ par l'application $z \longrightarrow \exp z$; le noyau de cet étalement est isomorphe à $\mathbb{Z}$. On a alors $A_\vartheta = A^*$ et, d'après la remarque 8 de [4] , $A_{\mathfrak{w}}$ est l'ensemble des éléments de A ayant un logarithme ; il suffit ensuite d'appliquer le corollaire 12. ■

Nous allons chercher une expression analogue pour le quotient de A^* par l'ensemble des éléments de A^* ayant une racine n-ième.

Pour un groupe abélien quelconque Γ , notons $n[\Gamma]$ l'ensemble des éléments de Γ qui sont de la forme

$$\begin{cases} ng \text{ avec } g \in \Gamma \text{ , si la loi de } \Gamma \text{ est notée additivement,} \\ g^n \text{ avec } g \in \Gamma \text{ , si la loi de } \Gamma \text{ est notée multiplicativement.} \end{cases}$$

Cela étant posé, soit $\mathbb{Z}_n$ le groupe des entiers modulo n , c'est-à-dire $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n[\mathbb{Z}]$. Si Γ est un groupe abélien sans torsion, il existe un isomorphisme canonique

$$\Gamma/n[\Gamma] \approx \Gamma \otimes \mathbb{Z}_n \ ;$$

en effet, puisque Γ est sans torsion, c'est un $\mathbb{Z}$-module plat, donc, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow n[\mathbb{Z}] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0 \ ,$$

on déduit la suite exacte de produits tensoriels de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow \Gamma \otimes n[\mathbb{Z}] \longrightarrow \Gamma \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \otimes \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0 \ ;$$

après quoi on remarque que

$$\Gamma \otimes \mathbb{Z} = \Gamma$$

et que

$$\Gamma \times n[\mathbb{Z}] = n[\Gamma] \otimes \mathbb{Z} = n[\Gamma] \ ;$$

enfin on trouve la suite exacte

$$0 \longrightarrow n[\Gamma] \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0 \ .$$

Revenant au groupe multiplicatif A^* , remarquons que le quotient A^*/A_o^* est sans torsion ; en effet, pour voir cela il suffit de voir que, si $x \in A^*$ et si $x^n \in A_o^*$, on a $x \in A_o^*$; et ceci est bien vrai car on a

$x^n = \exp y$ et par conséquent $x = \exp((1/n)y)$.

Tout élément de A_o^* possède des racines n-ièmes de tous ordres, autrement dit $n[A^*] \supseteq A_o^*$, il existe par conséquent un isomomorphisme canonique

$$A^*/n[A^*] \approx (A^*/A_o^*)/(n[A^*]/A_o^*) \quad ;$$

mais il existe aussi l'isomorphisme canonique

$$n[A^*]/A_o^* \approx n[A^*/A_o^*] \quad .$$

D'autre part, puisque A^*/A_o^* est sans torsion, il existe un isomorphisme canonique

$$(A^*/A_o^*)/n[A^*/A_o^*] \approx (A^*/A_o^*) \otimes \mathbb{Z}_n \quad .$$

Tout cela, joint au corollaire 13, nous donne une expression de $A^*/n[A^*]$

Corollaire 14 . Il existe un isomorphisme canonique

$$A^*/n[A^*] \approx \check{H}^1(\hat{A},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_n \quad . \blacksquare$$

Dans certains cas, nous pouvons exprimer ceci sous une autre forme. Notons d'abord que, d'après les théorèmes 10 et 11 du § 8 du chapitre 6 de [15] on a

$$\check{H}^1(\hat{A},\mathbb{Z}_n) \approx [\check{H}^1(\hat{A},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_n] \oplus [\check{H}^2(\hat{A},\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_n] \quad ,$$

où le 2e terme du 2e membre est le produit tordu de $\check{H}^2(\hat{A},\mathbb{Z})$ et de $\mathbb{Z}_n$, c'est-à-dire dans le cas présent le sous-groupe de $\check{H}^2(\hat{A},\mathbb{Z})$ constitué par les éléments qui sont de rang n (cf. [15] chapitre 5 § 2 exemple 4).

Corollaire 15. Si $\check{H}^2(\hat{A},\mathbb{Z})$ est sans torsion, il existe un isomorphisme canonique

$$A^*/n[A^*] \approx \check{H}^1(\hat{A},\mathbb{Z}_n) \quad .$$

***

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] ARENS R. - The problem of locally-A functions in a commutative Banach algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), pp. 24-36.

[2] ARENS R. - To what extent does the space of maximal ideals determine the algebra, Function algebras (Symposium de Tulane), Glenview (Illinois), Scott-Foresman, 1966 pp. 164 - 168.

[3] ARENS R. et CALDERON A.P. - Analytic functions of several Banach algebra elements, Annals of Math., 62 (1955) pp. 204 - 216.

[4] BONNARD M. - Sur le calcul fonctionnel holomorphe multiforme dans les algèbres topologiques, Ann. Sc. Ecole Normale Sup. Paris, 4e série, t. 2, 1969 pp. 397 - 422.

[5] CARTAN H., Espaces fibrés analytiques, Symposium internacional de topologia algebraica, Mexico, UNESCO, 1958, pp. 97 - 121.

[6] CHEVALLEY C. - On the topological structure of solvable groups, Annals of Math. 42 (1941), pp. 668 - 675.

[7] FRENKEL J. - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. de France, 85 (1957), pp. 135 - 220.

[8] GUENNEBAUD B. - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. Math., 91 (1967), pp. 75 - 96.

[9] GUICHARDET A. - Leçons sur certaines algèbres topologiques, New-York, Gordon and Breach, 1968.

[10] GRAUERT H. - Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Raümen, Math. Annalen, 135 (1958), pp. 263 - 273.

[11] MICHAEL E.A. - Locally multiplicatively convex topological algebras, Memoirs Amer. Math. Soc., n°11 (1952).

[12] RAMSPOTT K.J. - Über die Homotopieklassen holomorpher Abbidungen in homogene Komplexe Mannigfältigkeiten, Sitzungberichte math. naturwiss. Klasse bayerischen Akad. Wiss., 1962, pp. 57-62.

[13] ROSSI H. - On envelopps of holomorphy, Comm. pure and Appl. Math., 16 (1963), pp. 9 - 18.

[14] ROYDEN H. - Function algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), pp. 281-298.

[15] SPANIER E.H. - Algebraic topology, New-york, Mc Graw-Hill, 1966.

[16] TURPIN P. - Une remarque sur les algèbres à inverse continu, C.R. Acad. Sc. Paris, 270 (1970) pp. 1686 - 1689, série A.

[17] WAELBROECK L. - Les algèbres à inverse continu, C.R. Acad. Sc. Paris 238 (1954) pp. 640 - 641.

[18] WAELBROECK L. - Structure des algèbres à inverse continu, C. R. Acad. Sc. Paris, 238 (1954) pp. 762 - 764.

[19] WAELBROECK L. - Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes, Séminaire Math. Sup., Montréal, 1962.

[20] WARNER S. - Inductive limits of normed algebras, Trans. Amer. Math. Soc.,82 (1956) pp. 190 - 216.

[21] НОВОДВОРСКИЙ М.Е., О НЕКОТОРЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ, МАТ. ЗАМЕТКИ, vol.1 n°4 (1967) pp. 487-494.

[22] ЭЙЛИН В.Л., О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ БАНАХОВО АЛГЕБРЫ, ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТО, t.22 n°13 (1967) pp. 173 - 174.