MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE BOLLEY

JACQUES CAMUS

Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables

Mémoires de la S. M. F., tome 34 (1973), p. 55-140

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1973__34__55_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 34, 1973, p. 55-140.

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES A PLUSIEURS VARIABLES

par

Pierre BOLLEY (*) et Jacques CAMUS (**)

Résumé.- On étudie des problèmes aux limites dans un ouvert Ω régulier de $\mathbb{R}^n$ associés à des opérateurs L elliptiques dans Ω, dégénérés sur le bord Γ de Ω, de la forme :

$$Lu(x) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} P^{2m-h}(x;D_x)\ \{\varphi(x)^{k-h}\ u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers $\geq$ o, $P^{2m-h}(x;D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus 2m-h, $P^{2m}(x;D_x)$ est un opérateur d'ordre 2m elliptique dans $\bar{\Omega}$ et φ une fonction régulière équivalente à la distance au bord Γ. Pour tout entier p $\geq$ o, L est un opérateur linéaire continu de l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_k^{2m+p}(\Omega) = \{u \in H^{2m+p-k}(\Omega)\ ;\ \varphi^k u \in H^{2m+p}(\Omega)\}$$

muni de la norme canonique, dans l'espace de Sobolev usuel $H^p(\Omega)$.

On définit un opérateur γ linéaire, continu et surjectif de :

$$W_k^{2m+p}(\Omega) \text{ sur } \prod_{q=-k}^{2m+p-k-1} H^{2m+p-k-q-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$ et on introduit une matrice

$B=(B_{jq}(x;D_x))$, $j=1,\dots,\chi_p$ et $q=-k,\dots,2m+p-k-1$, où B_{jq} est un opérateur différentiel sur Γ d'ordre au plus m_j-q. Alors, $B \circ \gamma$ est un opérateur linéaire continu de

$$W_k^{2m+p}(\Omega) \text{ dans } \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

(Dans certains cas, on prend $\chi_p=0$, c'est-à-dire que le système B est vide).

On montre que sous certaines hypothèses, le couple $(L\ ;\ B \circ \gamma)$ est un opérateur à indice de

$$W_k^{2m+p}(\Omega) \text{ dans } H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et on précise comment cet indice dépend de l'entier p. Ces résultats sont obtenus grâce à la construction d'estimations a priori ; ces estimations étant construites à partir de théorèmes d'isomorphismes pour les opérateurs associés à une variable sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$.

TABLE DES MATIERES

(*) Département de Mathématiques et Informatique - Université de Rennes, 35 RENNES.
(**) Département de Mathématiques - Université de Brest - (29 N) BREST.

Ce travail a été en majeure partie effectué pendant le séjour des auteurs à la Faculté des Sciences de TUNIS, et achevé à la Faculté des Sciences de RENNES.

1. Introduction

On se propose d'étudier des problèmes aux limites dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, associés à des opérateurs elliptiques à l'intérieur, dégénérés au bord de cet ouvert, le bord étant caractéristique.

Dans cette direction, certains résultats ont été obtenus par M.S. Baouendi et C. Goulaouic [1] pour l'opérateur $Au(x) \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\|\beta|\leq 1}} D^\beta(a_{\alpha\beta}(x)\ \varphi(x)\ D^\alpha u(x))$ dans un ouvert Ω régulier, où φ est une fonction de classe C^∞_∞ équivalente à la distance au bord Γ de Ω, où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. La forme :

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\|\beta|\leq 1}} a_{\alpha\beta}(x)\ \ \varphi(x)\ D^\alpha\ u(x)\ \overline{D^\beta\ v(x)}\ \ dx$$

satisfaisant à la condition de coercivité : il existe une constante C > 0 telle que pour tout u appartenant à l'espace $V = \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ \sqrt{\varphi}\ D^\alpha\ u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| \leq 1\}$, on ait : $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_V$, ils ont établi que A est un isomorphisme de :

$$W_1^{2m+p}(\Omega) = \{u \in H^{p+1}(\Omega)\ ;\ \varphi\ u \in H^{p+2}(\Omega)\} \text{ sur } H^p(\Omega) \text{ pour tout entier}$$

$p \geq 0$.

Dans [18], N. Shimakura a introduit une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés plus générale :

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{m-h}(x;D_x)\ \ \ \{\varphi(x)^{k-h}\ u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq m$, $P^{m-h}(x;D_x)$ étant un opérateur aux dérivées partielles d'ordre $\leq$ m-h, $P^m(x;D_x)$ étant d'ordre m et elliptique dans $\overline{\Omega}$. Ce sont des opérateurs d'ordre m elliptiques à l'intérieur et dont la dégénérescence au bord est d'ordre k. L'idée essentielle de l'étude faite dans [18] est d'obtenir des estimations a priori à partir de théorèmes d'isomorphismes à une variable. Il obtient ainsi certains résultats dans L^2 et sous certaines conditions qui excluent en particulier les opérateurs du type A.

Les travaux de M.I. Visik et V.V. Grusin [22] permettent de compléter, en un certain sens, les résultats de [18] : considérant les problèmes aux limites associés aux opérateurs L :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ Bu = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs différentiels frontière, ils prouvent, moyennant certaines hypothèses générales sur L et B, que le couple d'opérateurs {L,B} est un opérateur à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $L^2(\Omega)$.

L'objet de cet article est de faire, à partir des résultats obtenus à une variable [4] (cf. aussi [5]), une étude systématique des opérateurs elliptiques dégénérés du type L pour k et m entiers ≥ 1 (pour k = 0, on retrouve les opérateurs elliptiques non dégénérés classiques (cf. [14] par exemple) ; pour k réel > 0, on obtient certains résultats mais ceux-ci ne figurent pas dans cet article). Une partie des résultats cités ici a été annoncée dans [6], [7]. A la différence des opérateurs elliptiques, il est nécessaire de faire une étude directe dans le cadre H^p, p étant un entier ≥ 0, le nombre d'opérateurs frontière pour les problèmes aux limites associés dépendant explicitement de l'entier p. On montre que, moyennant certaines conditions, le couple d'opérateurs {L,B}, où B est un système d'opérateurs différentiels frontière, est un opérateur à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $H^p(\Omega)$; en particulier, on montre comment cet indice dépend de l'entier p. Cette étude donne par ailleurs la régularité des problèmes aux limites associés. Dans cet ordre d'idée, citons que N. Shimakura a obtenu indépendamment certains résultats de régularité dans [19].

La méthode utilisée ici permet d'étudier d'autres classes d'opérateurs elliptiques (cf. [6]). En particulier, elle permet d'obtenir les estimations a priori et la régularité des opérateurs considérés dans [2] et [21].

Afin de rendre cet article plus utilisable, on donne le résultat principal dans le chapitre 2.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude d'espaces de Sobolev avec poids W^m_k, généralisant ceux considérés dans [18] à des entiers k et m ≥ 0 quelconques. On y montre de plus la surjectivité des traces au moyen d'un relèvement explicite.

Dans le quatrième chapitre, on étudie, sous certaines hypothèses, les problèmes aux limites associés aux opérateurs L. La technique utilisée est celle des estimations a priori comme dans [17].

On peut toutefois obtenir des résultats analogues à ceux du chapitre 4 sous des hypothèses moins restrictives ; c'est ce que l'on explicite sur des exemples dans le premier paragraphe du chapitre 5. On montre ensuite, que dans certains cas, on peut caractériser algébriquement la condition imposée au système d'opérateurs frontière B. Enfin, une étude détaillée des opérateurs L pour lesquels m=2 et k=1 permet de préciser, pour cette classe d'opérateurs, les résultats obtenus par M.M. Kohn - Nirenberg dans [13].

Dans le chapitre 6, on applique les méthodes du chapitre 4 à l'étude des opérateurs elliptiques dans des espaces de Sobolev avec poids (cf. [9], [11]) et à l'étude des opérateurs introduits dans [1] et [23].

Nous sommes heureux de pouvoir exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur M.S. Baouendi qui nous a proposé cette étude et qui nous a fourni suggestions et conseils.

Nous remercions aussi vivement Monsieur le Professeur C. Goulaouic qui s'est toujours intéressé à ce travail et avec qui nous avons eu de fructueuses conversations.

2. Sommaire des résultats.

Afin de rendre plus aisée la lecture de cet article, on rassemble ici les notations et résultats essentiels.

1°) Notations.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞, de bord Γ. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\} \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } \Gamma \end{cases}$$

où grad φ est le vecteur gradient associé à φ.

On définit les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\Omega)$ pour k et $m \geq 0$ quelconques :

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in H^{m-k}(\Omega) \ ; \ \varphi^k u \in H^m(\Omega)\}$$

munis de la norme canonique. On définit des traces pour les éléments de ces espaces de la façon suivante : soit δ un nombre réel > 0 et $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(x;\Gamma) < \delta\}$ où $d(x;\Gamma)$ désigne la distance du point x à Γ. On suppose δ suffisamment petit pour que pour tout x appartenant à U_δ, la distance de x à Γ ne soit atteinte que par un seul point x_Γ de Γ. L'application ψ définie par :

$$x \longmapsto \left(x_\Gamma \ ; \ \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} d(x,\Gamma)\right) : U_\delta \longrightarrow \Gamma \times]-\delta,\delta[$$

est un isomorphisme de classe C^∞. Soit α une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ égale à 1 dans un voisinage de 0 et à support dans $]-\delta,\delta[$. Alors, pour tout u appartenant à $W_k^m(\Omega)$ on pose, pour x appartenant à Γ :

$$\gamma_j u(x) = \begin{cases} D_t^j \, u\,(\psi^{-1}(x,t))\big|_{t=0} & \text{pour } j=0,\dots,m-k-1 \text{ si } 0 \leq k \leq m \\ (-1)^{-j-1} \displaystyle\int_0^\infty t^{-j-1} \, \alpha(t) \, u(\psi^{-1}(x,t))dt & \text{pour } j=-k,\dots,\min(-1,m-k-1) \\ & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

On considère l'opérateur $L \equiv L(x;D_x)$ défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} P^{2m-h}(x;D_x)\ \{\varphi(x)^{k-h}\, u(x)\}$$

où m et k sont deux entiers ≥ 1 et où :

(i) $P^{2m-h}(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à 2m-h, h=o,...,Min(k,2m).

(ii) $P^{2m}(x;D_x)$ est un opérateur d'ordre 2m proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$.

Cet opérateur induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire et continue de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$.

On introduit pour tout entier $p \geq 0$, les conditions $H_1(p;\Omega)$ et $H_2(p;\Omega)$ suivantes :

<u>$H_1(p;\Omega)$</u> : pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x;\rho) = 0$ avec

$$\phi(x;\rho) = \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x;\text{grad}\,\varphi(x))\, i^{k-h}\, \rho(\rho-1)\,\ldots\,(\rho-k+h+1)$$

n'admet pas de racine ρ telle que $\text{Re}\,\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$,
(où $P_{2m-h}^{2m-h}(x;\xi)$ est la partie homogène d'ordre 2m-h de $P^{2m-h}(x;\xi)$).

<u>$H_2(p;\Omega)$</u> : pour tout x appartenant à Γ, le nombre $r_p(x)$ de racines ρ de l'équation $\phi(x;\rho) = 0$ vérifiant $\text{Re}\,\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}$ est constant et égal à r_p et le nombre $\chi_p = m-r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant des opérateurs frontières. Pour $j=1,\ldots,\chi_p$, si $\chi_p > 0$ soit l'opérateur $B_j^p(x;D_\Gamma)$ défini par :

$$B_j^p(x;D_\Gamma)\,\gamma u \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(x;D_\Gamma)\,\gamma_q u$$

où pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$ et $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, $B_{jq}(x;D_\Gamma)$ est un opérateur différentiel sur Γ, à coefficients de classe $C^\infty(\Gamma)$ et d'ordre inférieur ou égal à m_j-q, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ (si m_j-q est négatif, l'opérateur $B_{jq}(x;D_\Gamma)$ correspondant est par définition, l'opérateur nul).

On note $B_p \equiv B_p(x;D_\Gamma) \equiv (B_1^p(x;D_\Gamma),\ldots,B_{\chi_p}^p(x;D_\Gamma))$. L'opérateur $B_p\gamma$

induit une application linéaire et continue de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On définit la condition $H_3(p;\Omega)$ suivante :

$\underline{H_3(p;\Omega)}$: pour tout x appartenant à Γ et pour tout vecteur ξ cotangent en x à Γ, le problème aux limites :

$$\begin{cases} \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x;\xi + \operatorname{grad} \varphi(x)\, D_t)\{t^{k-h}\, v(t)\} = 0 \\ \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}^{m_j-q}(x;\xi)\, \gamma_q v = 0 \text{ pour } j=1,\dots,\chi_p \text{ , si } \chi_p > 0 \end{cases}$$

ou

$$\left\{ \sum_{h=o}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x;\xi + \operatorname{grad} \varphi(x)\, D_t)\{t^{k-h}\, v(t)\} = 0, \text{ si } \chi_p = 0 \right.$$

n'admet que la solution $v=0$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$,

(où $B_{jq}^{m_j-q}(x;\xi)$ est la partie homogène d'ordre m_j-q de $B_{jq}(x;\xi)$).

2°) <u>Résultats essentiels</u>.

Lorsque $\chi_p > 0$, le résultat principal est le suivant (cf. 4, Théorème 3.1) :

<u>Théorème</u> : *on suppose que les conditions* $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$ *et* $H_3(p;\Omega)$ *sont réalisées et que pour tout* x *appartenant à* Γ, *l'équation* $\phi(x;\rho)=0$ *n'a pas de racine* ρ *dans la bande* $-(p+q)-2m + k-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$, q *étant un entier* ≥ 0. *Alors, pour tout entier* r *tel que* $0 \leq r \leq q$, *l'opérateur* $\{L, B_p\gamma\}$ *opérant de* $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ *dans* $H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *possède les propriétés suivantes :*

(i) c'est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de r *;*

(ii) son noyau est égal à $\{u \in W_k^{2m+p+q}(\Omega) \; ; \; \{L, B_p\gamma\}\, u = 0\}$ *;*

(iii) son image est composée des éléments (f,g) *appartenant à*

$$H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \textit{tels que :}$$

$$\langle f,\bar{v} \rangle_{H^p(\Omega)\times[H^p(\Omega)]'} + \langle g,\bar{\varphi} \rangle_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

pour tout élément (v,φ) *appartenant à* $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *vérifiant*

$\{L, B_p\gamma\}^* (v, \varphi) = 0.$

(où $\{L, B_p\gamma\}^*$ *est l'opérateur adjoint de* $\{L, B_p\gamma\}$ *en tant qu'opérateur de* $W_k^{2m+p}(\Omega)$ *dans* $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Lorsque $\chi_p = 0$, on a un résultat analogue (cf : 4, Théorème 3.1) :

<u>Théorème</u> : *on suppose que les conditions* $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$ *et* $H_3(p;\Omega)$ *sont réalisées et que pour tout* x *appartenant à* Γ, *l'équation* $\phi(x;\rho) = 0$ *n'a pas de racine* ρ *dans la bande* $-(p+q)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$, q *étant un entier* ≥ 0. *Alors, pour tout entier* r *tel que* $0 \leq r \leq q$, *l'opérateur* L *opérant de* $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ *dans* $H^{p+r}(\Omega)$ *possède les propriétés suivantes :*

(i) c'est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de r *;*

(ii) son noyau est égal à $\{u \in W_k^{2m+p+q}(\Omega) \ ; \ Lu = 0\}$ *;*

(iii) son image est composée des éléments f *appartenant à* $H^{p+r}(\Omega)$ *tels que* $< f, \bar{v} >_{H^p(\Omega) \times [H^p(\Omega)]'} = 0$ *pour tout élément* v *appartenant à* $[H^p(\Omega)]'$ *vérifiant* $L^* v = 0$, L^* *désignant l'opérateur adjoint de l'opérateur* L.

3. Une classe d'espaces de Sobolev avec poids.

On désigne par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles des nombres entiers ≥ 0, entiers, réels et complexes respectivement. Etant donné un entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par $\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x',x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) \in \mathbb{R}^n ;\ x_n > 0\}$.

Pour tout entier $r \geq 0$, on désigne par $H^r(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev d'ordre r sur $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire l'espace des distributions u sur $\mathbb{R}^n$ telles que $D^\alpha u$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout multientier $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de $\mathbb{N}^n$ de longueur $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq r$. (on désigne par D^α la dérivation $D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ où $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$). $H^r(\mathbb{R}^n)$ est muni de sa norme canonique. L'espace dual de $H^r(\mathbb{R}^n)$ est noté $H^{-r}(\mathbb{R}^n)$.

Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, pour tout entier r appartenant à $\mathbb{Z}$ on désigne par $H^r(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des distributions de $H^r(\mathbb{R}^n)$ et par $H^r_o(\Omega)$ l'espace des distributions de $H^r(\mathbb{R}^n)$ dont le support est contenu dans $\bar{\Omega}$, ces deux espaces étant munis des normes canoniques.

1°) Les espaces $W^m_k(\mathbb{R}^n)$ et $W^m_k(\mathbb{R}^n_+)$

Etant donnés deux entiers k et m de $\mathbb{N}$ on définit les espaces de Sobolev avec poids suivants (cf. [18]):

$$W^m_k(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n) \ ; \ x_n^k \ u \in H^m(\mathbb{R}^n)\}$$

et

$$W^m_k(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ x_n^k \ u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)\} .$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour les normes :

$$u \longmapsto ||u||_{W^m_k(\mathbb{R}^n)} = \{||u||^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)} + ||x_n^k \ u||^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}\}^{1/2}$$

et

$$u \longmapsto ||u||_{W^m_k(\mathbb{R}^n_+)} = \{||u||^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n_+)} + ||x_n^k \ u||^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}\}^{1/2}$$

respectivement.

<u>Proposition 1.1.</u> *Pour tout entier* h *tel que* $0 \leq h \leq k$ *, l'application*

$$u \longmapsto x_n^{k-h}\, u$$

est linéaire et continue de $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ *dans* $H^{m-h}(\mathbb{R}^n)$ *et de* $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ *dans* $H^{m-h}(\mathbb{R}_+^n)$.

<u>Démonstration</u> : <u>Pour $\mathbb{R}^n$</u>.

Cette proposition est vraie pour $n = 1$ (cf. [4], [5])(*) c'est-à-dire : pour h tel que $0 \leq h \leq k$, il existe une constante $C_h > 0$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R})$ on ait :

$$\|(1+|\tau|)^{m-h}\, D_\tau^{k-h}\, Fu(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_h\, (\|(1+|\tau|)^{m-k}\, Fu(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})} +$$

$$\|(1+|\tau|)^{m}\, D_\tau^{k}\, Fu(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})})$$

où Fu est la transformée de Fourier de u, (définie à partir de

$$Fu(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\, u(t)\, dt) \quad \text{et} \quad D_\tau = \frac{1}{i}\frac{d}{d\tau} .$$

Soit maintenant u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}u$ sa transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ (définie à partir de

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, u(x)\, dx$$

où $\xi = (\xi',\xi_n) = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n)$). Pour presque tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, la fonction $Fv(\tau)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Fv(\tau) = \mathcal{F}u(\xi',\, \tau(1+|\xi'|))$$

est la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ d'une fonction v appartenant à $W_k^m(\mathbb{R})$.

En effet :

(*) Les résultats donnés dans [4] lorsque $0 \leq k \leq m$, sont valables lorsque k et m sont deux entiers quelconques de $\mathbb{N}$. Cette généralisation, faite dans [5], se démontre en adaptant les techniques de [4].

$$\begin{cases}(1+|\tau|)^m\ D_\tau^k\ Fv(\tau)\ \ (=(1+|\tau|)^m(1+|\xi'|)^k\ D_\tau^k\ \mathcal{F}u(\xi',\tau(1+|\xi'|)))\in L^2(\mathbb{R}),\\ (1+|\tau|)^{m-k}\ Fv(\tau)\ \ (=(1+|\tau|)^{m-k}\ \mathcal{F}u(\xi',\tau(1+|\xi'|)))\in L^2(\mathbb{R}).\end{cases}$$

Par suite, pour h tel que $0 \le h \le k$ et, pour presque tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|)^{2m-2h}\ (1+|\xi'|)^{2k-2h}\ |D_\tau^{k-h}\ \mathcal{F}u(\xi',\tau(1+|\xi'|))|^2\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_h\ \Big\{\left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|)^{2m}\ (1+|\xi'|)^{2k}\ |D_\tau^k\ \mathcal{F}u(\xi',\tau(1+|\xi'|))|^2\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\tau|)^{2m-2k}\ |\mathcal{F}u(\xi',\tau(1+|\xi'|))|^2\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\Big\}.$$

On fait le changement de variable $\xi_n = \tau\ (1+|\xi'|)$, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2m-2h}\ |D_\tau^{k-h}\ \mathcal{F}u(\xi)|^2\ d\xi_n \le 2\ C_h^2\ \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2m}\ |\ D_\tau^k\ \mathcal{F}u(\xi)|^2\ d\xi_n$$

$$+\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2m-2k}\ |\mathcal{F}u(\xi)|^2\ d\xi_n\Big).$$

On intègre enfin par rapport à ξ' dans $\mathbb{R}^{n-1}$, ce qui donne :

$$||x_n^{k-h}\ u||^2_{H^{m-h}(\mathbb{R}^n)} \le 2\ C_h^2\ \left(||x_n^k\ u||^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + ||u||^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)}\right)$$

Pour $\mathbb{R}^n_+$.

Le résultat se déduit du lemme suivant :

Lemme 1.1. *Il existe un opérateur de prolongement* P *linéaire, continu, de* $W_k^m(\mathbb{R}^n_+)$ *dans* $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ *tel que pour tout* u *appartenant à* $W_k^m(\mathbb{R}^n_+)$, *on ait :*

$$Pu_{|\mathbb{R}^n_+} = u \qquad \textit{dans}\quad W_k^m(\mathbb{R}^n_+)\ .$$

Démonstration : Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n_+)$ on pose

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \ge 0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\max(k,m)} \alpha_j\ u(x',-jx_n), & \text{si } x_n < 0\end{cases}$$

les α_j étant des constantes solutions du système :

$$\sum_{j=1}^{\max(k,m)} \alpha_j(-j)^{\ell} = 1 \text{ pour } \ell = -k,\dots,\max(-1,m-k-1).$$

Ces conditions impliquent que Pu appartient à $H^{m-k}(\mathbb{R}^n)$ et que x_n^k Pu appartient à $H^m(\mathbb{R}^n)$ et que

$$||Pu||_{W_k^m(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W_k^m(\mathbb{R}_+^n)} ,$$

où C est une constante indépendante de u.

Remarque 1.1. A l'aide des résultats précédents, il est facile de vérifier que l'on a :

$$W_k^m(\mathbb{R}_+^n) \equiv \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n) \ ; \ x_n^{\max(0,k-m)} u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \ , \ x_n^k u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)\}$$

Proposition 1.2. (i) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W_k^m(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ *est dense dans* $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ (*).

Démonstration : (i) Dans une première étape, on tronque : soit Ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\Psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$. On pose $\Psi_R(x) = \Psi(x/R)$ pour $R > 0$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$, la fonction $u_R = \Psi_R.u$ appartient à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ et converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ quand R tend vers $+\infty$.

Dans une seconde étape, on régularise les fonctions u_R, qu'on note maintenant u : soit j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $j(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$. On pose $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j(\frac{x}{\varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ à support compact, la fonction $u_\varepsilon = j_\varepsilon * u$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge vers u dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ quand ε tend vers 0.

En effet, on doit vérifier que :

(*) On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ de Ω dans $\mathbb{C}$ à support compact dans Ω et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2m-2k} \; |\mathcal{F}j_\varepsilon(\xi)-1|^2 \; |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2m} \; | \; D^k_{\xi_n} \; (\mathcal{F}j_\varepsilon . \mathcal{F}u)(\xi) \; - \; D^k_{\xi_n} \; \mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi = 0$$

Le premier résultat est immédiat. Pour démontrer le second résultat, écrivant que

$D^k_{\xi_n} \; (\mathcal{F}j_\varepsilon . \mathcal{F}u) = \mathcal{F}j_\varepsilon . D^k_{\xi_n} \; \mathcal{F}u + \sum\limits_{p=1}^{k} \binom{p}{k} \, D^p_{\xi_n} \; \mathcal{F}j_\varepsilon \, . \, D^{k-p}_{\xi_n} \; \mathcal{F}u$, il suffit de vérifier que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2m} \; |D^p_{\xi_n} \; \mathcal{F}j_\varepsilon . D^{k-p}_{\xi_n} \mathcal{F}u|^2 \, d\xi = 0 \quad \text{pour } p = 1,\dots,k,$$

ce qui se fait en utilisant la proposition 1.1.

(ii) Cette proposition résulte du lemme 1.1 et de (i).

On peut caractériser les espaces $W^m_k(\mathbb{R}^n_+)$ de la façon suivante :

Proposition 1.3. *Un élément* u *appartenant à* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)$ *appartient à* $W^m_k(\mathbb{R}^n_+)$ *si et seulement si* x^k_n u *appartient à* $H^m(\mathbb{R}^n_+) \cap H^{\min(k,m)}_\circ(\mathbb{R}^n_+)$.

Démonstration : On utilise pour cela la proposition 1.2 et le fait que si v appartient à $H^h_\circ(\mathbb{R}^n_+)$, alors v/x_n appartient à $H^{h-1}_\circ(\mathbb{R}^n_+)$ pour h entier ≥ 1 (cf. inégalité n° 330 de [12]).

Remarque 1.2. Il résulte de cette proposition que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $W^m_k(\mathbb{R}^n_+)$ pour $k \geq m$, et que sur cet espace, la norme :

$$u \longmapsto ||x^k_n \, u||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}$$

est équivalente à la norme

$$u \longmapsto ||u||_{W^m_k(\mathbb{R}^n_+)} \quad .$$

Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$, l'espace dual $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ de l'espace $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la forme $T = f_0 + x_n^k f_1$ où f_0 appartient à $H^{-m+k}(\mathbb{R}^n)$ et f_1 appartient à $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 1.4. *(i) L'espace dual* $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ *de l'espace* $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ *s'identifie à l'espace des distributions* T *de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *de la forme*

$$T = \sum_{j=0}^{k} x_n^j \; g_j$$

où g_j, *pour* $j = 0,1,\ldots,k$, *appartient à* $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) La norme d'espace dual sur $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ *est équivalente à la norme :*

$$T \longmapsto \|T\|_{[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'} = \inf_{\substack{T = \sum_{j=0}^{k} x_n^j g_j \\ g_j \in H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \|g_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Démonstration : (i) D'après la proposition 1.2, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}^n)$. Par suite, on peut identifier l'espace dual $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ de $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ à un sous-espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$.

Grâce à la proposition 1.1, on peut identifier l'espace $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ à un sous-espace fermé de l'espace produit $\prod_{j=0}^{k} H^{m-k+j}(\mathbb{R}^n)$ par l'application $u \longmapsto (u, x_n u, \ldots, x_n^k u)$.

Par suite, toute distribution T appartenant à $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ peut s'écrire, de manière non unique, sous la forme :

$$T = \sum_{j=0}^{k} x_n^j \; g_j,$$

où g_j, pour $j = 0,1,\ldots,k$, appartient à $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$.

Inversement, il est clair qu'une telle distribution $\sum_{j=0}^{k} x_n^j g_j$ appartient à $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$.

(ii) L'équivalence des normes est une conséquence du théorème de Banach.

La proposition 1.4 (ii) peut être précisée par la proposition suivante :

<u>Proposition 1.5</u> : *Si* T, *appartenant à* $[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$, *admet la décomposition particulière* $T = \sum_{j=0}^{k} x_n^j g_j$, *où* g_j *appartient à* $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $j = 0,1,\dots,k$, *alors :*

$$||T||_{[W_k^m(\mathbb{R}^n)]'} = \operatorname*{Inf}_{\substack{\sum_{j=0}^{k} x_n^j \varphi_j = 0 \\ \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \sum_{j=0}^{k} ||g_j + \varphi_j||_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \right\} .$$

Pour démontrer cette proposition on commence par établir le lemme suivant :

<u>Lemme 1.2</u> : *Si* $\sum_{j=0}^{k} x_n^j g_j = 0$ *pour certains* g_j *appartenant à* $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$, *alors il existe pour tout* $\varepsilon > 0$, *une famille* $(g_{j\varepsilon})_{0 \le j \le k}$ *vérifiant :*

(i) $g_{j\varepsilon}$ *appartient à* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $j = 0,1,\dots,k$,

(ii) $\sum_{j=0}^{k} x_n^j g_{j\varepsilon} = 0$,

(iii) $\lim_{\varepsilon \to 0} g_{j\varepsilon} = g_j$ *dans* $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$, *pour* $j = 0,1,\dots,k$.

<u>Démonstration</u> : Dans une première étape on tronque : soit Ψ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \le 1$ et $\Psi(x) = 0$ pour $|x| \ge 2$. On pose $\Psi_R(x) = \Psi(x/R)$ pour $R > 0$ et $g_{jR} = g_j \Psi_R$ pour $j = 0,1,\dots,k$. Alors g_{jR} est une distribution à support compact qui converge, lorsque R tend vers $+\infty$, vers g_j dans $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a toujours la relation :

$$\sum_{j=0}^{k} x_n^j g_{jR} = 0 .$$

Dans une seconde étape, on régularise les éléments g_{jR} qu'on note maintenant g_j : soit j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$. On pose $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j(\frac{x}{\varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$ et, pour $j = 0,1,\dots,k$, on définit $g_{j\varepsilon}$ par :

$$\begin{cases} g_{j\varepsilon} = j_\varepsilon * g_j + \sum_{q=j+1}^{k} \binom{q-j}{q} (-1)^{q-j} (g_q * x_n^{q-j} j_\varepsilon), \text{ si } 0 \leq j < k, \\ g_{k\varepsilon} = j_\varepsilon * g_k . \end{cases}$$

La famille $(g_{j\varepsilon})_{0\leq j\leq k}$ ainsi définie satisfait à (i), (ii), (iii).

<u>Démonstration de la proposition 1.5</u> : Il suffit de prouver que si T admet une autre décomposition $\sum_{j=0}^{k} x_n^j g_j'$ alors

$$\inf_{\substack{\sum_{j=0}^{k} x_n^j \varphi_j = 0 \\ \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}} \{ \sum_{j=0}^{k} ||g_j + \varphi_j||_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} \} \leq \sum_{j=0}^{k} ||g_j'||_{H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)} .$$

Or $\sum_{j=0}^{k} x_n^j (g_j - g_j') = 0$ avec $g_j - g_j'$ appartenant à $H^{-m+k-j}(\mathbb{R}^n)$ pour $j = 0,1,\dots,k$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.2 pour obtenir l'inégalité précédente.

2°) <u>Définition des traces pour les éléments de $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$.</u>

Etant donné u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$, on peut lui associer m fonctions $\gamma_j u(x')$, appelées traces de u et définies par :

$$\gamma_j u(x') = \begin{cases} D_{x_n}^j u(x',0) & \text{pour } j = 0,1,\dots,m-k-1, \text{ si } 0 \leq k < m, \\ (-1)^{-j-1} \int_0^{+\infty} x_n^{-j-1} u(x',x_n)dx_n, & \text{pour } j = -k,\dots,\min(-1,m-k-1) \\ & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

où $D_{x_n} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$. La remarque 1.1 montre que la définition de $\gamma_j u$ pour $j = -k,\dots,\min(-1,m-k-1)$ a un sens. On notera $\gamma u = \{\gamma_{-k} u,\dots,\gamma_{m-k-1} u\}$.

Proposition 1.6 : *L'application* $\gamma : u \longmapsto \gamma u$ *est linéaire, continue et surjective de* $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ *sur* $\prod_{j=-k}^{m-k-1} H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Démonstration : 1 - On montre tout d'abord que l'application $\gamma_j : u \longmapsto \gamma_j u$ est linéaire et continue de $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$ dans $H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Si $0 \leq k < m$, pour $j = 0,1,\ldots,m-k-1$, ce résultat est classique (cf. [14] par exemple).

Si $1 \leq k$, pour $j = -k,\ldots,\min(-1,m-k-1)$, on procède de la façon suivante. Pour u appartenant à $W_k^m(\mathbb{R}_+^n)$, on a :

$$\begin{cases} x_n^{\max(0,k-m)} \; u(x',x_n) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{\max(0,m-k)}(\mathbb{R}^{n-1})), \\ x_n^k \; u(x',x_n) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^m(\mathbb{R}^{n-1})). \end{cases}$$

On désigne par F la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ par rapport à la dernière variable x_n et par $\tilde{u}$ le prolongement par zéro pour $x_n < 0$ de u. Les relations précédentes montrent que :

$$\begin{cases} F(x_n^{\max(0,k-m)} \; \tilde{u}(x',x_n)) \in L^2(\mathbb{R}; H^{\max(0,m-k)}(\mathbb{R}^{n-1})), \\ (-D_{\xi_n})^{\min(k,m)} \; \{F(x_n^{\max(0,k-m)} \; \tilde{u}(x',x_n))\} \in L^2(\mathbb{R}; H^m(\mathbb{R}^{n-1})) \; . \end{cases}$$

On en déduit le résultat puisque, pour $j = -k,\ldots,\min(-1,m-k-1)$ on a :

$$\gamma_j \; u = (-1)^{\min(0,m-k)} \; D_{\xi_n}^{\min(-j-1,-j-1+m-k)} \; \{F(x_n^{\max(0,k-m)} \; \tilde{u})\}_{|\xi_n=0}$$

2 - On montre maintenant que l'application γ est surjective. On commence par remarquer que si u appartient à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ et si v_k est la fonction de $\mathcal{D}(\overline{R_+^n})$ définie par

$$(*) \quad v_k(x',x_n) = \int_{x_n}^{+\infty} \int_{\sigma_2}^{+\infty} (\ldots (\int_{\sigma_k}^{+\infty} u(x',\sigma) \, d\sigma)\ldots) \, d\sigma_3) \, d\sigma_2 \; ,$$

alors on a :

$$\begin{cases} \gamma_j\, u(x') = (-1)^{k-1}\,(-j-1)\,!\, \dfrac{\partial^{k+j} v_k}{\partial x_n^{k+j}}(x',0) \text{ pour } j = -k,\dots,\min(-1,m-k-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } k \geq 1, \\ \gamma_j\, u(x') = (-1)^{k+j}\, i^j\, \dfrac{\partial^{k+j} v_k}{\partial x_n^{k+j}}(x',0) \text{ pour } j = 0,\dots,m-k-1 \quad \text{si } 0 \leq k < m. \end{cases}$$

On désigne par ^ la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par rapport aux variables tangentielles x', c'est-à-dire :

$$\hat{v}(\xi',x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i<x',\xi'>} v(x',x_n)\, dx' .$$

Soient j un indice tel que $-k \leq j \leq m-k-1$ et φ_j appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. Soit de plus Ψ appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que $\Psi(t) = 1$ dans un voisinage de 0. Considérons la fonction u définie par sa transformée de Fourier partielle $\hat{u}$ donnée par :

$$\hat{u}(\xi',x_n) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \{\Psi(x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2})\ \hat{\varphi}_j(\xi')\ \frac{(ix_n)^{k+j}}{(k+j)!}\} .$$

La fonction $\hat{v}_k$ associée à cette fonction $\hat{u}$ par la formule (*) est donnée par :

$$\hat{v}_k(\xi',x_n) = \Psi(x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2})\ \hat{\varphi}_j(\xi')\ \frac{(ix_n)^{k+j}}{(k+j)!} ,$$

on en déduit les relations :

$$\frac{\partial^{k+\ell}\hat{v}_k}{\partial x_n^{k+\ell}}(\xi',0) = \delta_{k+\ell,k+j}\quad i^{k+j}\ \hat{\varphi}_j(\xi') \quad \text{pour } \ell \geq -k$$

(où $\delta_{k+\ell,k+j}$ est le symbole de Kronecker).

On vérifie ensuite qu'il existe une constante C, indépendante de φ_j, telle que :

$$||u||_{W_k^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \quad ||\varphi_j||_{H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

On en conclut que l'application

$$\gamma : u \longmapsto \gamma u : W_k^m(\mathbb{R}_+^n) \longrightarrow \prod_{j=-k}^{m-k-1} H^{m-k-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ est surjective.}$$

3°) Les espaces $W_k^m(\Omega)$.

Soit maintenant Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \varphi(x) = 0\}, \\ \text{grad } \varphi\ (x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \Gamma, \end{cases}$$

où grad φ est le vecteur gradient associé à φ.

On définit les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\Omega)$ par :

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in H^{m-k}(\Omega);\quad \varphi^k\, u \in H^m(\Omega)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour la norme :

$$u \longmapsto ||u||_{W_k^m(\Omega)} = (||u||^2_{H^{m-k}(\Omega)} + ||\varphi^k\, u||^2_{H^m(\Omega)})^{1/2}$$

De la proposition 1.1, on déduit :

Proposition 1.7 : *Pour tout entier* h *tel que* $0 \leq h \leq k$, *l'application*

$$u \longmapsto \varphi^{k-h}\, u$$

est linéaire et continue de $W_k^m(\Omega)$ *dans* $H^{m-h}(\Omega)$.

De la remarque 1.1, on déduit :

Remarque 1.3. On a :

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ \varphi^{\max(0,k-m)}\, u \in L^2(\Omega),\ \ \varphi^k\, u \in H^m(\Omega)\}.$$

De la proposition 1.2, on déduit :

Proposition 1.8 : *$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W_k^m(\Omega)$.*

De la proposition 1.3, on déduit :

Proposition 1.9 : *Un élément u appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$, appartient à $W_k^m(\Omega)$, si et seulement si $\varphi^k u$ appartient à $H^m(\Omega) \cap H_0^{\min(k,m)}(\Omega)$.*

D'où l'on déduit :

Remarque 1.4. Pour $k \geq m$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_k^m(\Omega)$ et, sur cet espace, la norme :

$$u \longmapsto ||\varphi^k u||_{H^m(\Omega)}$$

est équivalente à la norme :

$$u \longmapsto ||u||_{W_k^m(\Omega)} .$$

On va définir maintenant des traces pour les éléments de $W_k^m(\Omega)$. Soit δ un nombre réel > 0 et $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x;\Gamma) < \delta\}$ où $d(x;\Gamma)$ désigne la distance du point x à Γ. On suppose δ suffisamment petit pour que pour tout x appartenant à U_δ, la distance de x à Γ ne soit atteinte que par un seul point x_Γ de Γ.

L'application Ψ définie par :

$$x \longrightarrow (x_\Gamma, \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} d(x,\Gamma)) : U_\delta \longrightarrow \Gamma \times]-\delta,\delta[$$

est un isomorphisme de classe C^∞.

Soit α une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ égale à 1 dans un voisinage de 0 et à support dans $]-\delta,\delta[$.

Alors pour tout u appartenant à $W_k^m(\Omega)$ on pose, pour x appartenant à Γ :

$$\gamma_j u(x) = \begin{cases} D_t^j u(\Psi^{-1}(x,t))|_{t=0} \text{ pour } j = 0,\dots,m-k-1 \quad \text{si } 0 \leq k < m \\ (-1)^{-j-1} \displaystyle\int_0^\infty t^{-j-1}\alpha(t)u(\Psi^{-1}(x,t))dt \text{ pour } j=-k,\dots,\min(-1,m-k-1) \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } k \geq 1 , \end{cases}$$

où $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$.

On note $\gamma u = \{\gamma_{-k} u, \dots, \gamma_{m-k-1} u\}$

De la proposition 1.6, on déduit :

Proposition 1.10 : *L'application* $\gamma : u \longmapsto \gamma u$ *est linéaire, continue et surjective de* $W_k^m(\Omega)$ *sur* $\prod_{j=-k}^{m-k-1} H^{m-k-j-1/2}(\Gamma)$.

Pour $j = -k, \dots, \min(-1, m-k-1)$, $\gamma_j u$ dépend de la fonction α. Cependant si β est une fonction du même type que α on note que :

$$\int_0^{+\infty} t^{-j-1} (\alpha(t) - \beta(t)) u (\Psi^{-1}(x,t)) dt$$

appartient à $H^m(\Gamma)$.

4. Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.

Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné, de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } \Gamma, \end{cases}$$

où grad φ est le vecteur gradient associé à φ.

Soit l'opérateur elliptique dégénéré $L \equiv L(x;D_x)$ défini par :

$$L(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(x;D_x)\ \{(\varphi(x))^{k-h}\, u(x)\},$$

où k et m sont deux entiers ≥ 1, $P^{2m-h}(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre $\leq 2m-h$, $P^{2m}(x;D_x)$ est un opérateur elliptique dans $\overline{\Omega}$, d'ordre $2m$. L'opérateur L est donc un opérateur d'ordre $2m$, elliptique à l'intérieur de Ω, et dont la dégénérescence sur le bord de Ω est d'ordre k.

On se propose d'étudier des problèmes aux limites associés à L :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega, \\ B(\gamma u) = g \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où B est un système d'opérateurs différentiels frontière en nombre fini, du point de vue de l'existence des solutions u dans des espaces de Sobolev avec poids du type $W_k^{2m+p}(\Omega)$, pour p entier ≥ 0.

Comme dans le cas elliptique on ne peut se donner arbitrairement l'opérateur $\{L,B\}$ pour que le problème soit bien posé ; aussi sera-t-on amené à introduire certaines conditions sur cet opérateur.

Le but essentiel de ce chapitre est de montrer que l'opérateur $\{L,B\}$ est un opérateur à indice (entre espaces convenables), la technique utilisée étant celle des estimations a priori obtenues à partir de théorèmes d'isomorphismes pour les opérateurs correspondant à une variable sur $\mathbb{R}_+$. (cf [4], [5]) (les résultats donnés dans [4] pour des opérateurs $L \equiv L(t;D_t)$ définis sur $\mathbb{R}$ par

$$Lu(t) \equiv L(t;D_t)\,\{u\,(t)\} \equiv \sum_{h=0}^{k} P^{m-h}\,(D_t)\,\{t^{k-h}\,u(t)\}$$

où k et m sont deux entiers vérifiant $1 \leq k \leq m$ sont valables, sous les mêmes hypothèses, pour des opérateurs $L \equiv L(t;D_t)$ définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) \equiv L(t;D_t)\,\{u(t)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,m)} P^{m-h}(D_t)\,\{t^{k-h}\,u(t)\}$$

où k et m sont deux entiers ≥ 1 ; l'équation déterminante associée étant $\phi(\rho) = 0$ avec

$$\phi(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,m)} p_{m-h}^{m-h}\, i^{k-h}\quad \rho(\rho-1)\ \ldots\ (\rho-k+h+1) \text{ lorsque}$$

$$P^{m-h}(D_t) = \sum_{j=0}^{m-h} p_j^{m-h}\, D_t^j\ .$$

Cette généralisation, faite dans [5], utilise les mêmes méthodes que dans [4] avec quelques modifications.)

1°) Estimations a priori dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$.

1.1. Les estimations a priori dans le demi-espace pour le cas des coefficients constants.

1.1.1. Notations et hypothèses

Soit l'opérateur $L \equiv L(x_n;D_{x'},D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) \equiv L(x_n;D_{x'},D_{x_n})\ \{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}\ (D_{x'};D_{x_n})\ \{x_n^{k-h}\ u(x)\},$$

où $(D_{x'}, D_{x_n}) = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} ; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$, où k est m sont deux entiers ≥ 1 et où

(i) $P^{2m-h}(D_{x'}, D_{x_n})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants complexes, homogène et d'ordre 2m-h ou identiquement nul :

$$P^{2m-h}(D_{x'}, D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+j=2m-h} p^{2m-h}_{j,\alpha}\, D^{\alpha}_{x'}\, D^{j}_{x_n}$$

(où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ appartenant à $\mathbb{N}^{n-1}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$),

(ii) $P^{2m}(D_{x'}, D_{x_n})$ est un opérateur d'ordre 2m proprement elliptique, c'est-à-dire : pour tout vecteur ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, le polynôme $P^{2m}(\xi', \xi_n)$ en ξ_n, admet exactement m zéros à partie imaginaire > 0 et m zéros à partie imaginaire < 0.

Cet opérateur L induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire et continue de $W^{2m+p}_{k}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$.

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par rapport aux variables tangentielles (cf. chapitre I), l'opérateur L est transformé en un opérateur différentiel ordinaire en x_n, noté $L(x_n ; \xi', D_{x_n})$ dépendant du paramètre ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, et défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L(x_n ; \xi', D_{x_n})\{v(x_n)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(\xi', D_{x_n})\{x_n^{k-h}\, v(x_n)\}.$$

Ces opérateurs appartiennent à la classe des opérateurs différentiels étudiés dans [4], [5]. Ceci nous amène à définir pour chaque entier $p \geq 0$, la condition $H_1(p ; \mathbb{R}^n_+)$ suivante :

<u>$H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$</u> l'équation $\phi(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} p^{2m-h}_{2m-h,0}\, i^{k-h}\, \rho(\rho-1)\dots(\rho-k+h+1) = 0$

n'admet pas de racine ρ telle que $\mathrm{Re}\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$.

Désignons par r_p le nombre de racines ρ de l'équation $\phi(\rho) = 0$ vérifiant : $\mathrm{Re}\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}$. On introduit alors une condition

$\underline{H_2(p,\mathbb{R}^n_+)}$ le nombre $\chi_p = m-r_p$ est ≥ 0 (*).

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque $\chi_p > 0$, pour $j = 1,\dots,\chi_p$ soit l'opérateur $B^p_j(D_{x'})$ défini par :

$$B^p_j(D_{x'})\,\gamma u = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(D_{x'})\,\gamma_q u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$ et $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, $B_{jq}(D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles soit identiquement nul soit à coefficients constants complexes, homogène et d'ordre m_j-q, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ (et si, m_j-q est négatif, l'opérateur $B_{jq}(D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul).

On notera $B_p \equiv B_p(D_{x'}) \equiv (B^p_1(D_{x'}),\dots,B^p_{\chi_p}(D_{x'}))$. Cet opérateur induit une application linéaire et continue de $W^{2m+p}_k(\mathbb{R}^n_+)$ dans $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$u \longmapsto B_p u \equiv (B^p_1\,\gamma u,\dots,B^p_{\chi_p}\,\gamma u).$$

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$, l'opérateur B_p est transformé en un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^{2m+p}$ dans $\mathbb{C}^{\chi_p}$ noté $B_p(\xi')$, dépendant du paramètre ξ' de $\mathbb{R}^{n-1}$ et défini sur $\mathbb{C}^{2m+p}$ par :

$$z = (z_{-k},\dots,z_{2m+p-k-1}) \longrightarrow B_p(\xi')z = (B^p_1(\xi')z,\dots,B^p_{\chi_p}(\xi')\,z)$$

où

$$B^p_j(\xi')\,z = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(\xi')\,z_q\ .$$

(*) On examinera dans le chapitre 5 quelques cas particuliers où cette condition n'est pas vérifiée.

On définit maintenant la condition $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ suivante (*) :

$H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ Pour tout ω appartenant à la sphère unité S_{n-2} de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(x_n;\omega,D_{x_n})\,\{v(x_n)\} = 0 \\ B_p(\omega)\quad \gamma v = 0 \qquad\qquad , \text{ si } \chi_p > 0\ ; \end{cases}$$

ou

$$\{L(x_n;\omega,D_{x_n})\,\{v(x_n)\} = 0\ , \text{ si } \chi_p = 0,$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$.

Il faut noter que, lorsque $p = 0$, de telles conditions ont été introduites dans [22], [19].

1.1.2. Enoncé des résultats.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longmapsto \mathcal{P}_p\, u = \begin{cases} \{Lu,\ B_p\ \gamma u\} & \text{si } \chi_p > 0, \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0. \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $H^p(\mathbb{R}^n_+)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

On désigne par $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ (resp. $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$) l'espace dual de $H^p(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$). L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$) dans

---

(*) On montrera dans le chapitre 5, que cette condition peut être exprimée, dans certains cas, à l'aide de conditions algébriques portant sur l'opérateur.

$[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$ si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$). On désigne enfin par j_p l'isomorphisme canonique de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ sur $H_0^{-p}(\mathbb{R}^n_+)$, espace des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

On a alors les théorèmes suivants :

<u>Théorème 1.1</u> : *Soit un entier* $p \geq 0$. *On suppose que les conditions* $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$ $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ *sont réalisées. Alors, il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* u *appartenant à* $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ *on ait*

$$||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\,\{||\mathcal{B}_p u||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + ||u||_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}\}\ .$$

$$(\text{resp. } ||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\ \{||\mathcal{P}_p\, u||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + ||u||_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)})$$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

<u>Remarque 1.1</u>. Le terme $||u||_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)}$ figurant dans le deuxième membre des estimations précédentes peut être remplacé par $||(1+x_n^k)\ u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $k < 2m+p$ et par $||x_n^k\ u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $k \geq 2m+p$.

<u>Théorème 1.2</u> : *Soit un entier* $p \geq 0$. *On suppose que les conditions* $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ *sont réalisées. Alors il existe une constante* $C > 0$, *telle que pour tout* (f,g) (resp. f) *appartenant à*
$[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$),

on ait :

$$||(f,g)||_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\{||\mathcal{P}_p^*(f,g)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'}$$

$$+ ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\}\ ,$$

(resp. $||f||_{[H^{p}(\mathbb{R}^n_+)]'} \leq C\{||\mathcal{P}^*_p f||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'} + ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}$).

1.1.3. Démonstration du théorème 1.1.

Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. Les hypothèses $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ impliquent que pour tout ω appartenant à S_{n-2}, le couple d'opérateurs $\{L(x_n;\omega,D_{x_n}), B_p(\omega)\}$ réalise un isomorphisme de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_p}$. La sphère S_{n-2} étant compacte, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout ω appartenant à S_{n-2} et pour tout v appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$, on ait :

$$\sum_{\ell=0}^{2m+p} ||D_s^\ell(s^k v(s))||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C\{||L(s,\omega,D_s)\{v(s)\}||_{H^p(\mathbb{R}_+)} + ||B_p(\omega)\, v||_{\mathbb{C}^{\chi_p}}\} .$$

Pour u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ et ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, on pose :

$$v(s) = u(x_n)$$

avec $s = x_n|\xi'|$.

On vérifie que l'on a les relations suivantes :

$$D_s^\ell(s^k v(s)) = |\xi'|^{k-\ell}\, D_{x_n}^\ell\,(x_n^k\, u(x_n)) \text{ pour } \ell = 0,\dots,2m+p,$$

$$L(s;\omega,D_s)\ \{v(s)\} = |\xi'|^{k-2m}\ L(x_n;\xi',D_{x_n})\ \{u(x_n)\} \text{ avec } \omega = \xi'/|\xi'| ,$$

$$B_{jq}(\omega) = |\xi'|^{q-m_j}\ B_{jq}(\xi') \text{ pour } 1 \leq j \leq \chi_p \text{ et } -k \leq q \leq 2m+p-k-1,$$

$$\gamma_q v = |\xi'|^{-q}\ \gamma_q v \qquad \text{pour } -k \leq q \leq 2m+p-k-1.$$

Par suite il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ et tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ on ait :

$$\sum_{\ell=0}^{2m+p} |\xi'|^{k-\ell+1/2}||D_{x_n}(x_n^k u(x_n))||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq C\ \{\sum_{\ell=0}^{p}\ |\xi'|^{k-\ell-2m+1/2}||D_{x_n}^\ell\ (L(x_n,\xi';D_{x_n})\{u(x_n)\})||_{L^2(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{-m_j}\ |\sum_{q=-k}^{2m+p-k-1}\ B_{jq}(\xi')\ \gamma_q u|\} .$$

Ainsi pour tout u appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ on a :

$$\sum_{\ell=0}^{2m+p} |\xi'|^{k-\ell+1/2} \, ||D^\ell_{x_n} (x^k_n \, \hat{u}(\xi',x_n))||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq C \, \{ \sum_{\ell=0}^{p} |\xi'|^{k-\ell-2m+1/2} \, ||D^\ell_{x_n} (L(x_n,\xi';D_{x_n}) \, \{\hat{u}(\xi',x_n)\})||_{L^2(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{-m_j} \, | \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(\xi') \; \gamma_q \, \hat{u}(\xi',.)| \}$$

On multiplie les deux membres par $|\xi'|^{2m+p-k}$ et on intègre par rapport à ξ' dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On obtient :

$$\sum_{|\alpha|+j=2m+p} ||D^\alpha_{x'} D^j_{x_n} (x^k_n u)||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C ||\mathcal{G}_p u||_{H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

d'où

$$||x^k_n \, u||_{H^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \{ ||\mathcal{G}_p u||_{H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + ||x^k_n \, u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \} \; .$$

On en déduit le théorème 1.1. et la remarque 1.1. en utilisant la remarque 1.1. et la remarque 1.2. du chapitre I.

Pour établir le théorème 1.2, on a besoin de quelques lemmes techniques.

1.1.4 Quelques lemmes.

Soit ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et ϕ_q appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $q = -k,\dots,2m+p-k-1$ La distribution

$$T = \phi + \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} \phi_q \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n) + \sum_{q=0}^{\max(2m+p-k-1,-1)} \phi_q \otimes \delta^{(q)}(x_n)$$

où Y est la fonction de Heaviside et δ la mesure de Dirac en $x_n = 0$ appartient à $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$.

Pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, la distribution en x_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{T}(\xi',.) = \hat{\phi}(\xi',.) + \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} \hat{\phi}_q(\xi')x_n^{-q-1}\, Y(x_n) +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\max(2m+p-k-1,-1)} \hat{\phi}_q(\xi')\, \delta^{(q)}(x_n)$$

appartient à $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'$.

Désignons par $H_{\xi'}$ l'homothétie :

$$H_{\xi'} : x_n \longmapsto s = x_n|\xi'|$$

pour ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$. Notons $H_{\xi'}\, \hat{T}(\xi',.)$ la distribution en s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\langle H_{\xi'}\, \hat{T}(\xi',.),\alpha(s)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \langle \hat{T}(\xi',.),\alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

pour toute fonction α de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

<u>Lemme 1.1.</u> : *Avec les notations précédentes, il existe une constante* $C > 0$ *(indépendante de* ϕ *et* ϕ_q *pour* $q = -k,\dots,2m+p-k-1$*) telle que*

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1} \|H_{\xi'}\, \hat{T}(\xi',.)\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}\, d\xi' \leq C\|T\|^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}.$$

<u>Démonstration</u> : Puisque pour $q = -k,\dots,\min(-1,2m+p-k-1)$ la distribution $x_n^{-q-1}\, Y(x_n)$ appartient à $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'$ on peut écrire :

$$x_n^{-q-1}\, Y(x_n) = \sum_{j=0}^{k} x_n^j\, Y_{jq}\,(x_n)$$

où Y_{jq} appartient à $H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R})$ pour $j = 0,\dots,k$ et $q = -k,\dots \min(-1,2m+p-k-1)$.

Par ailleurs $\phi_q \otimes \delta^{(q)}(x_n)$ appartient à $H^{-2m-p+k}(\mathbb{R}^n)$ pour $q = 0,\dots,\max(2m+p-k-1,-1)$ (précisons que si $k \geq 2m+p$, ces termes disparaissent).

Il en résulte que la distribution T introduite précédemment peut s'écrire sous la forme

$$T = \sum_{j=0}^{k} x_n^j \; V_j$$

avec $V_0 = \phi + \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} \phi_q \otimes Y_{0q} + \sum_{q=0}^{\max(2m+p-k-1,-1)} \phi_q \otimes \delta^{(q)}$,

et

$$V_j = \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} \phi_q \otimes Y_{jq} \text{ pour } j = 1,2,\dots,k.$$

De plus, V_j appartient à $H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R}^n)$ pour $j = 0,\dots,k$.

Soit maintenant une suite $(\varphi_j)_{0\leq j\leq k}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\sum_{j=0}^{k} x_n^j \varphi_j = 0$. Posons $U_j = V_j + \varphi_j$ pour $j = 0,\dots,k$. Pour toute fonction α appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle H_\xi, \hat{T}(\xi',.),\alpha(s)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{k} \langle \hat{U}_j(\xi',.), x_n^j \alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

On examine chacun des termes du second membre. On a :

$$\langle \hat{U}_j(\xi',.), x_n^j(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F} U_j(\xi',\xi_n)|\xi'|^{-j-1}\left(\overset{-1}{F}\right)(s^j\alpha(s))(\xi_n/|\xi'|)d\xi_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F} U_j(\xi',x_n|\xi'|)(1+x_n^2)^{\frac{-2m+k-p-j}{2}} |\xi'|^{-j}(1+x_n^2)^{\frac{2m+p-k+j}{2}}\left(\overset{-1}{F}\right)(s^j\alpha(s))(x_n)dx_n.$$

D'où :

$$|\langle \hat{U}_j(\xi',.), x_n^j\alpha(x_n|\xi'|)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})}| \leq$$

$$\leq |\xi'|^{-j}\|s^j\alpha(s)\|_{H^{2m+p-k+j}(\mathbb{R})}\left(\int_{\mathbb{R}} (1+x_n^2)^{-2m-p+k-j}|\mathcal{F} U_j(\xi',x_n|\xi'|)|^2 dx_n\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= ||s^j\alpha(s)||_{H^{2m+p-k+j}(\mathbb{R})} |\xi'|^{2m+p-k-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-2m-p+k-j} |\mathcal{F} U_j(\xi',\xi_n)|^2 \, d\xi_n\right)^{1/2} .$$

Comme la norme sur $W_k^{2m+p}(\mathbb{R})$ est équivalente à la norme

$$v \longmapsto \sum_{j=0}^{k} ||s^j \, v(s)||_{H^{2m+p-k+j}(\mathbb{R})} ,$$

on déduit des majorations précédentes que :

$$||H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.)||^2_{[W_k^{2m+p}(R)]'} \leq$$

$$\leq |\xi'|^{4m+2p-2k-1} \sum_{j=0}^{k} \left(\int_{\mathbb{R}} (|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-2m-p+k-j} \, | \mathcal{F} U_j(\xi',\xi_n)|^2 \, d\xi_n\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

d'où :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{4m-2p+2k+1} \, ||H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.)||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} \, d\xi' \leq C \sum_{j=0}^{k} ||U_j||^2_{H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R}^n)} .$$

Le lemme 1.1 est alors une conséquence de la proposition 1.5 du chapitre 3.

Lemme 1.2 : *Avec les notations précédentes, il existe une constante* $C > 0$ *(indépendante de* ϕ *et* ϕ_q *pour* $q = -k,\dots,2m+p-k-1$) *telle que*

$$\int_{|\xi'|\leq 1} ||\hat{T}(\xi',.)||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} \, d\xi' \leq C||T||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} .$$

Démonstration : Avec les notations de la démonstration précédente, il suffit de vérifier que :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} ||\hat{U}_j(\xi',.)||^2_{H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R})} \, d\xi' \leq C \quad ||U_j||^2_{H^{-2m-p+k-j}(\mathbb{R}^n)} .$$

1.1.5 Démonstration du théorème 1.2.

Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. L'espace $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$

étant canoniquement isomorphe au sous-espace des distributions de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, on peut considérer l'opérateur $\mathcal{P}^*_p$ comme un opérateur linéaire et continu de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$.

<u>Lemme 1.3</u> : *Soit* $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ *appartenant à* $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ *Alors* $\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ *considéré comme élément de* $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$, *s'écrit :*

$$\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p}) = L^*(j_p f) + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-q-1} B^*_{jq}\, g_j \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{\max(-1,2m+p-k-1)} i^{-q} B^*_{jq}\, g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n)$$

où L^* (resp. B^*_{jq}) *désigne l'opérateur adjoint formel de* L (resp. B_{jq}).

<u>Démonstration</u> : Soit φ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Par définition

$$\langle \mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots g_{\chi_p}), \overline{\varphi}_{|\mathbb{R}^n_+} \rangle_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]' \times W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$= \langle (f;g_1,\dots,g_{\chi_p}), \overline{\mathcal{P}_p \varphi}_{|\mathbb{R}^n_+} \rangle_{([H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})) \times (H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}))}$$

$$= \langle f, \overline{L\varphi}_{|\mathbb{R}^n_+} \rangle_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times H^p(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \langle g_j, \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} \overline{B_{jq}\, \gamma_q\, \varphi}_{|\mathbb{R}^n_+} \rangle_{H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$= \langle L^*(j_p f), \overline{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-q-1} \langle B^*_{jq}\, g_j \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n), \overline{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=0}^{\max(2m+p-k-1,-1)} i^{-q} \langle B^*_{jq}\, g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n), \overline{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

d'où le lemme 1.3.

Démonstration du théorème 1.2 :

Désignons, pour tout ω appartenant à S_{n-2}, par $\mathcal{P}_p(\omega)$ l'opérateur défini sur $W^{2m+p}_k(\mathbb{R})$ par :

$$v \longmapsto \mathcal{P}_p(\omega)v \equiv (L(x_n;\omega,D_{x_n})v,\ B_p(\omega)\gamma v) \ :\ W^{2m+p}_k(\mathbb{R}_+) \longrightarrow H^p(\mathbb{R}_+)\times \mathbb{C}^{\chi_p}.$$

Les hypothèses $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ impliquant que $\mathcal{P}_p(\omega)$ est un isomorphisme, son adjoint $\mathcal{P}^*_p(\omega)$ est un isomorphisme de $[H^p(\mathbb{R}_+)]'\times\mathbb{C}^{\chi_p}$ sur $[W^{2m+p}_k(\mathbb{R}_+)]'$. Pour $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}_+)]'\times\mathbb{C}^{\chi_p}$, $\mathcal{P}^*_p(\omega)(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ considéré comme élément de $[W^{2m+p}_k(\mathbb{R})]'$ s'écrit :

$$\mathcal{P}^*_p(\omega)(f;g_1,\dots,g_{\chi_p}) = L^*(x_n;\omega,D_{x_n})\{j_p f\} + \sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-q-1} B^*_{jq}(\omega)g_j x_n^{-q-1}Y(x_n)$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=0}^{\max(2m+p-k-1,-1)} i^{-q} B^*_{jq}(\omega)g_j\,\delta^{(q)}(x_n),$$

où j_p désigne ici l'isomorphisme canonique de $[H^p(\mathbb{R}_+)]'$ sur $H_\circ^{-p}(\mathbb{R})$.

La compacité de la sphère S_{n-2} implique l'existence d'une constante $C>0$ telle que, pour tout ω appartenant à S_{n-2} et pour tout $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}_+)]'\times\mathbb{C}^{\chi_p}$, on ait :

$$(*)\quad \|f\|_{[H^p(\mathbb{R}_+)]'} + \sum_{j=1}^{\chi_p}|g_j| \le C\Big\| L^*(s;\omega,D_s)\{j_p f\} + \sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-q-1} B^*_{jq}(\omega)g_j s^{-q-1}Y(s)$$

$$+\sum_{j=1}^{\chi_p}\sum_{q=0}^{\max(2m+p-k-1,-1)} i^{-q}B^*_{jq}(\omega)g_j\,\delta^{(q)}(s)\Big\|_{[W^{2m+p}_k(\mathbb{R})]'}\,.$$

Soit maintenant $(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \times (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^{\chi_p}$ et soit la distribution $T = \mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$. L'expression même de $\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots g_{\chi_p})$ (donnée par le lemme 1.3) prouve que l'on peut appliquer les lemmes 1.1 et 1.2 (on remarquera que dans le cas présent, $j_p\, f$ n'est autre que le prolongement $\tilde{f}$ de f par 0 pour $x_n < 0$ et ainsi $j_p\, f = \tilde{f}$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Par ailleurs, pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$H_{\xi'}\hat{T}(\xi',.) = |\xi'|^{2m-k-1}\, L^*(s;\omega,D_s)\{\widehat{j_p\, f}(\xi',\frac{s}{|\xi'|})\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-q-1}\, |\xi'|^{m_j}\, B^*_{jq}(\omega)\, \hat{g}_j(\xi')\, s^{-q-1}\, Y(s) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{\max(-1,2m+p-k-1)} i^{-q}\, |\xi'|^{m_j}\, B^*_{jq}(\omega)\, \hat{g}_j(\xi')\, \delta^{(q)}(s),$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Appliquons l'inégalité (*) à la famille $(|\xi'|^{2m-k-1}\, \widehat{j_p f}(\xi',\frac{s}{|\xi'|})\,;$ $|\xi'|^{m_1}\hat{g}(\xi),\dots,|\xi'|^{m_{\chi_p}}\, \hat{g}_{\chi_p}(\xi'))$ de $[H^p(\mathbb{R}_+)]' \times \mathbb{C}^{\chi_p}$, ce qui donne :

$$|\xi'|^{2m-k-1} ||\widehat{j_p f}(\xi',\frac{s}{|\xi'|})||_{H^{-p}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{m_j}\, |\hat{g}_j(\xi')| \leq$$

$$\leq C||H_{\xi'}\, \hat{T}(\xi',.)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}.$$

On élève au carré, on multiplie les deux membres par $|\xi'|^{-4m-2p+2k+1}$ et on intègre par rapport à ξ' dans $|\xi'| \geq 1$. Compte tenu du lemme 1.2, cela donne :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-2p-1}\, ||\widehat{j_p f}(\xi',\frac{s}{|\xi'|})||^2_{H^{-p}(R)}\, d\xi' + \sum_{j=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1+2m_j} |\hat{g}_j(\xi')|^2 d\xi'$$

$$\leq C\, ||\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'}.$$

D'autre part :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-2p-1} \|\widehat{j_p f}(\xi', \tfrac{s}{|\xi'|})\|^2_{H^{-p}(\mathbb{R})} \, d\xi' = \int_{|\xi'|\geq 1} \int_{\mathbb{R}} (|\xi'|^2+\xi_n^2)^{-p} |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi',\xi_n)|^2 \, d\xi$$

$$\geq \int_{|\xi'|\geq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-p} \, |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi$$

et

$$\int_{|\xi'|\geq 1} |\xi'|^{-4m-2p+2k+1+2m_j} \, |\hat{g}_j(\xi')|^2 \, d\xi' \geq$$

$$\geq \int_{|\xi'|\geq 1} (1+|\xi'|^2)^{-2m-p+k+m_j+1/2} \, |\hat{g}_j(\xi')|^2 \, d\xi'.$$

Il reste donc à majorer $\displaystyle\int_{|\xi'|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-p} \, |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi$ et

$$\int_{|\xi'|\leq 1} (1+|\xi'|^2)^{-2m-p+k+m_j+1/2} \, |\hat{g}_j(\xi')|^2 \, d\xi'.$$

Or il est facile de vérifier que :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} (1+|\xi'|^2)^{-2m-p+k+m_j+1/2} \, |\hat{g}_j(\xi')|^2 \, d\,\xi' \leq 2 \, \|g_j\|^2_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

pour $j = 1,2,\ldots,\chi_p$.

Pour majorer la première intégrale, on introduit l'opérateur $\mathcal{S}_p(\omega_o)$ pour un certain ω_o appartenant à S_{n-2}. On applique l'inégalité $(*)$ à la famille $(\widehat{j_p f}(\xi',.) \,;\, \hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))$ et pour $\omega = \omega_o$, ce qui donne

$$(**) \quad \|\widehat{j_p f}(\xi',.)\|_{H^{-p}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\hat{g}_j(\xi')| \leq$$

$$\leq C \, \|\mathcal{S}_p^*(\omega_o) \, (\widehat{j_p f}(\xi',.), \hat{g}_1(\xi'),\ldots \hat{g}_{\chi_p}(\xi'))\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}.$$

Par ailleurs :

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-p} \, |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi_n \leq ||\widehat{j_p f}(\xi',.)||^2_{H^{-p}(\mathbb{R})}$$

et, pour $|\xi'| \leq 1$,

$$||(\mathcal{P}^*_p(\xi')-\mathcal{P}^*_p(\omega_o))(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}$$

$$\leq C \, \{||\widehat{j_p f}(\xi',.)||_{H^{-p-1}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{\chi_p} |\hat{g}_j(\xi')|\},$$

par suite, en intégrant la relation (**) (après avoir élevé au carré) par rapport à ξ' dans $|\xi'| \leq 1$, on obtient :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-p} |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \leq$$

$$\leq C\Big(\int_{|\xi'|\leq 1} ||\mathcal{P}^*_p(\xi')(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'}$$

$$+ \int_{|\xi'|\leq 1} ||\widehat{j_p f}(\xi',.)||^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R})} \, d\xi' + \sum_{j=1}^{\chi_p} \int_{|\xi'|\leq 1} |\hat{g}_j(\xi')|^2 \, d\xi'\Big).$$

Le lemme 1.2 donne :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} ||\mathcal{P}^*_p(\xi')(\widehat{j_p f}(\xi',.);\hat{g}_1(\xi'),\ldots,\hat{g}_{\chi_p}(\xi'))||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R})]'} d\xi' \leq$$

$$\leq C \, ||\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\ldots,g_{\chi_p})||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'} \, ,$$

d'autre part :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} ||\widehat{j_p f}(\xi',.)||^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R})} \, d\xi' \leq C||j_p f||^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}$$

et

$$\int_{|\xi'|\leq 1} |\hat{g}_j(\xi')|^2 \, d\xi' \leq C||g_j||^2_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \quad \text{pour } j=1,2,\dots,\chi_p.$$

On a donc obtenu la majoration :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-p} \, |\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq C(||\mathcal{S}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})||^2_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'}$$

$$+ ||j_p f||^2_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} ||g_j||_{H^{-2m-p+k+m_j-1}(\mathbb{R}^{n-1})}).$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.2.

1.2 Les estimations a priori dans le demi-espace pour le cas des coefficients variables.

1.2.1 Notations et hypothèses

Soit l'opérateur $L \equiv L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par

$$Lu(x) \equiv L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}) \, \{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(x;D_{x'},D_{x_n}) \, \{x_n^{k-h} u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers ≥ 1, et où :

(i) $P^{2m-h}(x;D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre 2m-h au plus :

$$P^{2m-h}(x;D_{x'},D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+j\leq 2m-h} p_j^{2m-h}(x) \, D^{\alpha}_{x'} \, D^{j}_{x_n} ,$$

(ii) $P^{2m}(x;D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur d'ordre 2m proprement elliptique dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, c'est-à-dire : pour tout ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ - {0} et pour tout x appartenant à $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, le polynôme $P^{2m}_{2m}(x;\xi) = \sum_{|\alpha|+j=2m} p^{2m-h}_{j\alpha}(x) \, \xi'^{\alpha} \, \xi_n^j$ en ξ_n, admet exactement m zéros à partie imaginaire > 0 et m zéros à partie imaginaire < 0.

Cet opérateur L induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire continue de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$.

A cet opérateur L on associe l'opérateur $L^\circ \equiv L^\circ(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})$ défini par :

$$L^\circ(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}_{2m-h}(x;D_{x'},D_{x_n})\,\{x_n^{k-h}\,u(x)\}$$

où

$$P^{2m-h}_{2m-h}(x;D_{x'},D_{x_n}) = \sum_{|\alpha|+j=2m-h} p^{2m-h}_{j\alpha}(x)\,D^{\alpha}_{x'}\,D^{j}_{x_n}\,.$$

L'opérateur $L^\circ(0,x_n;D_{x'},D_{x_n})$ est un opérateur du type étudié au paragraphe 1.1. Les conditions $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$ associées s'écrivent :

<u>$H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$</u> : l'équation $\quad \phi^\circ(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} p^{2m-h}_{2m-h,0}(0)\, i^{k-h}\,\rho(\rho-1)\ldots(\rho-k+h+1)=0$

n'admet pas de racine ρ telle que $\mathrm{Re}\,\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$.

Si r_p désigne le nombre de racines ρ de l'équation $\phi^\circ(\rho) = 0$ vérifiant $\mathrm{Re}\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}$, on pose :

<u>$H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$</u> : le nombre $\chi_p = m-r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque $\chi_p > 0$, pour $j = 1,\ldots,\chi_p$ soit l'opérateur $B^p_j(x';D_{x'})$ défini par

$$B^p_j(x';D_{x'})\,\gamma u = \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(x';D_{x'})\quad \gamma_q u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$, $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, $B_{jq}(x',D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées dans $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre inférieur ou égal à $m_j - q$, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ (et si m_j-q est négatif l'opérateur $B_{jq}(x',D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul).

On notera $B_p \equiv B_p(x',D_{x'}) \equiv (B^p_1(x',D_{x'}),\ldots,B^p_{\chi_p}(x',D_{x'}))$. Cet opérateur B_p induit une application linéaire et continue de $W^{2m+p}_k(\mathbb{R}^n_+)$ dans

$$\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})\quad :$$

$$u \longmapsto B_p \ \gamma u \equiv (B_1^p \ \gamma u, \dots, B_{\chi_p}^p \ \gamma u).$$

A cet opérateur B_p on associe l'opérateur $B_p^\circ \equiv B_p^\circ(x',D_{x'}) \equiv$

$(B_1^{p\circ}(x';D_{x'}),\dots,B_{\chi_p}^{p\circ}(x',D_{x'}))$ où

$$B_j^{p\circ}(x',D_{x'}) \ \gamma u \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}^{m_j-q} \ (x',D_{x'}) \ \gamma_q u,$$

$B_{jq}^{m_j-q}(x',D_{x'})$ étant la somme des termes d'ordre exactement m_j-q dans l'opérateur $B_{jq}(x';D_{x'})$.

On définit maintenant la condition $H_3(p;\mathbb{R}_+^n)$ suivante :

<u>$H_3(p;\mathbb{R}_+^n)$</u> : pour tout ω appartenant à S_{n-2}, le problème aux limites

$$\begin{cases} L^\circ(0,x_n;\omega,D_{x_n}) \ \{v(x_n)\} = 0 \\ B_p^\circ(0,\omega) \ \gamma v = 0 \qquad , \quad \text{si } \chi_p > 0 \end{cases}$$

ou

$$\{ L^\circ(0,x_n;\omega,D_{x_n}) \quad \{v(x_n)\} = 0 \qquad \text{si } \chi_p = 0$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$.

1.2.2 <u>Enoncé des résultats.</u>

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longmapsto \mathcal{P}_p \ u = \begin{cases} \{Lu, \ B_p \ \gamma u\} & \text{si } \chi_p > 0 \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0. \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $H^p(\mathbb{R}_+^n)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de

$[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$) dans $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'$ si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

On a les théorèmes suivants :

<u>Théorème 1.3</u> : *Soit un entier* $p \geq 0$. *On suppose que les conditions* $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ *sont réalisées. Alors, pour tout entier* $q \geq 0$ *tel que l'équation* $\phi°(\rho) = 0$ *n'ait pas de racine* ρ *dans la bande* $-(p+q)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$, *il existe deux constantes* $\varepsilon_q > 0$ *et* $C_q > 0$ *telles que : si* u *appartient à* $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$, *si le support de* u *est contenu dans la boule de centre* 0 *et de rayon* ε_q *et si* $\mathcal{P}_p u$ *appartient à* $H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+)$) *alors :*

(i) u *appartient à* $W_k^{2m+p+q}(\mathbb{R}^n_+)$,

(ii)
$$||u||_{W_k^{2m+p+q}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_q\{||\mathcal{P}_p u||_{H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + ||u||_{W_k^{2m+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

(resp. $||u||_{W_k^{2m+p+q}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_q\{||\mathcal{P}_p u||_{H^{p+q}(\mathbb{R}^n_+)} + ||u||_{W_k^{2m+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)}\}$)

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

<u>Remarque 1.2</u>. Lorsque $q = 0$, le terme $||u||_{W_k^{2m+p+q-1}(\mathbb{R}^n_+)}$ figurant dans le deuxième membre des estimations précédentes peut être remplacé par $||(1+x_n^k)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $k < 2m+p$ et par $||x_n^k\, u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ lorsque $k \geq 2m+p$.

<u>Théorème 1.4</u> : *Soit un entier* $p \geq 0$. *On suppose que les conditions* $H_1(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_2(p;\mathbb{R}^n_+)$, $H_3(p;\mathbb{R}^n_+)$ *sont réalisées. Alors, il existe des constantes* $\varepsilon > 0$ *et* $C > 0$ *telles que pour tout* (f,g) (resp. f) *appartenant à* $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp. $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$) *et à support contenu*

dans la boule de centre 0 *et de rayon* ε *on ait :*

$$||(f,g)||_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'\times\prod\limits_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\{||\mathcal{P}^*_p(f,g)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'}$$

$$+ ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{\prod\limits_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\}$$

(resp. $||f||_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'} \leq C\{||\mathcal{P}^*_p f||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)]'} + ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

1.2.3 Démonstration du théorème 1.3.

Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. On note $B(0,\varepsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ε.

On démontre tout d'abord l'estimation a priori donnée dans le théorème 1.3 (ii) dans le cas où $q = 0$. Pour cela on applique le théorème 1.1. au couple d'opérateurs $\{L^\circ(0,x_n;D_{x'},D_{x_n}),\ B^\circ_p(0,D_{x'})\}$: il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(R^n)$ on ait :

$$||x_n^k u||_{H^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\{||L^\circ(0,x_n;D_{x'},D_{x_n})\ \{u(x)\}||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ ||B^\circ_p(0,D_{x'})\ \gamma u||_{\prod\limits_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + ||x_n^k u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\},$$

(cf. la démonstration du théorème 1.1).

Les coefficients des opérateurs L et B_p étant de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe une fonction $\alpha(\varepsilon) > 0$ tendant vers 0 avec ε, telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ dont le support est contenu dans $B(0,\varepsilon)$ on ait :

$$\begin{cases} \|(L^\circ(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})-L^\circ(0,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{u(x)\}\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \alpha(\varepsilon)\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \\ \|(B^\circ_p(x';D_{x'})-B^\circ_p(0;D_{x'}))\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha(\varepsilon)\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \end{cases} .$$

Les hypothèses faites sur les coefficients des opérateurs L et B_p impliquent l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ on ait :

$$\begin{cases} \|(L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})-L^\circ(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{u(x)\}\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \alpha\|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \\ \|(B_p(x',D_{x'})-B^\circ_p(x',D_{x'}))\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha\|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \end{cases} .$$

Des inégalités précédentes, on déduit le théorème 1.3 (ii) lorsque $q = 0$. La remarque 1.2 se démontre en remarquant que pour tout $\beta > 0$, il existe $C_\beta > 0$ telle que, pour tout u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$, on ait

$$\|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \beta\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} + C_\beta\|(1+x_n^k)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

lorsque $k < 2m+p-1$ et

$$\|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \beta\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} + C_\beta\|x_n^k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

lorsque $k \geq 2m+p-1$.

On démontre maintenant le théorème 1.3 ((i),(ii)) dans le cas où $q \geq 1$. Cette démonstration sera faite par récurrence sur q. Soit tout d'abord u appartenant à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ tel que son support soit contenu dans $B(0,\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et tel que $\mathcal{P}_p u$ appartienne à $H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. On suppose de plus que l'équation $\phi^\circ(\rho) = 0$ n'a pas de racine ρ dans la bande $-(p+1)-2m+k-1/2 \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$.

On utilise la méthode des quotients différentiels. Pour h appartenant à $\mathbb{R}$ - {0} et i compris entre 1 et n-1, on pose :

$$\tau_{ih}\, v(x) = v(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n),$$

$$\rho_{ih}\, v(x) = \frac{1}{h}\,(\tau_{ih}\, v(x) - v(x)).$$

Si h satisfait à $0 < |h| < \frac{1}{2}\,(\varepsilon_\circ-\varepsilon)$, les supports de $\tau_{ih}\, v$ et $\rho_{ih}\, v$ sont contenus dans $B(0,\varepsilon')$ avec $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{1}{2}\,(\varepsilon_\circ-\varepsilon)$ dès que le support de v est contenu dans $B(0,\varepsilon)$. On a :

$$L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{\rho_{ih}\, u(x)\} = \rho_{ih}(L(x,x_n;D_{x'},D_{x_n})\{u(x)\})$$

$$+ \sum_{h=0}^{k} \sum_{j=0}^{2m-h} \sum_{|\alpha|=0}^{2m-h-j} \rho_{ih}\,(p_{j\alpha}^{2m-h}(x))\, D_{x'}^{\alpha}\, D_{x_n}^{j}\, \{\tau_{ih}(x_n^{k-h}\, u(x))\} \,.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de l'opérateur L impliquent l'existence d'une constante $\alpha > 0$ indépendante de u et de h, telle que

$$||L(\rho_{ih}\, u)||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \alpha\, \{||\rho_{ih}\, Lu||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + ||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

et de même

$$||B_p(\gamma\rho_{ih}\, u)||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \alpha\{||\rho_{ih}(B_p\gamma u)||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ ||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

où $\rho_{ih}(B_p\, \gamma u) = (\rho_{ih}(B_1^p\, \gamma u),\ldots,\, \rho_{ih}(B_{\chi_p}^p\, \gamma u))$.

Les estimations obtenues pour q = 0 et complétées par la remarque 1.2, appliquées à $\rho_{ih}\, u$ (pourvu que $0 < \varepsilon' < \varepsilon_\circ$) donnent

$$||\rho_{ih}\, u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_\circ\{||\mathcal{P}_p(\rho_{ih} u)||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$

$$+ ||(1+x_n^k)\, \rho_{ih}\, u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

lorsque $k < 2m+p$ et

$$||\rho_{ih}\, u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_\circ\{||\mathcal{P}_p(\rho_{ih}u)||_{H^p(\mathbb{R}_+^n)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|x_n^k\, \rho_{ih}u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$$

lorsque $k \geq 2m+p$.

D'autre part, il existe une constante β, indépendante de u et de h (pourvu que h reste dans un borné fixe, par exemple $0 < |h| < 1$) telle que

$$||\rho_{ih}(Lu)||_{H^p(\mathbb{R}_+^n)} \leq \beta||Lu||_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)}$$

$$||\rho_{ih}(B_p\gamma u)||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \beta||B_p\gamma u||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Enfin, il existe une constante δ, indépendante de u et de h telle que

$$||(1+x_n^k)\, \rho_{ih}\, u||_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \delta||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \quad \text{si } k < 2m+p,$$

$$||x_n^k\, \rho_{ih}\, u||_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \delta\; ||x_n^k\, u||_{H^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \quad \text{si } k \geq 2m+p.$$

En regroupant tous les résultats précédents, on déduit que $\rho_{ih}\, u$ demeure dans un borné $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ lorsque h varie de sorte que $0 < |h| < \frac{1}{2}(\varepsilon_\circ-\varepsilon)$. Il en résulte que $D_{x_i}\, u$ appartient à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ avec la majoration :

$$||D_{x_i} u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C\{||\mathcal{P}_p u||_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + ||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)}\}$$

pour $i = 1,2,\dots,n-1$.

Pour montrer que u appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$, il reste à établir que D_{x_n} u appartient à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+^n)$. Pour cela, on remarque que :

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} p_{2m-h,0}^{2m-h}(x)\ D_{x_n}^{2m-h}\ \{x_n^{k-h}\ u(x)\} =$$

$$= Lu(x) - \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j=0}^{2m-h-1} \sum_{|\alpha|=0}^{2m-h-j} p_{j\alpha}^{2m-h}(x)\ D_{x'}^{\alpha}\ D_{x_n}^{j}\ \{x_n^{k-h}\ u(x)\}$$

appartient à $H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$. On divise les deux membres par $p_{2m,0}^{2m}(x)$ ce qui est possible car $p_{2m,0}^{2m}(0) \neq 0$ et donc $p_{2m,0}^{2m}(x)$ est non nul dans $B(0,\varepsilon)$ si ε est assez petit. Pour $h = 1,2,\ldots,\min(k,2m)$, soit $q^{2m-h}(x)$ une fonction indéfiniment dérivable et à dérivées bornées dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ telle que $q^{2m-h}(x) = p_{2m-h,0}^{2m-h}(x)/p_{2m,0}^{2m}(x)$ pour x appartenant à $B(0,\varepsilon)$. Ainsi :

$$D_{x_n}^{2m}\ \{x_n^k\ u\} + \sum_{h=1}^{\min(2m,k)} q^{2m-h}(x)\ D_{x_n}^{2m-h}\ \{x_n^{k-h}\ u\}$$

appartient à $H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$. Or pour $h = 1,\ldots,\min(k,2m)$ on écrit :

$$q^{2m-h}(x) = q^{2m-h}(x',0) + x_n\ r^{2m-h}(x)$$

où $r^{2m-h}(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable et à dérivées bornées dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$. Introduisons l'opérateur $\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})$ en x_n, dépendant du paramètre x' et défini par :

$$\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})\{v(x)\} \equiv (1+D_{x_n}^{2m})\{x_n^k\ v(x)\} + \sum_{h=1}^{\min(k,2m)} q^{2m-h}(x',0)\ D_{x_n}^{2m-h}\{x_n^{k-h}\ v(x)\}$$

Revenant à u, on a donc :

$\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})\ \{u(x)\}$ appartient à $H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$.

Puisque pour $h = 1,\ldots,\min(2m,k)$, $q^{2m-h}(0) = p_{2m-h,0}^{2m-h}(0)/p_{2m,0}^{2m}(0)$ l'équation $\phi(x',\rho) = 0$ avec $\phi(x',\rho) \equiv \sum_{h=0}^{\min(2m,k)} q^{2m-h}(x',0)\ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\ldots(\rho-k+h+1)$.

n'admet pas de racine ρ dans la bande $-(p+1)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$ et le nombre de racines ρ de cette équation vérifiant $\mathrm{Re}\rho > -2m-p+k-\frac{1}{2}$ est égal à r_p si $(x',0)$ appartient à $B(0,\varepsilon)$ avec ε assez petit.

Utilisant les résultats de [4], [5], on déduit que pour presque tout x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $u(x',.)$ appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)$. De ces mêmes résultats, on déduit qu'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout v appartenant à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$||v||_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\{||\mathscr{L}(0,x_n;D_{x_n})v||_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+)} + ||v||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)}\} .$$

D'après la continuité des coefficients de l'opérateur $\mathscr{L}(x',x_n;D_{x_n})$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$, telles que pour tout v appartenant à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)$ et tout x' appartenant à $B(0,\varepsilon)$ on ait :

$$||v||_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\{||\mathscr{L}(x',x_n;D_{x_n})v||_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+)} + ||v||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)}\} .$$

On applique cette inégalité à $u(x',.)$ pourvu que le support de u soit contenu dans $B(0,\varepsilon)$:

$$||u(x',.)||_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C\{||\mathscr{L}(x',x_n;D_{x_n})u(x',.)||_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+)} + ||u(x',.)||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)}\}$$

soit (d'après la remarque 1.1. du chapitre 3) :

$$||x_n^{\max(0,k-2m-p-1)}u(x',x_n)||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + ||x_n^k\, u(x',x_n)||_{H^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq C(||\mathscr{L}(x',x_n;D_{x_n})u(x',x_n)||_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+)} + ||x_n^{\max(0,k-2m-p)}u(x',x_n)||_{L^2(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ ||x_n^k\, u||_{H^{2m+p}(\mathbb{R}_+)}).$$

On intègre par rapport à x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$||x_n^{\max(0,k-2m-p-1)}u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + ||x_n^k u||_{H^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq$$

$$\leq C(||\mathcal{L}(x',x_n;D_{x_n})u||_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} + ||x_n^{\max(0,1-2m-p)}u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ ||x_n^k u||_{H^{2m+p}(R_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq$$

$$\leq C(||\mathcal{B}(x',x_n;D_{x_n})u||_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)} + ||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)}),$$

(où $H^r(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \equiv \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \; ; \; D^j_{x_n} u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \; , \; j = 0,\ldots,r\})$

Ainsi, $x_n^{\max(0,k-2m-p-1)}$ u appartient à $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ et x_n^k u appartient à $H^{2m+p+1}(\mathbb{R}_+;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Compte tenu du fait que D_{x_i} u appartient à $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)$ pour $i = 1,\ldots,n-1$ on en déduit que u appartient à $W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}^n_+)$. De plus on a la majoration :

$$||u||_{W_k^{2m+p+1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C(||\mathcal{G}u||_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n_+)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + ||u||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n_+)})$$

Ainsi, on a démontré le théorème 1.3 ((i),(ii)) lorsque q = 1. Pour $q \geq 1$, on raisonne par récurrence par une méthode analogue.

1.2.4. <u>Démonstration du théorème 1.4.</u>

Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. Comme dans le lemme 1.3 : soit $(f;g_1,\ldots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$; alors $\mathcal{G}_p^*(f;g_1,\ldots,g_{\chi_p})$ considéré comme élément de $[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'$ s'écrit :

$$\mathcal{G}_p^*(f;g_1,\ldots,g_{\chi_p}) = L^*(j_pf) + \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-q-1} B^*_{jq}\, g_j \otimes x_n^{-q-1}\, Y(x_n) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{\max(-1,2m+p-k-1)} i^{-q}\, B^*_{jq}\, g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n)$$

Pour établir les estimations a priori du théorème 1.4, on a besoin de quelques lemmes.

Lemme 1.4 : *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour toute fonction* b *appartenant à* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *il existe une constante* $C(b) > 0$ *telle que pour tout* f *appartenant à* $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ *et pour tout opérateur de dérivation* D^{2m-h} *d'ordre* $2m-h$ *avec* $0 \leq h \leq \min(k,2m)$ *on ait :*

$$||b(x)D^{2m-h}(x_n^{k-h} f)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C\,\{\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Max}} |b(x)|\; ||f||_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ C(b)||f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\} \quad .$$

Démonstration : Soit ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On forme :

$$<b\, D^{2m-h}(x_n^{k-h}f),\phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = (-1)^{2m-h}<f,x_n^{k-h}\, D^{2m-h}(b\phi)>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= (-1)^{2m-h}<bf,x_n^{k-h}\, D^{2m-h}\phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} + (-1)^{2m-h}<f,x_n^{k-h}[D^{2m-h},b]\;\phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

où $[D^{2m-h},b]$ désigne le commutateur de l'opérateur D^{2m-h} et de l'opérateur de multiplication par b. On majore chacun des deux termes :

$$|<bf,x_n^{k-h}\, D^{2m-h}\,\phi>_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq ||bf||_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)}\; ||x_n^{k-h}\, D^{2m-h}\,\phi||_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

Or (cf. [16]) :

$$||bf||_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\{\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Max}} |b(x)|\;\; ||f||_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} + C(b)\; ||f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}$$

et

$$||x_n^{k-h}\, D^{2m-h}\,\phi||_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C||\phi||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)} \quad .$$

Par ailleurs,

$$|\langle f, x_n^{k-h}[D^{2m-h},b]\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq ||f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} \; ||x_n^{k-h}[D^{2m-h},b]\phi||_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n)} .$$

L'opérateur $[D^{2m-h},b]$ étant d'ordre 2m-h-1 si 2m > h ou étant nul si 2m = h on peut écrire :

$$||x_n^{k-h}\;[D^{2m-h},b]\phi||_{H^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \leq C(b)\;||\phi||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Il en résulte l'inégalité

$$|\langle b\; D^{2m-h}(x_n^{k-h}f),\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq C\;\{\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in\mathbb{R}^n}|b(x)|\;\;||f||_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+\;C(b)\;||f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}\;\;||\phi||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)} ,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.4.

<u>Lemme 1.5</u> : *Il existe une constante* C > 0 *telle que, pour toute fonction* b *appartenant à* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, *il existe une constante* C(b) > 0 *telle que pour tout* g *appartenant à* $H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ *pour* $-k \leq q \leq \min(-1,2m+p-k-1)$, *on ait :*

$$||b(x')g \otimes x_n^{-1-q}\;Y(x_n)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C\{\mathop{\mathrm{Max}}_{x\in\mathbb{R}^{n-1}}|b(x')|\;\;||g||_{H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$

$$+\;C(b)\;||g||_{H^{-2m-p+k+q-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On forme

$$\langle bg \otimes x_n^{-1-q}Y(x_n),\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = (-1)^{-1-q}\;\langle bg,\gamma_q\;\phi_{|\mathbb{R}^n_+}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} ,$$

d'où

$$|\langle bg \otimes x_n^{-1-q}Y(x_n),\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}| \leq$$

$$\leq ||bg||_{H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\;\;||\gamma_q\;\phi_{|\mathbb{R}^n_+}||_{H^{2m+p-k-q-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Or :

$$||bg||_{H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\ \{\operatorname{Max}_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |b(x')|\ \ ||g||_{H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$

$$+ C(b)\ ||g||_{H^{-2m-p+k+q-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\}\ ,$$

$$||\gamma_q\ \phi_{|\mathbb{R}^n_+}||_{H^{2m+p-k-q-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C||\phi||_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)}\ ;$$

le lemme 1.5 est alors une conséquence de ces inégalités.

<u>Lemme 1.6</u> : *Il existe une constante* $C > 0$, *telle que pour toute fonction* b *appartenant à* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, *il existe une constante* $C(b) > 0$ *telle que pour tout* g *appartenant à* $H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ *pour* $0 \leq q \leq \max(-1, 2m+p-k-1)$ *on ait :*

$$||b(x')g \otimes \delta^{(q)}(x_n)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C\ \{\max_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |b(x')|\ \ ||g||_{H^{-2m-p+k+q+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ C(b)\ ||g||_{H^{-2m-p+k+q-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\}\ .$$

<u>Démonstration</u> : Ce lemme n'a de sens évidemment que si $0 \leq 2m+p-k-1$. La démonstration est analogue à la démonstration du lemme 1.5.

On peut maintenant démontrer le théorème 1.4. On applique le théorème 1.2 au couple d'opérateurs $\{L^\circ(0,x_n;D_{x'},D_{x_n}),\ B_p^\circ(0,D_{x'})\}$: il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout (f,g) appartenant à $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ on ait :

$$|||(f,g)|||_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\{||L^{\circ *}(0,x_n;D_{x'},D_{x_n})\ \{j_p f\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=-k}^{\min(-1,2m+p-k-1)} (-1)^{-1-q}\ B_{jq}^{m_j-q*}(0,D_{x'})g_j \otimes x_n^{-q-1}\ Y(x_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\chi_p} \sum_{q=0}^{\max(-1,2m+p-k-1)} i^{-q}\, B_{jq}^{m_j-q*}(0,D_{x'})\, g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n) \|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} +$$

$$+ \|J_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{\chi_p} \|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \} .$$

La continuité des coefficients des opérateurs L et B_p et les lemmes 1.4, 1.5 et 1.6 prouvent l'existence d'une fonction $\alpha(\varepsilon)$ tendant vers 0 avec ε et d'une fonction $\beta(\varepsilon) > 0$ telles que pour tout (f,g) appartenant à $H^{-p}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ et à support contenu dans $B(0,\varepsilon)$ on ait :

$$\|(L^{\circ *}(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}) - L^{\circ *}(0,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{f\}\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq$$

$$\leq \alpha(\varepsilon)\, \|f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} + \beta(\varepsilon)\, \|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} ,$$

$$\|(B_{jq}^{m_j-q*}(x',D_{x'}) - B_{jq}^{m_j-q*}(0,D_{x'}))g_j \otimes x_n^{-1-q}\, Y(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(R^n)]'} \leq$$

$$\leq \alpha(\varepsilon)\, \|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \beta(\varepsilon)\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

$$\|(B_{jq}^{m_j-q*}(x',D_{x'}) - B_{jq}^{m_j-q*}(0,D_{x'}))\, g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n)\|_{[W_k^{2m+p}(R^n)]'} \leq$$

$$\leq \alpha(\varepsilon)\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \beta(\varepsilon)\|g_j\|_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|(L^{*}(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}) - L^{\circ *}(x,x_n;D_{x'},D_{x_n}))\{f\}\|_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq C\|f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} ,$$

$$||(B^{*}_{jq}(x',D_{x'})-B^{m_j-q*}_{jq}(x',D_{x'}))g_j \otimes x_n^{-1-q}Y(x_n)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq$$

$$\leq C||g_j||_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \quad .$$

$$||(B^{*}_{jq}(x',D_{x'})-B^{m_j-q*}_{jq}(x',D_{x'}))g_j \otimes \delta^{(q)}(x_n)||_{[W_k^{2m+p}(\mathbb{R}^n)]'} \leq$$

$$\leq C||g_j||_{H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \quad .$$

Le théorème 1.4 est alors une conséquence de ces inégalités.

2°) Estimations a priori dans l'ouvert Ω .

2.1. Notations et hypothèses.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ et vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x\in\mathbb{R}^n;\ \varphi(x) > 0\} , \\ \Gamma = \{x\in\mathbb{R}^n;\ \varphi(x) = 0\} , \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \Gamma. \end{cases}$$

On pose $\varphi_j = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ pour $j = 1,2,\ldots,n$. Ainsi grad $\varphi(x)$ a pour composantes $(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$.

Soit l'opérateur $L \equiv L(x;D_x)$ défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\ \{u(x)\} \equiv \sum_{k=0}^{\min(k,2m)} P^{2m-h}(x,D_x)\ \{\varphi(x)^{k-h}\ u(x)\} ,$$

où m et k sont deux entiers ≥ 1, et où :

(i) $P^{2m-h}(x,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à 2m-h

$$P^{2m-h}(x,D_x) \equiv \sum_{|\alpha|\leq 2m-h} p_\alpha^{2m-h}(x)\ D_x^\alpha \quad ;$$

(ii) $P^{2m}(x,D_x)$ est un opérateur d'ordre 2m proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$ c'est-à-dire : pour tout x appartenant à $\overline{\Omega}$ et pour tout couple de vecteur (ξ,ξ') de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants le polynôme en τ :

$$P_{2m}^{2m}(x;\xi+\tau\xi') \equiv \sum_{|\alpha|=2m} p_\alpha^{2m}(x)\,(\xi+\tau\xi')^\alpha$$

admet exactement m zéros à partie imaginaire > 0 et m zéros à partie imaginaire < 0.

Cet opérateur L induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire et continue de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$.

On introduit pour tout entier $p \geq 0$, les conditions $H_1(p;\Omega)$ et $H_2(p;\Omega)$ suivantes :

<u>$H_1(p;\Omega)$</u> : pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x,\rho) = 0$ avec

$$\phi(x,\rho) \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x;\operatorname{grad}\varphi(x))\, i^{k-h}\, \rho(\rho-1)\ldots(\rho-k+h+1)$$

n'admet pas de racine ρ telle que $\operatorname{Re}\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$,

(où $P_{2m-h}^{2m-h}(x;\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=2m-h} p_\alpha^{2m-h}(x)\,\xi^\alpha$).

<u>$H_2(p;\Omega)$</u> : pour tout x appartenant à Γ, le nombre $r_p(x)$ de racines ρ de l'équation $\phi(x,\rho) = 0$ vérifiant $\operatorname{Re}\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}$ est constant et égal à r_p et le nombre $\chi_p = m-r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant les opérateurs frontière. Pour $j = 1,\ldots,\chi_p$ si $\chi_p > 0$, soit l'opérateur $B_j^p(x;D_\Gamma)$ défini par :

$$B_j^p(x;D_\Gamma)\,\gamma u \equiv \sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}(x;D_\Gamma)\,\gamma_q u$$

où pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$ et $-k \leq q \leq 2m+p-k-1$, $B_{jq}(x;D_\Gamma)$ est un opérateur différentiel sur Γ, à coefficients de classe $C^\infty(\Gamma)$ et d'ordre inférieur ou égal à m_j-q, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq 2m+p-k-1$ (et, si m_j-q est négatif l'opérateur $B_{jq}(x,D_\Gamma)$ correspondant est par définition l'opérateur nul).

On note $B_p \equiv B_p(x;D_\Gamma) \equiv (B_1^p(x;D_\Gamma),\dots,B_{\chi_p}^p(x;D_\Gamma))$. Cet opérateur B_p induit une application linéaire et continue de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)$:

$$u \longmapsto B_p\,\gamma u = (B_1^p\,\gamma u,\dots,B_{\chi_p}^p\,\gamma u).$$

On désigne par $B_{jq}^{m_j-q}(x,D_\Gamma)$ la partie principale de l'opérateur $B_{jq}(x,D_\Gamma)$. On définit alors la condition $H_3(p;\Omega)$ suivante :

$\underline{H_3(p;\Omega)}$: pour tout x appartenant à Γ et pour tout ξ appartenant à T_x, espace cotangent en x à Γ, le problème aux limites :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)\,D_t)\,\{t^{k-h}\,v(t)\} = 0, \\ \displaystyle\sum_{q=-k}^{2m+p-k-1} B_{jq}^{m_j-q}(x;\xi)\,\gamma_q\,v = 0 \text{ pour } j = 1,\dots,\chi_p \quad , \text{ si } \chi_p > 0, \end{cases}$$

ou

$$\left\{ \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)\,D_t)\,\{t^{k-h}\,v(t)\} = 0 \quad , \quad \text{si } \chi_p = 0, \right.$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 2.1. Les conditions $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ sont invariantes par difféomorphisme.

2.2 Enoncé des résultats.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $W_k^{2m+p}(\Omega)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longmapsto \mathcal{P}_p\,u = \begin{cases} \{Lu, B_p\,\gamma u\} & \text{si } \chi_p > 0, \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0\,. \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^p(\Omega)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

On désigne par $[H^p(\Omega)]'$ (resp. $[W_k^{2m+p}(\Omega)]'$) l'espace dual de $H^p(\Omega)$ (resp. $W_k^{2m+p}(\Omega)$). L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ (resp. $[H^p(\Omega)]'$) dans $[W_k^{2m+p}(\Omega)]'$ si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

On désigne enfin par j_p l'isomorphisme canonique de $[H^p(\Omega)]'$ sur $H_\circ^{-p}(\Omega)$ espace des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\bar{\Omega}$.

On a les théorèmes suivants :

Théorème 2.1 : *Soit un entier* $p \geq 0$. *On suppose que les conditions* $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p,\Omega)$ *sont réalisées. Alors pour tout entier* $q \geq 0$ *tel que l'équation* $\phi(x,\rho) = 0$ *n'ait pas de racine* ρ *dans la bande* $-(p+q)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$ *pour tout* x *appartenant à* Γ, *il existe une constante* $C_q > 0$ *telle que : si* u *appartient à* $W_k^{2m+p}(\Omega)$ *et si* $\mathcal{G}_p u$ *appartient à* $H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-m_j-k-1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^{p+q}(\Omega)$) *alors :*

(i) u *appartient à* $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$,

(ii)
$$\|u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq C_q\{\|\mathcal{G}_p u\|_{H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{W_k^{2m+p+q-1}(\Omega)}\}$$

(resp. $\|u\|_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq C_q\{\|\mathcal{G}_p u\|_{H^{p+q}(\Omega)} + \|u\|_{W_k^{2m+p+q-1}(\Omega)}\}$)

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

Théorème 2.2 : *Soit un entier* $p \geq 0$. *On suppose que les conditions* $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ *sont réalisées. Alors, il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* (f,g) *appartenant à* $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ (resp. $[H^p(\Omega)]'$), *on ait :*

$$||(f,g)||_{[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)} \leq C\{||\mathcal{P}_p^*(f,g)||_{[W_k^{2m+p}(\Omega)]'} +$$

$$+ ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\Gamma)}\}$$

(resp. $||f||_{[H^p(\Omega)]'} \leq C\{||\mathcal{P}_p^* f||_{[W_k^{2m+p}(\Omega)]'} + ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}$

si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$).

2.3 Démonstration du théorème 2.1.

Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. Par "cartes locales" et "partition de l'unité" on se ramène par un raisonnement classique au théorème 1.3 et aux estimations a priori pour les opérateurs elliptiques.

En effet, soit $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq N}$ un recouvrement fini de Γ par des ouverts $\mathcal{O}_i$ de Γ dont le diamètre sera fixé ultérieurement de façon convenable et soit θ_i, pour $i = 1,\ldots,N$, un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathcal{O}_i$ sur la boule de $\mathbb{R}^{n-1}$ de centre 0 et de rayon ε. Soit enfin $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq N}$ de Γ.

On conserve les notations du chapitre 3 ; pour $0 < \varepsilon < \delta$ on définit les ouverts U_i pour $i = 0,1,\ldots,N$ par :

$$U_\circ = \{x \in \Omega \;;\; d(x,\Gamma) > \varepsilon\} ,$$

$$U_i = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; x_\Gamma \in \mathcal{O}_i \;,\; d(x,\Gamma) < \varepsilon\} \quad \text{pour } i=1,2,\ldots,N.$$

Ainsi, pour $i = 1,\ldots,N$, l'application $\Theta_i : x \longmapsto (\theta_i(x_\Gamma), d(x,\Gamma))$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de U_i sur $B(0,\varepsilon)$. On choisit ε assez petit pour que la fonction α (qui a servi à définir l'opérateur γ dans le chapitre 3) vérifie $\alpha(t) = 1$ pour $|t| \leq \varepsilon$.

Soit $\varphi_\circ$ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_\circ$ égale 1 sur $\overline{U_\circ}'$.

On démontre tout d'abord l'estimation a priori donnée dans le théorème 2.1 (ii) dans le cas où $q = 0$. Soit u appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$. La fonction $\varphi_o u$ appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et l'opérateur L étant elliptique à l'intérieur de Ω, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$||\varphi_o u||_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq C\,\{||L(\varphi_o u)||_{H^p(\Omega)} + ||\varphi_o u||_{L^2(\Omega)}\} \quad .$$

D'autre part, pour tout $\beta > 0$, il existe $C_\beta > 0$ telle que

$$||B_p\,\gamma(\varphi_o u)||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} \leq \beta||\varphi_o u||_{W_k^{2m+p}(\Omega)} + C_\beta||\varphi_o u||_{L^2(\Omega)}$$

d'où

$$||\varphi_o u||_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq C\{||\mathcal{P}_p u||_{H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} + ||\varphi_o u||_{L^2(\Omega)}\} \ .$$

On estime maintenant la fonction $v = u - \varphi_o u$. Afin de pouvoir utiliser directement les résultats du théorème 1.3, on écrit l'opérateur L sous une forme un peu différente. Soit ϕ une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions analogues à celles imposées à φ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \phi(x) > 0\} \ , \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \phi(x) = 0\} \ , \\ \text{grad } \phi(x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \Gamma, \end{cases}$$

et qui de plus vérifie

$$\phi(x) = d(x,\Gamma) \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } U_\delta.$$

On vérifie que la fonction φ/ϕ définie sur $\mathbb{R}^n - \Gamma$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et non nulle sur Γ.

Ainsi, Lv peut s'écrire :

$$Lv(x) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} Q^{2m-h}(x;D_x)\,\{\phi(x)^{k-h}\,v(x)\} \quad ,$$

où les opérateurs $Q^{2m-h}(x;D_x)$ possèdent des propriétés analogues à celles vérifiées par les opérateurs $P^{2m-h}(x,D_x)$.

On peut écrire $v = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i v$ où pour $i = 1,\dots,N$ φ_i est une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ à support dans U_j définie par :

$$\varphi_i(x) = \alpha_i(x_\Gamma) \quad \alpha(d(x,\Gamma)).$$

La fonction φ_i v est à support dans $U_i \cap \bar{\Omega}$ et appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$. Par le difféomorphisme Θ_i on se ramène dans la boule $B(0,\varepsilon)$ et, compte tenu de la nouvelle écriture de Lv et du fait que $\gamma_q(\varphi_i v) \circ \theta_i^{-1} = \gamma_q\ ((\varphi_i v) \circ \Theta_i^{-1}$ pour $q = -k,\dots,2m+p-k-1$, on applique le théorème 1.3 à l'opérateur transformé $\Theta_i^* \mathcal{P}_p$ (pourvu que ε et le diamètre de $\mathcal{O}_i$ soient suffisamment petits). On en déduit que :

$$||\varphi_i v||_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq c\{||\mathcal{P}_p(\varphi_i v)||_{H^p(\Omega)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} + ||\varphi_i v||_{W_k^{2m+p-1}(\Omega)}\}$$

$$\leq c\{||\mathcal{P}_p v||_{H^p(\Omega)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} + ||v||_{W_k^{2m+p-1}(\Omega)}\},$$

et comme $v = (1-\varphi_o)\,u$

$$\leq c\{||\mathcal{P}_p u||_{H^p(\Omega)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} + ||u||_{W_k^{2m+p-1}(\Omega)}\}.$$

D'où l'on déduit que :

$$||u||_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leq c\{||\mathcal{P}_p u||_{H^p(\Omega)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} + ||u||_{W_k^{2m+p-1}(\Omega)}\}.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.1 (ii) lorsque $q = 0$.

On démontre maintenant le théorème 2.1 ((i),(ii)) lorsque $q \geq 1$. Cette démonstration sera faite par récurrence sur q. Soit tout d'abord u appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ tel que $\mathcal{P}_p$ u appartienne à $H^{p+1}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\Gamma)$.

La fonction $\varphi_o u$ (avec les notations utilisées lorsque q = 0) appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et $L(\varphi_o u)$ appartient à $H^{p+1}(\Omega)$. La régularité à l'intérieur pour les opérateurs elliptiques donne que $\varphi_o u$ appartient à $W_k^{2m+p+1}(\Omega)$ et que l'on a :

$$||\varphi_o u||_{W_k^{2m+p+1}(\Omega)} \leq C\{||L(\varphi_o u)||_{H^{p+1}(\Omega)} + ||\varphi_o u||_{L^2(\Omega)}\} .$$

D'autre part, pour tout $\beta > 0$, il existe $C_\beta > 0$ telle que :

$$||B_p\ \gamma(\varphi_o u)||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\Gamma)} \leq \beta||\varphi_o u||_{W_k^{2m+p+1}(\Omega)} + C_\beta\ ||\varphi_o u||_{L^2(\Omega)}\},$$

d'où :

$$||\varphi_o u||_{W_k^{2m+p+1}(\Omega)} \leq C\{||\mathcal{P}_p u||_{H^{p+1}(\Omega)\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\Gamma)} + ||\varphi_o u||_{L^2(\Omega)}\} .$$

La fonction $\varphi_i v$ (avec les notations utilisées lorsque q = 0) appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$, est à support dans $U_i \cap \overline{\Omega}$ et $\mathcal{P}_p\ (\varphi_i v)$ appartient à $H^{p+1}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\Gamma)$. Par le difféomorphisme Θ_i on se ramène dans la boule $B(0,\varepsilon)$. Il résulte alors du théorème 1.3 ((i),(ii)) que $\varphi_i v$, pour $i = 1,\dots,N$, appartient à $W_k^{2m+p+1}(\Omega)$ et que :

$$||\varphi_i v||_{W_k^{2m+p+1}(\Omega)} \leq C\{||\mathcal{P}_p(\varphi_i v)||_{H^{p+1}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j+1/2}(\Gamma)} +$$

$$+ ||\varphi_i v||_{W_k^{2m+p}(\Omega)}\}.$$

D'où l'on déduit que :

(i) u appartient à $W_k^{2m+p+1}(\Omega)$,

(ii) $$||u||_{W_k^{2m+p+1}(\Omega)} \leq C\{||\mathcal{P}_p u||_{H^{p+1}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)} +$$

$$+ ||u||_{W_k^{2m+p}(\Omega)}\} .$$

Pour $q > 1$, on raisonne par récurrence sur q et on utilise la même méthode que ci-dessus. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.

2.4 Démonstration du théorème 2.2.

Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. On utilisera les notations du paragraphe précédent.

Soit (f,g) appartenant à $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$. Alors $\varphi_\circ(f,g)$ $(\equiv(\varphi_\circ f,0))$ appartient à $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ et vérifie $\mathcal{P}_p^*(\varphi_\circ f,0) = L^*(j_p\varphi_\circ f)$ appartient à $H^{-2m-p}(\mathbb{R}^n)$.

L'opérateur L^* étant elliptique dans Ω, on a

$$\|j_p\varphi_\circ f\|_{H^{-p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\{\|L^*(j_p\varphi_\circ f)\|_{H^{-2m-p}(\mathbb{R}^n)} + \|j_p\varphi_\circ f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\|\varphi_\circ f\|_{[H^p(\Omega)]'} \leq C\{\|\mathcal{P}^*(f,g)\|_{[W_k^{2m+p}(\Omega)]'} + \|j_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}.$$

On estime maintenant l'élément (f',g) $(= (f,g) - \varphi_\circ(f,g))$ avec $f' = f - \varphi_\circ f$. On écrit que

$$(f',g) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\,(f',g)$$

où $\varphi_i(f',g) = (\varphi_i f', \alpha_i g) = (\varphi_i f', \alpha_i g_1,\dots,\alpha_i g_{\chi_p})$ pour $i = 1,2,\dots,N$. L'élément $\varphi_i(f',g)$ appartient à $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ et, par le difféomorphisme Θ_i, on se ramène dans $B(0,\varepsilon)$. On applique alors le théorème 1.4 à l'opérateur transformé $\Theta_i^* \mathcal{P}_p^*$ (pourvu que ε et le diamètre de $\mathcal{O}_i$ soient suffisamment petits). Revenant à Ω, on obtient l'inégalité :

$$\|\varphi_i(f',g)\|_{[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)} \leq C\{\|\mathcal{P}_p^*(\varphi_i(f',g))\|_{[W_k^{2m+p}(\Omega)]'} +$$

$$+ \|j_p\varphi_i f'\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|\alpha_i g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\Gamma)}\}.$$

Il en résulte l'inégalité :

$$||\varphi_1(f',g)||_{[H^p(\Omega)]'\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)} \leq C\{||\mathcal{P}_p^*(f,g)||_{[W_k^{2m+p}(\Omega)]'} +$$

$$+ ||j_p f||_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\Gamma)}\}$$

Sommant les inégalités précédentes on obtient l'estimation du théorème 2.2.

3°) <u>Existence des solutions dans les espaces $W_k^\ell(\Omega)$ avec ℓ entier $\geq 2m+p$.</u>

Soit un entier $p \geq 0$. On peut maintenant étudier le problème aux limites :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ B_p\,\gamma u = g & \text{sur } \Gamma \text{ , si } \chi_p > 0, \end{cases}$$

ou

$$\left\{ Lu = f \quad \text{dans } \Omega \text{ , si } \chi_p = 0, \right.$$

du point de vue de l'existence des solutions dans les espaces $W_k^\ell(\Omega)$ où ℓ est un entier $\geq 2m+p$.

Le but essentiel de cette étude est de montrer que, sous les hypothèses du paragraphe 2.1 de ce chapitre, l'opérateur $\mathcal{P}_p$ est un opérateur à indice de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^p(\Omega)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$). Moyennent une hypothèse supplémentaire sur l'opérateur $\mathcal{P}_p$, on montrera que c'est aussi un opérateur à indice de $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$ dans $H^{p+q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+q-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^{p+q}(\Omega)$) si $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$), q étant un entier ≥ 1. Enfin on exprimera les conditions de compatibilité du problème précédent en utilisant un problème aux limites adjoint.

Plus précisément, on a :

<u>Théorème 3.1</u> : *Avec les notations du paragraphe 2.1, on suppose que les conditions* $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ *sont réalisées et que, pour tout* x *appartenant à* Γ,

l'équation $\phi(x,\rho) = 0$ *n'a pas de racine* ρ *dans la bande* $-(p+q)-2m+k-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$, q *étant un entier* ≥ 0. *Alors, pour tout entier* r *tel que* $0 \leq r \leq q$, *l'opérateur* $\mathcal{P}_p$ *opérant de* $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ *dans* $H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^{p+r}(\Omega)$) *possède les propriétés suivantes :*

(i) c'est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de r,

(ii) son noyau est égal à $\{u \in W_k^{2m+p+q}(\Omega)\ ;\ \mathcal{P}_p u = 0\}$,

(iii) son image est composée des éléments (f,g) (resp. f) *appartenant à* $H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^{p+r}(\Omega)$) *tels que*

$$<f,\bar{v}>_{H^p(\Omega)\times[H^p(\Omega)]'} + <g,\bar{\varphi}>_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)} = 0$$

(resp. $<f,\bar{v}>_{H^p(\Omega)\times[H^p(\Omega)]'} = 0$) *pour tout élément* (v,φ) (resp. v) *appartenant à* $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ (resp. $[H^p(\Omega)]'$) *vérifiant* $\mathcal{P}_p^*(v,\varphi) = 0$, *si* $\chi_p > 0$ (resp. $\chi_p = 0$). $\mathcal{P}_p^*$ *désignant l'adjoint de* $\mathcal{P}_p$ *considéré pour* $r = 0$.

<u>Démonstration</u> : Dans la démonstration, on supposera $\chi_p > 0$. Désignons par $\mathcal{P}_{pr}$ l'opérateur $\mathcal{P}_p$ considéré comme opérateur de $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ dans $H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-1/2}(\Gamma)$ pour $r = 0,\dots,q$.

Il résulte du théorème 2.1 que le noyau de $\mathcal{P}_{pr}$ coïncide avec l'espace $\{u \in W_k^{2m+p+q}(\Omega)\ ,\ \mathcal{P}_p u = 0\}$ et que l'image de $\mathcal{P}_{pr}$ notée $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{pr}$ est égale à $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{po} \cap \{H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-1/2}(\Gamma)\}$.

L'injection de $W_k^{2m+p+r}(\Omega)$ dans $W_k^{2m+p+r-1}(\Omega)$ étant compacte, on déduit des estimations a priori du théorème 2.1 (cf. lemme 5.1, chap. II [14]) que le noyau de $\mathcal{P}_{pr}$ est de dimension finie et que $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{pr}$ est fermée.

Etudions maintenant Im $\mathcal{P}_{po}$. Puisque Im $\mathcal{P}_{po}$ est fermée, l'équation

$$\mathcal{P}_{po}\, u = F$$

où F appartient à $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}$, admet une solution u appartenant à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ si et seulement si F satisfait à la condition d'orthogonalité suivante :

$$\langle F,\phi\rangle_{(H^p(\Omega)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma))\times([H^p(\Omega)]'\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma))} = 0$$

pour tout élément ϕ appartenant à $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ et vérifiant

$$\mathcal{P}^*_{po}\, \phi = 0$$

où $\mathcal{P}^*_{po}$ désigne l'adjoint de $\mathcal{P}_{po}$.

Démontrons maintenant que le noyau de $\mathcal{P}^*_{po}$ est de dimension finie. L'injection de $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-p-1}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-2m-p+k+m_j-1/2}(\Gamma)$ étant compacte, on déduit des estimations a priori du théorème 2.2 que le noyau de $\mathcal{P}^*_{po}$ est de dimension finie. Par suite Im $\mathcal{P}_{po}$ est de codimension finie dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Gamma)$.

Enfin, puisque Im $\mathcal{P}_{pr}$ = Im $\mathcal{P}_{po} \cap \{H^{p+r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{2m+p+r-k-m_j-1/2}(\Gamma)\}$ et puisque Im $\mathcal{P}_{pr}$ est fermée, on déduit que la codimension de Im $\mathcal{P}_{pr}$ est égale à la codimension de Im $\mathcal{P}_{po}$ pour $r = 0,\ldots,q$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.

<u>Corollaire 3.1</u> : *Avec les notations du paragraphe 2.1, on suppose que les conditions* $H_1(p;\Omega)$, $H_2(p;\Omega)$, $H_3(p;\Omega)$ *sont réalisées et que pour tout* x *appartenant à* Γ, *l'équation* $\phi(x,\rho) = 0$ *n'a pas de racine* ρ *dans le demi-espace* $\mathrm{Re}\rho \leq -p-2m+k-\frac{1}{2}$.

Alors, le noyau de l'opérateur $\mathcal{P}_p$ *dans* $W_k^{2m+p}(\Omega)$ *est égal à l'espace* $N = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\ ;\ \mathcal{P}_p u = 0\}$.

<u>Démonstration</u> : Ceci résulte du théorème 3.1 et du fait que $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \bigcap_s H^s(\Omega)$.

5. Résultats complémentaires et exemples.

1°. Remarques sur les conditions $H_2(p;\Omega)$ et $H_3\ (p;\Omega)$

Au cours du chapitre 4, on a remarqué que les conditions $H_2(p;\Omega)$ et $H_3\ (p;\Omega)$ impliquent essentiellement que l'opérateur différentiel en une variable t (cf : la condition $H_3\ (p;\Omega)$ - chapitre 4 - 2°) :

$$\sum_{h=o}^{\min(k,2m)} P_{2m-h}^{2m-h}(x\ ;\xi+\ \mathrm{grad}\,\varphi(x)\ D_t)\ \{t^{k-h}\ v\ \}$$

est un opérateur linéaire, continu et surjectif de $W_k^{2m+p}\ (\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$, la dimension du noyau dans $W_k^{2m+p}\ (\mathbb{R}_+)$ étant égale à χ_p.

Néanmoins, les techniques utilisées précédemment permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux du théorème 2.1 du chapitre 4 lorsque l'opérateur à une variable précédent est un opérateur à indice de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ d'indice χ_p, la codimension de l'image dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ étant indépendante de x et de ξ, mais non nécessairement nulle, et en outre, dans certains cas, des résultats analogues à ceux du théorème 3-1. C'est ce que nous allons développer sur des exemples.

Etudions tout d'abord un exemple sur le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$. Soit l'opérateur $L \equiv L\ (x_n;\ D_x,\ D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) \equiv L(x_n;\ D_x,\ ,\ D_{x_n})\ \{u(x)\}\ \equiv\ x_n^k\ ((1+\ \sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2\ )^m\ +\ D_{x_n}^{2m}\ )\ \{u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers ≥ 1.

Pour étudier cet opérateur L dans $\mathbb{R}_+^n$, on utilise la méthode classique (cf : [18] par exemple) qui consiste à ajouter une variable tangentielle x_o et à considérer non plus l'opérateur L mais l'opérateur $M \equiv M(x_n;D_{x_o},D_x,,D_{x_n})$ défini sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$Mu(x) \equiv\ M(x_n;\ D_{x_o},\ D_x,,\ D_{x_n}\ )\ \{u(x)\}\ \equiv\ x_n^k\ (\ (\ \sum_{i=o}^{n-1}\ D_{x_i}^2\ )^m\ +\ D_{x_n}^{2m})\ \{u(x)\}\ .$$

On effectue la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ par rapport aux variables tangentielles, ce qui nous amène à considérer l'opérateur différentiel en une variable x_n défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$M(x_n\,;\,\xi_o,\,\xi'\,,\,D_{x_n})\,\{u(x_n)\} \equiv x_n^k\,((\sum_{i=o}^{n-1}\xi_i^{\,2})^m + D_{x_n}^{2m})\,\{u(x_n)\}\,,$$

pour $(\xi_o,\ \xi')$ appartenant à $\mathbb{R}^n$. Lorsque $(\xi_o,\ \xi')$ appartient à la sphère unité S_{n-1} de $\mathbb{R}^n$, cet opérateur se réduit à l'opérateur :

$$M(x_n\,;\xi_o,\,\xi',\,D_{x_n})\,\{u(x_n)\} \equiv x_n^{\,k}\,(1 + D_{x_n}^{2m})\,\{u(x_n)\}\,.$$

Il résulte de [4] [5], que :

<u>Proposition 1.1</u> : *Soit* p *un entier* ≥ 0 *et soit* j *un entier tel que* $-(m+p) + k \leq j \leq k$. *Alors, l'opérateur :*

$$u \longmapsto (x_n^{\,k}\,(1 + D_{x_n}^{\,2m})\,\{u(x_n)\}\,;\,\gamma_{-j}u,\ldots,\,\gamma_{-j+m-1}u\,)$$

est un isomorphisme algébrique et topologique de $W_k^{2m+p}\,(\mathbb{R}_+)$ *sur* $(H^p(\mathbb{R}_+) \cap H_o^{\min(p,k)}(\mathbb{R}_+)) \times \mathbb{C}^m$.

Utilisant les techniques du chapitre 4 – 1°, on effectue l'homothétie $s = |(\xi_o,\ \xi')|\,x_n$ et dans les inégalités obtenues, où figure le paramètre $(\xi_o,\ \xi')$, on fait $\xi_o = 1$. Il en résulte le théorème :

<u>Théorème 1.1</u> : *soit* p *un entier* ≥ 0 *et soit* j *un entier tel que* $-(m+p) + k \leq j \leq k$. *Alors, l'opérateur :*

$$u \longmapsto (Lu\,;\ \gamma_{-j}u,\ldots,\gamma_{-j+m-1}u)$$

est un isomorphisme algébrique et topologique de $W_k^{2m+p}\,(\mathbb{R}_+^n)$ *sur*

$$(H^p\,(\mathbb{R}_+^n) \cap H_o^{\min(p,k)}(\mathbb{R}_+^n)) \times \prod_{\ell=-j}^{-j+m-1} H^{2m+p-k-\ell-\frac{1}{2}}\,(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Dans le cas de l'ouvert Ω introduit dans le chapitre I , on peut citer les opérateurs $\varphi^k(x)\ A$, où A est un opérateur d'ordre 2m, proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$ et k un entier ≥ 1.
De tels opérateurs seront étudiés en détail au chapitre 5 , 3°. et surtout au chapitre 6.

2°. Etude algébrique de la condition $H_3\ (p\ ;\ \mathbb{R}^n_+)$.

Les résultats obtenus dans [4] , permettent dans certains cas d'exprimer la condition $H_3\ (p;\ \Omega)$ introduite dans le chapitre 4 à l'aide de conditions algébriques sur l'opérateur.

Lorsque Ω est un ouvert borné " régulier " on ne peut donner, en général, de critères algébriques permettant d'établir si le problème aux limites est bien posé. Toutefois de tels critères existent pour certains types d'opérateurs ; c'est ce que l'on montrera au paragraphe 3° . Dans cette même direction, citons aussi les travaux de V. P. GLOUCHKO [10] .

Dans le cas du demi espace $\mathbb{R}^n_+$, on peut, sous certaines conditions exprimer la condition $H_3(p;\ \mathbb{R}^n{}_+)$ à l'aide de conditions algébriques équivalentes, portant sur l'opérateur. La nature même de la condition $H_3(p;\ \mathbb{R}^n_+)$permet de limiter cette étude au cas des opérateurs homogènes à coefficients constants. Les notations seront celles du chapitre 3. 1.1.
On utilisera les résultats obtenus dans [4] (cf : chapitre 2 - 5°.), ce qui nous amène à faire les restrictions suivantes : on suppose que $1 \leq k \leq 2m$, que le nombre r_p est nul, que les opérateurs B_{jq} sont identiquement nuls pour tout couple d'entiers (j,q) vérifiant $1 \leq j \leq m$ et $2m-k \leq q \leq 2m+p-k-1$. Comme dans [4], pour chaque ω appartenant à S_{n-2} , on associe à l'opérateur différentiel $L(x_n;\ \omega,\ D_{x_n})$ un projecteur $R\ (\omega)$ de $\mathbb{C}^{2m}$. La condition $H_3(p;\ \mathbb{R}^n_+)$ est alors équivalente à la condition suivante :

$$(*)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \omega \text{ appartenant à } S_{n-2}\text{, il existe un opérateur linéaire} \\ D(\omega) \text{ de } \mathbb{C}^m \text{ dans } \mathbb{C}^{2m} \text{ tel que} \\ \qquad \begin{cases} B_p(\omega)\, D(\omega) = id_{\mathbb{C}^m}, \\ R(\omega)\, D(\omega) = D(\omega). \end{cases} \end{cases}$$

Dans [18] , cette condition $(*)$, pour $p = 0$, était appelée (S-L.) par analogie avec la condition de Shapiro-Lopatinski pour les problèmes aux limites elliptiques.

Dans le paragraphe suivant où $m = 1$ et $k = 1$, on montrera que cette condition $(*)$, pour l'opérateur $\mathcal{P}_p = (L,\gamma_0)$, est équivalente à une seule condition algébrique portant sur l'opérateur L.

Remarquons que cette condition $(*)$ peut être utilisée sous des hypothèses moins restrictives, en particulier en ce qui concerne le nombre r_p et la condition $H_2(p; \mathbb{R}^n_+)$; l'exemple qui suit est dans cette situation pour $p \geq 1$.

On va détailler la condition $(*)$ pour l'opérateur suivant :

$$(2.1) \qquad Lu(x) \equiv L(x_n \,;\, D_{x'}, \, D_{x_n})\,\{u(x)\} \equiv x_n^2 \,(1 + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}^{\,2})\{u(x)\} .$$

On utilisera les résultats obtenus dans [4] (cf . Chapitre 2 . 4° - 5°.).
L'opérateur frontière B considéré est défini par :

$$(2.2) \qquad B\ \gamma u \equiv B_p\ (D_{x'})\ \gamma u = B_{-2}\ (D_{x'})\ \gamma_{-2} u + B_{-1}(D_{x'})\ \gamma_{-1}\ u,$$

où $B_{-q}\ (D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants d'ordre $\leq m+q$ où m est un entier tel que $-2 \leq m \leq p+1$ (et, si $m+q < 0$, l'opérateur $B_{-q}\ (D_{x'})$ correspondant est par définition l'opérateur nul).

On pose :

$$(2.3) \qquad B_{-q}\ (D_{x'}) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m+q} p_{q\alpha} D_{x'}^{\alpha}.$$

La matrice $R(\omega)$ associée à l'opérateur L défini ci dessus s'écrit :

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la condition (*) est équivalente à la condition suivante :

$$\begin{cases} \text{pour tout } \omega \text{ appartenant à } S_{n-2} : \\ \sum_{|\alpha|=m+2} p_{2\alpha}\omega^{\alpha} - \sum_{|\alpha|=m+1} p_{1\alpha}\omega^{\alpha} \neq 0. \end{cases}$$

Montrons maintenant comment cette condition (*) peut être utilisée pour obtenir des théorèmes d'existence dans le demi espace $\mathbb{R}^n_+$. On introduit tout d'abord une variable supplémentaire x_o (cf 1°. de ce chapitre) : au couple $\{ L, B \}$ on associe le couple d'opérateurs $\{ M,C\}$ définis par :

$$\begin{cases} M(x_n ; \xi_o , \xi', D_{x_n}) \{u(x_n)\} \equiv x_n^2 \left(\sum_{i=o}^{n-1} \xi_i^2 + D^2_{x_n} \right)\{ u(x_n)\}, \\ C (\xi_o, \xi')\gamma u \equiv C_{-2} (\xi_o,\xi') \gamma_{-2}u + C_{-1} (\xi_o,\xi') \gamma_{-1}u . \end{cases}$$

où (ξ_o,ξ') appartient à $\mathbb{R}^n$ et où

$$C_{-q} (\xi_o,\xi') = \sum_{|\alpha|=o}^{m+q} p_{q\alpha} \xi_o^{m+q-|\alpha|}\xi'^{\alpha} \qquad \text{pour } q = 1,2 .$$

On vérifie que la condition (*) pour le couple d'opérateurs $\{ M,C\}$ équivaut à :

$$(2\text{-}4) \quad \begin{cases} \text{pour tout } (\xi_o,\xi') \text{ appartenant à } S_{n-1} : \\ \sum_{|\alpha|=o}^{m+2} p_{2\alpha}\xi_o^{m+2-|\alpha|}\xi'^{\alpha} - \sum_{|\alpha|=o}^{m+1} p_{1\alpha}\xi_o^{m+1-|\alpha|} \xi'^{\alpha} \neq 0. \end{cases}$$

Comme dans le 1° de ce chapitre, les techniques d'homothétie utilisées dans le chapitre 4 - 1°. permettent d'établir le théorème suivant

Théorème 2-1 : *Si le couple d'opérateurs* $\{L, B\}$ *définis par* (2-1), (2-2), (2-3) *vérifie la condition* (2-4) , *alors : pour tout entier* $p \geq 0$, *il est un isomorphisme algébrique et topologique de* $W_2^{2+p}(\mathbb{R}_+^n)$ *sur* $(H^p(\mathbb{R}_+^n) \cap H_0^{\min(p,2)}(\mathbb{R}_+^n)) \times H^{p-\frac{1}{2}-m}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Remarque 2-1 : La condition (2-4) sur $\{L, B\}$ est une condition plus forte que la condition (*) sur $\{L, B\}$.

3°. Etude détaillée des opérateurs L dans le cas particulier $m = k = 1$.

Dans ce paragraphe, on va préciser les résultats obtenus pour les opérateurs L introduits dans le chapitre II pour lesquels $m = k = 1$. On utilisera les résultats obtenus dans [4] (cf. chapitre 3).

Dans le demi espace $\mathbb{R}_+^n$, on limitera l'étude à un exemple en relation avec le 1°. de ce chapitre. Appliquant le théorème 2-1 du chapitre 3 de [4] , on obtient :

Théorème 3-1 : *Soit un entier* $p \geq 0$ *et soit l'opérateur* L *défini par :*

$$Lu(x) \equiv L(x_n; D_x, D_{x_n})\{u(x)\} \equiv (1 + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}^2)\{x_n u(x)\} + \lambda D_{x_n} u(x),$$

où λ *appartient à* $\mathbb{C}$. *Alors :*

(i) *Si* $\mathrm{Re}\,(i\lambda) < -\frac{3}{2} - p$, *l'opérateur* $\{L, \gamma_0\}$ *est un isomorphisme de* $W_1^{2+p}(\mathbb{R}_+^n)$ *sur* $H^p(\mathbb{R}_+^n) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$;

(ii) *Si* $\mathrm{Re}\,(i\lambda) > -\frac{3}{2} - p$ *et*

1 - Si $(i\lambda) \neq -2m$, *avec* m *entier* ≥ 1, *l'opérateur* L *est un isomorphisme de* $W_1^{2+p}(\mathbb{R}_+^n)$ *sur* $H^p(\mathbb{R}_+^n)$;

2 - Si $(i\lambda) = -2m$, *avec* m *entier* ≥ 1, *l'opérateur* $\{L,\gamma_o\}$ *est un isomorphisme de* $W_1^{2+p}(\mathbb{R}_+^n)$ *sur* $K^p(\mathbb{R}_+^n) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ où $K^p(\mathbb{R}_+^n) = \{f \in H^p(\mathbb{R}_+^n)$; $\gamma_o((1 + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}^2)^{m-1} f) = 0$ *dans* $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})\}$.

Soit maintenant Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ défini dans le chapitre 4. Les opérateurs $L \equiv L(x; D_x)$ définis dans le chapitre 4 - 2° peuvent s'écrire lorsque $m = k = 1$:

$$Lu(x) \equiv L(x; D_x)\{u(x)\} \equiv P^2(x; D_x)\{\varphi(x)u(x)\} + P^1(x; D_x)\{u(x)\} + a(x)u(x),$$

où

(i) $P^2(x; D_x) \equiv \sum_{1 \leq i,j \leq n} a^{ij}(x) D_i D_j$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre 2, homogène, à coefficients de classe C^∞ dans $\bar{\Omega}$ et proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$;

(ii) $P^1(x; D_x) = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) D_i$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre 1 au plus, homogène et à coefficients de classe C^∞ dans $\bar{\Omega}$;

(iii) $a(x)$ est une fonction de classe C^∞ dans $\bar{\Omega}$.

Par analogie avec [4] (cf. Chapitre III) pour x appartenant à Γ on pose :

$$\rho(x) = i\, P^1(x ; \operatorname{grad}\varphi(x)) / P^2(x ; \operatorname{grad}\varphi(x))$$

et on définit les conditions $C(x)$ et $K(x)$(*) suivantes :

<u>$C(x)$</u> : pour tout vecteur ξ cotangent non nul en x à Γ , il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ tel que :

$$P^1(x ; \xi + \tau_+(x;\xi) \operatorname{grad}\varphi(x)) = in\,(\tau_+(x;\xi) - \tau_-(x;\xi))\, P^2(x; \operatorname{grad}\varphi(x))$$

(*) Ces conditions ne sont pas notées de la même manière dans [4] et [7] où $\tau_+(x;\xi)$ (resp. $\tau_-(x;\xi)$) est la racine à partie imaginaire positive (resp.négative) de l'équation $P^2(x;\xi+\tau \text{ grad } \varphi(x)) = 0$.

K(x) : pour tout vecteur ξ cotangent non nul en x à Γ, il n'existe pas d'entier $n \geq 0$ tel que :

$$P^1(x;\xi + \tau_-(x;\xi) \text{ grad } \varphi(x)) = in\,(\tau_+(x;\xi) - \tau_-(x;\xi))\, P^2(x; \text{grad}\varphi(x))$$

Remarque 3-1 : La fonction ρ et les conditions C et K sont invariantes par difféomorphisme. .

Remarque 3-2 : (i) soit x appartenant à Γ. Si pour tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, il existe un entier $n(=n(x;\xi)) \geq 1$ tel que

$$P^1(x;\xi + \tau_+(x;\xi) \text{ grad } \varphi(x)) = in\,(\tau_+(x;\xi) - \tau_-(x;\xi))\, P^2(x; \text{grad}\varphi(x))$$

cela implique en dimension $n \geq 3$ qu'il existe un entier $m(=m(x)) \geq 1$ tel que :

$$\rho(x) = -2m \quad \text{et} \quad a^{\ell}(x) = im \sum_{j=1}^{n} (a^{\ell j}(x) + a^{j\ell}(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

Ainsi par exemple l'opérateur

$$L(x;D_x)\,\{u(x)\} \equiv \varphi(x)\{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a^{ij}(x) D_i D_j + \sum_{i=1}^{n} a^i(x) D_i + a(x)\}\{u(x)\}$$

vérifie pour tout x appartenant à Γ la condition précédente.

Dans cette hypothèse la condition K(x) est satisfaite.

(ii) Soit x appartenant à Γ. Si $a^{\ell j}(x) = \overline{a^{j\ell}}(x)$, si $ia^j(x)$ est réel et si $\rho(x)$ n'est pas un entier de la forme $-2m$ (resp $2(m-1)$) avec m entier ≥ 1, alors la condition C(x) (resp.K(x)) est satisfaite.

Les résultats obtenus dans [4] (cf. Chapitre III) permettent d'exprimer la condition $H_3(p;\Omega)$ à l'aide des conditions algébriques C(x) et K(x). Ainsi à l'aide des méthodes du chapitre 4, on obtient le résultat suivant (cf : théorème 3-1 du chapitre 4).

Théorème 3-2 : *Soit un entier* $p \geq 0$. *Avec les notations précédentes on a :*

(i) si pour tout x *appartenant à* Γ , $\mathrm{Re}\,\rho(x) < -\frac{3}{2} - p$ *et la condition* $K(x)$ *est vérifiée, l'opérateur* $\{L, \gamma_0\}$ *opérant de* $W_1^{2+p-q}(\Omega)$ *dans* $H^{p-q}(\Omega) \times H^{p-q+1/2}(\Gamma)$ *est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de l'entier* q *vérifiant* $0 \leq q \leq p$.

(ii) si pour tout x *appartenant à* Γ, $\mathrm{Re}\,\rho(x) > -\frac{3}{2} - p$ *et la condition* $C(x)$ *est vérifiée, l'opérateur* L *opérant de* $W_1^{2+p+q}(\Omega)$ *dans* $H^{p+q}(\Omega)$ *est un opérateur à indice, dont l'indice est indépendant de l'entier* $q \geq 0$. *De plus, le noyau de l'opérateur* L *opérant dans* $W_1^{2+p}(\Omega)$ *est égal à* $\{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),\ Lu = 0$ *dans* $\Omega\}$.

Remarque 3-3 : (i) Les résultats de régularité correspondant à ce théorème 3-2 (cf : théorème 2-1 du chapitre 4) s'énoncent de la façon suivante :

1. Si l'hypothèse (i) du théorème 3-1 est satisfaite et si de plus k est un entier ≥ 0 tel que $\mathrm{Re}\,\rho(x) < -\frac{3}{2} - (p+k)$ pour tout x appartenant à Γ, on a : si u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et si $\{L, \gamma_0\}(u)$ appartient à $H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$; alors u appartient à $W_1^{2+p+k}(\Omega)$.

2. Si l'hypothèse (ii) du théorème 3-1 est satisfaite et si k est un entier ≥ 0 on a : si u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et si Lu appartient à $H^{p+k}(\Omega)$, alors u appartient à $W_1^{2+p+k}(\Omega)$.

(ii) On peut aussi obtenir des estimations a priori et des résultats de régularité pour des opérateurs L introduits ici pour lesquels les hypothèses du chapitre II ne sont pas vérifiées. Ainsi si $\mathrm{Re}\,\rho(x) > -\frac{3}{2} - p$ pour tout x appartenant à Γ et si, pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, il existe un entier n ($= n(x;\xi)$) tel que

$$P^1(x;\xi+\tau_+(x;\xi)\,\mathrm{grad}\,\varphi(x)) = i n\,(\tau_+(x;\xi)-\tau_-(x;\xi))\ P^2(x;\mathrm{grad}\,\varphi(x))$$

(cf : remarque 3-2) alors pour tout entier $k \geq 0$ on a :

si u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et $\{L,\gamma_o\}(u)$ appartient à $H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors u appartient à $W_1^{2+p+k}(\Omega)$ et il existe $C_k > 0$ telle que

$$\|u\|_{W_1^{2+p+k}(\Omega)} \leq C_k\{\|\{L,\gamma_o\}(u)\|_{H^{p+k}(\Omega)\times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_1^{1+p+k}(\Omega)}\}$$

(C_k étant indépendant de u).

Par exemple, l'opérateur $L \equiv L(x,D_x)$ défini par :

$$Lu(x) = L(x; D_x)\{u(x)\} = \varphi(x)\left[\sum_{1\leq i,j\leq n} a^{ij}(x) D_i D_j + \sum_{i=1}^{n} a^i(x) D_i + a(x)\right]\{u(x)\}$$

satisfait aux conditions précédentes. On montrera au chapitre 6 qu'un tel opérateur est un opérateur à indice dans des espaces convenables.

Remarque 3-4 : Les opérateurs $L(x;D_x)$ considérés précédemment c'est-à-dire de la forme

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\{u(x)\} \equiv P^2(x;D_x)\{\varphi(x)u(x)\} + P^1(x;D_x)\{u(x)\} + a(x)u(x)$$

avec

$$P^2(x;D_x) \equiv \sum_{1\leq i,j\leq n} a^{ij}(x) D_i D_j \qquad \text{et } P^1(x; D_x) = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) D_i$$

appartiennent à la classe des opérateurs étudiés dans [13] (cf : aussi [8], [15]) lorsque a^{ij}, ia^j et a sont des fonctions réelles. Selon Fichera, la frontière Γ est partagée en trois parties qui, dans notre cas et avec nos notations, s'expriment par les conditions suivantes :

$\Sigma_3 = \phi$ (ensemble des points de Γ non caractéristiques pour L),

$\Sigma_2 = \{x \in \Gamma, \ \rho(x) < -1\}$,

$\Sigma_1 = \{x \in \Gamma, \ \rho(x) \geq -1\}$.

Dans [13] , Kohn et Nirenberg obtiennent essentiellement, moyennant une hypothèse supplémentaire sur l'opérateur en tout point de Σ_2, un théorème d'existence pour l'équation $L(x; D_x)\{u\} = f$: étant donné f dans un espace de Sobolev $H^N(\Omega)$ (avec $N > 1$) il existe une solution u de l'équation $L(x; D_x)\{u\} = f$, nulle sur Σ_2 et qui appartient à un certain espace de Sobolev sur Ω. Les résultats obtenus dans la remarque 3.3 permettent de compléter la régularité d'une telle solution.

Il ressort de l'étude faite dans ce paragraphe 3° que pour de tels opérateurs, il serait plus correct de considérer $\Sigma_2 = \{x \in \Gamma ; \rho(x) < -\frac{3}{2}\}$ et $\Sigma_1 = \Gamma - \Sigma_2$ et de poser sur Σ_2 des conditions aux limites en accord avec le théorème 3-2 et la remarque 3-3.
Ainsi, par exemple, si on veut obtenir une régularité de tout ordre de la solution, il ne faut pas imposer de conditions aux limites sur Σ_2 (sauf cas particulier correspondant au point (ii) de la remarque 3-3).

6. Quelques applications.

Les notations sont celles introduites dans le chapitre 4.

Les opérateurs $L \equiv L(x;\, D_x)$ de la forme :

$$Lu(x) \equiv L(x;\, D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{2m} P^{2m-h}(x;\, D_x)\{\varphi(x)^{k-h}u(x)\}$$

avec $k \geq 2m$, peuvent s'écrire sous la forme :

$$Lu(x) \equiv \varphi(x)^{k-2m}\, M\, u(x)$$

où $M \equiv M(x;\, D_x)$ est un opérateur de la forme :

$$Mu(x) \equiv M(x;\, D_x)\,\{u(x)\} = \sum_{h=o}^{2m} M^{2m-h}\,(x;\, D_x)\{\varphi(x)^{2m-h}\, u(x)\}\ .$$

Plus généralement , étant donnés un opérateur $L \equiv L(x;\, D_x)$ de la forme :

$$Lu(x) \equiv L(x;\, D_x)\,\{u(x)\} \equiv \sum_{h=o}^{\min(2m,k)} P^{2m-h}(x;D_x)\{\varphi(x)^{k-h}\, u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers ≥ 1, et des entiers p et $q \geq 0$, les méthodes du chapitre II permettent d'étudier l'opérateur $\varphi(x)^q\, L(x;\, D_x)$ de $W^{2m+p}_{k+q}\,(\Omega)$ dans $H^p\,(\Omega)$ et l'opérateur $L(x;\, D_x)$ de $W^{2m+p}_{k+q}\,(\Omega)$ dans $W^p_q(\Omega)$. En particulier, on peut étudier l'indice de tels opérateurs et la dépendance de cet indice par rapport aux paramètres p et q. Dans les deux cas, cette étude se ramène à l'étude d'un opérateur M de la forme :

$$Mu(x) \equiv M(x;\, D_x)\{u(x)\} = \sum_{h=o}^{\min(2m,k+q)} Q^{2m-h}(x;\, D_x)\{\varphi(x)^{k+q-h}\, u(x)\}$$

de $W^{2m+p}_{k+q}\,(\Omega)$ dans $H^p\,(\Omega)$.

On va maintenant appliquer ces méthodes à deux exemples déjà étudiés dans [9], [11] et [1], [23] . Celles-ci nous permettront d'une part, de retrouver des résultats déjà connus et d'autre part, de les compléter.

1°- Application à l'étude des problèmes aux limites associés aux opérateurs elliptiques dans des espaces de Sobolev avec poids.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ du type défini dans le chapitre 4. Soit $A \equiv A(x; D_x)$ un opérateur aux dérivées partielles d'ordre 2m, proprement elliptique sur $\bar{\Omega}$, à coefficients indéfiniment différentiables sur $\bar{\Omega}$ et soient m opérateurs frontière $B_j = B_j(x; D_\Gamma)$ pour $j = 1,\ldots,m$, B_j étant un opérateur différentiel sur Γ d'ordre m_j avec $0 \leq m_j \leq 2m-1$ à coefficients indéfiniment différentiables sur Γ tels que le système $(B_j)_{1\leq j\leq m}$ soit normal sur Γ et recouvre A sur Γ (cf : [14]).

Dans [11] , M.C. GOUDJO montre que pour $1 < q < +\infty$ et pour p et k entiers ≥ 0 tels que $p > p(k) = \max\{-2m + m_j + k + \frac{1}{q} ; 1\leq j\leq m\}$, l'opérateur $T \equiv \{A; B_1,\ldots,B_m\}$ opérant de $W_k^{2m+p,q}(\Omega)$ dans $W_k^{p,q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{q},\, q}(\Gamma)$ est un opérateur à indice dont l'indice ne dépend ni de q, ni de p, ni de k ($W_k^{\ell,q}(\Omega)$ désigne l'espace$\{ u\in \mathcal{D}'(\Omega) ; \varphi(x)^k D^\beta u \in L^q(\Omega), |\beta| \leq \ell\}$ muni de la norme canonique). Par des méthodes d'interpolation, il généralise ces résultats à des paramètres p et k réels positifs. Il complète ainsi les résultats de G.GEYMONAT et P. GRISVARD [9] .

Dans ce paragraphe, on va retrouver ces résultats dans le cas où q = 2 par les méthodes indiquées précédemment, celles ci donneront par ailleurs d'autres résultats.

On considère l'opérateur $\mathcal{P}^k \equiv \{\varphi^k A; B_1,\ldots, B_m\}$ opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour $p > p(k) = \max\{-2m + m_j+k+ \frac{1}{2}; 1\leq j\leq m\}$. Remarquons tout d'abord que les espaces $W_k^{\ell,2}(\Omega)$ coïncident avec les espaces $W_k^{\ell}(\Omega)$ définis au chapitre 3 et que les espaces $W^{\ell-\frac{1}{2},2}(\Gamma)$ coïncident avec les $H^{\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Par ailleurs, il est facile de vérifier que l'opérateur $\varphi^k A$ est linéaire et continu dans $H^p(\Omega) \cap H_0^{\min(k,p)}(\Omega)$ de sorte que les hypothèses $H_2(p;\Omega)$

et $H_3(p;\Omega)$ ne sont pas en général satisfaites.

Néanmoins, selon les remarques faites au chapitre 5, on peut appliquer les méthodes du chapitre 4 à l'opérateur $\mathcal{P}^k$, noté désormais $\mathcal{P}_p^k$ opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $(H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(k,p)}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^m H^{2m+p-m_j-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ainsi, on obtient (cf : le théorème 2-1 du chapitre 4) : pour tout entier $q \geq 0$, il existe une constante $C_{p+q} > 0$ telle que :

si u appartient à $W_k^{2m+p}(\Omega)$ et si $\mathcal{P}_p^k u$ appartient à $(H^{p+q}(\Omega)\cap H_o^{\min(k,p+q)}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^m H^{2m+p+q-m_j-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ alors :

(i) u appartient à $W_k^{2m+p+q}(\Omega)$,

(ii) $$||u||_{W_k^{2m+p+q}(\Omega)} \leq C_{p+q}\{||\mathcal{P}_p^k u||_{H^{p+q}(\Omega)\times\prod_{j=1}^m H^{2m+p+q-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + ||u||_{W_k^{2m+p+q-1}(\Omega)}\}.$$

On en déduit (cf : le théorème 3-1 du chapitre 4) que le noyau de $\mathcal{P}_p^k$ dans $W_k^{2m+p}(\Omega)$ est de dimension finie et que l'image $\mathcal{P}_p^k\ W_k^{2m+p}(\Omega)$ est fermée dans $(H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(k,p)}) \times \prod_{j=1}^{X_p} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Du résultat de régularité on déduit que :

$$\operatorname{Ker}\mathcal{P}_p^k = \{u\in\mathcal{D}(\bar{\Omega})\ ;\ Au = 0\ ,\ B_ju = 0\ ,\ j = 1,\ldots,m\}\ ,$$

et que

$$\mathcal{P}_p^k W_k^{2m+p+q}(\Omega) = \mathcal{P}_p^k\ W_k^{2m+p}(\Omega)\cap((H^{p+q}(\Omega)\cap H_o^{\min(p+q,k)}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^m H^{2m+p+q-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)),$$

pour tout entier $q \geq 0$.

Par transposition, on va montrer que la codimension de $\mathcal{P}_p^k W_k^{2m+p}(\Omega)$

dans $(H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(k,p)}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est finie. D'après ce qui précède, il suffit de considérer le cas où p est le premier entier $\geq$ o supérieur à p(k) et dans ces conditions (puisque $p(k)< k$) on a $H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(p,k)}(\Omega) = H_o^p(\Omega)$. Ainsi l'opérateur $\mathcal{P}_p^{k*}$ adjoint de $\mathcal{P}_p^k$ est linéaire et continu de $H^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans l'espace dual $[W_k^{2m+p}(\Omega)]'$ de $W_k^{2m+p}(\Omega)$, et est défini par

$$<\mathcal{P}_p^{k*}(f; g_1,\ldots,g_m), \bar{\phi}>_{[W_k^{2m+p}(\Omega)]' \times [W_k^{2m+p}(\Omega)]} = <f, \overline{\varphi^k A\phi}>_{H^{-p}(\Omega)\times H_o^p(\Omega)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} < g_j, \overline{B_j\phi|_\Gamma}>_{H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

pour $(f; g_1,\ldots, g_m)$ appartient à $H^{-p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{-2m-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

On introduit l'opérateur $T_p \equiv \{A; B_1,\ldots,B_m\}$ opérant de $H^{2m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-m_j-1/2}(\Gamma)$. L'opérateur T^*_p adjoint de T_p est linéaire et continu de $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{m} H^{-2m-p+m_j+1/2}(\Gamma)$ dans $[H^{2m+p}(\Omega)]'$ et est défini par :

$$< T_p^*(F; G_1,\ldots,G_m),\bar{\phi}>_{[H^{2m+p}(\Omega)]'\times H^{2m+p}(\Omega)} = <F, \overline{A\phi}>_{[H^p(\Omega)]'\times H^p(\Omega)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} <G_j, \overline{B_j\phi}|_\Gamma>_{H^{-2m-p+m_j+1/2}(\Gamma)\times H^{2m+p-m_j-1/2}(\Gamma)}$$

pour $(F; G_1,\ldots,G_m)$ appartenant à $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{m} H^{-2m-p+m_j+1/2}(\Gamma)$ et ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

D'après [17] (cf : le théorème 6) le noyau de T_p^* coïncide avec l'espace

$$\mathcal{N}=\{(F;\ G_1,\dots,G_m)\in\mathcal{D}(\bar{\Omega})\times(\mathcal{D}(\Gamma))^m;\ T_p^*\ (F;\ G_1,\dots,G_m)=0\}$$

et cet espace est de dimension finie.

Or étant donné f appartenant à $H^{-p}(\Omega)$ on lui associe, de façon canonique, F appartenant à $[H^p(\Omega)]'$ de la façon suivante :

$$F:\ \phi\longmapsto\langle f,\varphi^k\ \phi\rangle:\ \mathcal{D}(\bar{\Omega})\longmapsto\mathbb{C}\ ,$$

et F et $\varphi^k f$ coïncident dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ainsi étant donné $(f;\ g_1,\dots,g_m)$ appartenant à $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}_p^{k*}$ on peut associer canoniquement $(F;\ G_1,\dots,G_m)$ appartenant à $\mathcal{N}=\mathrm{Ker}\ T_p^*$ où $G_j=g_j$ pour $j=1,\dots,m$ et où F est défini ci dessus. De plus la correspondance

$$(f;\ g_1,\dots,g_m)\longmapsto(F\ ;\ G_1,\dots,G_m)$$

est évidemment injective et est aussi surjective. En effet si $(F;\ G_1,\dots,G_m)$ appartient à $\mathcal{N}$, il résulte de [14] (cf : la proposition 5-1 du chapitre II) que F appartient à $H_o^{2m-1-\max\{m_j;j=1,\dots,m\}}(\Omega)$ et donc $f=F/\varphi^k$ appartient à $H^{-p}\ (\Omega)$ et $(f;\ G_1,\dots,G_m)$ appartient à $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}_p^{k*}$. Finalement on a démontré que $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}_p^{k*}$ est de dimension finie et isomorphe à $\mathcal{N}$.

Par suite on a établi que l'opérateur $\mathcal{P}_p^k$ opérant de $W_k^{2m+p}\ (\Omega)$ dans $(H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(p,k)}(\Omega))\times\prod_{j=1}^{m}H^{2m+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur à indice et que cet indice est égal à l'indice de l'opérateur $T_p=\{A;\ B_1,\dots,B_m\}$ de $H^{2m+p}\ (\Omega)$ dans $H^p(\Omega)\times\prod_{j=1}^{m}H^{2m+p-m_j-\frac{1}{2}}\ (\Gamma)$. Comme la multiplication par $1/\varphi^k$ est un isomorphisme de $H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(k,p)}(\Omega)$ sur $W_k^{\ p}(\Omega)$, on en déduit que l'opérateur $T=\{A;\ B_1,\dots,B_m\}$ opérant de $W_k^{2m+p}\ (\Omega)$ dans $W_k^p\ (\Omega)\times\prod_{j=1}^{m}H^{2m+p-m_j-k-1/2}(\Gamma)$ est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de p et de k avec la condition $p>p(k)$ $(=\max\{-2m+m_j+k+\frac{1}{2}\ ;\ j=1,\dots,m\})$. On a ainsi retrouvé les résultats de [11] dans le cadre hilbertien et pour k entier ≥ 1.

Pour s'affranchir de la restriction $p > p(k)$, il est nécessaire d'introduire des opérateurs frontière B_j plus généraux . Par exemple on peut considérer des opérateurs frontière B_j analogues à ceux introduits dans le chapitre 4 - 2°. Ainsi si l'opérateur $\mathcal{P}^k = \{\varphi^k A;\ B_1,\dots,B_n\}$ satisfait la condition $H_3(0;\Omega)$ (il est facile de voir qu'il existe de tels opérateurs : cf : le chapitre 5) on démontrerait que l'opérateur $\mathcal{P}^k$ opérant de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ dans $(H^p(\Omega) \cap H_0^{\min(k,p)}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+p-k-m_j-1/2}(\Omega)$ est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de l'entier $p \geq 0$. (signalons que le problème de l'invariance, par rapport à k, de l'indice d'un tel opérateur ne se pose pas puisque de tels opérateurs généraux B_j n'opèrent pas en général sur les espaces $W^{2m+p}(\Omega)$ pour h différent de k).

2° Application à l'étude des opérateurs introduits dans [1] et [23] .

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ du type défini dans le chapitre 4. Soit $L \equiv L(x;D_x)$ l'opérateur aux dérivées partielles défini sur Ω par :

$$\text{(2-1)} \quad Lu(x) \equiv L(x;D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\alpha|\leq 1}} D^\beta(a_{\alpha\beta}(x)\,\varphi(x)^k\, D^\alpha u(x)),$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont indéfiniment différentiables sur $\bar{\Omega}$, k est un entier ≥ 1. On suppose que L est coercif sur l'espace

$$V_k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ;\ \varphi^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

muni de la norme canonique; autrement dit il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u appartenant à $V_k(\Omega)$ on ait :

$$\text{(2-2)} \quad \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\beta|\leq 1}} \int_\Omega (-1)^{|\beta|} a_{\alpha\beta}(x)\,\varphi(x)^k D^\alpha u(x)\,\overline{D^\beta u(x)}\,dx\Big) \geq C \sum_{|\alpha|\leq 1} \|\varphi^{\frac{k}{2}} D^\alpha_u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Pour p entier ≥ 0 et m entier ≥ 1 soient les espaces $E_{p,m}(\Omega)$ et $F_{p,m}(\Omega)$ définis par cartes locales à partir des espaces $E_{pm}(\mathbb{R}^n_+)$ et $F_{pm}(\mathbb{R}^n_+)$ suivants :

$$E_{pm}(\mathbb{R}^n_+) \equiv \{ u \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \ ; \ x_n^{|\beta|-1} D^\beta u \in H^p(\mathbb{R}^n_+) \ , \ 2 \leq |\beta| \leq m+1, \ 0 \leq \beta_n \leq 2 \} \ ,$$

$$F_{pm}(\mathbb{R}^n_+) \equiv \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \ , \ ; \ x_n^{-k+1+|\alpha'|} D^{\alpha'}_{x'} f \in H^p(\mathbb{R}^n_+), \ 0 \leq |\alpha'| \leq m-1 \right\},$$

munis des normes canoniques .

Remarquons que pour $m=1$ les espaces $E_{p1}(\Omega)$ et $F_{p1}(\Omega)$ peuvent être définis globalement sur Ω par :

$$E_{p1}(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \ , \ \varphi D^\alpha u \in H^p(\Omega) \ , |\alpha|=2 \} (\equiv W_1^{2+p}(\Omega)),$$

$$F_{p1}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi^{-k+1} f \in H^p(\Omega) \}.$$

Dans [1], M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC ont étudié l'opérateur L dans le cas où $k = 1$ d'un point de vue variationnel et ont obtenu des résultats de régularité par une méthode de régularisation elliptique. Dans [23], C. ZUILY a généralisé ces résultats de régularité dans le cas où $k \geq 1$, par des méthodes analogues, notant $\{\frac{k}{2}\}$ le plus petit entier $\geq \frac{k}{2}$ il a démontré que si u appartient à $V_k(\Omega)$ et Lu appartient à $F_{p\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$ alors u appartient à $E_{p\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$, ce qui permet de déduire que l'opérateur L est un isomorphisme de $E_{p\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$ sur $F_{p\{\frac{k}{2}\}}(\Omega)$ pour tout entier $p \geq 0$ et de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap H_0^{k-1}(\Omega)$.

Dans ce paragraphe on va retrouver des résultats de régularité analogues, par les méthodes indiquées au début de ce chapitre, sans toutefois les recouvrir totalement, puis compléter dans le cas où $k > 1$.

Tout d'abord, on remarque que l opérateur L peut s'écrire sous la forme :

$$L(x; D_x) \{u(x)\} \equiv \varphi(x)^{k-1} \mathcal{L}_0(x; D_x) \{u(x)\}$$

où $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x; D_x)$ est un opérateur de la forme :

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \mathcal{L}(x;D_x)\{u(x)\} \equiv P^2(x;D_x)\{\varphi(x)\ u(x)\} + P^1(x;D_x)\{u(x)\} + a(x)u(x)$$

où $P^h(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles, homogène d'ordre h pour $1 \leq h \leq 2$ avec en particulier :

$$P^2(x;D_x) \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x)\ D^{\alpha+\beta},$$

et où $a(x)$ est une fonction de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$. Cet opérateur $\mathcal{L}$ appartient à la classe des opérateurs étudiés dans le chapitre 5 - 3°.

Conservant les notations de ce paragraphe, on vérifie que pour x appartenant à Γ, $\rho(x)$ est constant et égal à k-2. D'après [3], la condition de coercivité imposée sur L impliquent deux conditions algébriques sur l'opérateur $P^2(x;D_x)$ qui permettent de démontrer facilement que pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, l'opérateur défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$P^2(x;\xi + \operatorname{grad}\varphi(x)\ D_t)\{tu(t)\} + P^1(x;\xi + \operatorname{grad}\varphi(x)\ D_t)\{u(t)\}$$

est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$ pour tout entier $p \geq 0$.

En d'autres termes, pour tout x appartenant à Γ, la condition C(x) est vérifiée :

On peut alors établir le théorème suivant :

<u>Théorème 2-1</u> : *Soient un entier* $p \geq 0$ *et* $L \equiv L(x;D_x)$ *l'opérateur défini en* (2-1) . *On suppose que cet opérateur vérifie la condition de coercivité* (2-2). *Alors pour tout entier* $m \geq 1$, *l'opérateur* L *est un isomorphisme algébrique et topologique de* $E_{pm}(\Omega)$ *sur* $F_{pm}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : les résultats du chapitre 5 - 3° et compte tenu de ce qui précède permettent d'affirmer que si u appartient à $W_1^2(\Omega)$ et $\mathcal{L}u$ appartient à $H^p(\Omega)$, alors u appartient à $W_1^{2+p}(\Omega)$ et il existe une constante $C_p > 0$ (indépendante de u) telle que :

$$||u||_{W_1^{2+p}(\Omega)} \leq C_p \{||\mathcal{L}u||_{H^p(\Omega)} + ||u||_{W_1^{1+p}(\Omega)}\}$$

Par cartes locales, on se ramène au demi espace $\mathbb{R}^n_+$ puis, utilisant la méthode des quotients différentiels, on démontre, grâce à cette estimation a priori, que si u appartient à $W_1^2(\Omega)$ et Lu appartient à $F_{pm}(\Omega)$, alors u appartient à $E_{pm}(\Omega)$. Le théorème 3-2 du chapitre 5 permet alors de conclure que l'opérateur L est un opérateur à indice de $E_{pm}(\Omega)$ dans $F_{pm}(\Omega)$.
Le condition de coercivité (2-2) prouve que L est injectif sur $E_{pm}(\Omega)$.
Enfin, la condition (2-2) et le résultat de régularité pour $p = 0$ et $m = \{\frac{k}{2}\}$ de [1] et [23] permettent de prouver que L est surjectif de $E_{pm}(\Omega)$ sur $F_{pm}(\Omega)$
Ce qui termine la démonstration du théorème 2-1.

On va maintenant compléter l'étude de cet opérateur L en le considérant comme opérant de $W_k^{2+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$. On va démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 2-2</u> :*soient un entier* $p \geq 0$ *et* $L \equiv L(x; D_x)$ *l'opérateur défini en* (2-1). *On suppose que cet opérateur vérifie la condition de coercivité* (2-2). *Alors l'opérateur* L *est un isomorphisme algébrique et topologique de* $W_k^{2+p}(\Omega)$ *sur* $H^p(\Omega) \cap H_0^{\min(k-1,p)}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : on écrit l'opérateur L sous la forme :

$$L(x; D_x)\{u(x)\} = P^2(x;D_x)\{\varphi(x)^k u(x)\} + P^1(x;D_x)\{\varphi(x)^{k-1}u(x)\} + a(x)\varphi(x)^{k-1}u(x)$$

où $P^h(x; D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles, homogène d'ordre h pour $h = 1, 2$ avec en particulier

$$P^2(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha+\beta} ,$$

et où a(x) est une fonction de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Comme précédemment, on vérifie que la condition (2-2) implique que pour tout x appartenant à Γ et tout ξ vecteur cotangent non nul en x à Γ, l'opérateur défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$P^2(x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)\,D_t)\,\{t^k\,u(t)\}+P^1\,(x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)\,D_t)\,\{t^{k-1}u(t)\}$$

est un isomorphisme de $W_k^{2+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)\cap H_o^{\min(k-1,p}\,(\mathbb{R}_+)$ pour tout entier $p\geq 0$. On en déduit que l'opérateur L opérant de $W_k^{2+p}\,(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(k-1,p)}$ est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de l'entier $p\geq 0$. La condition de coercivité (2-2) prouve que L est injectif sur $W_k^{2+p}\,(\Omega)$ et le théorème 2-1 prouve que L est surjectif de $W_k^{2+p}\,(\Omega)$ sur $H^p(\Omega)\cap H_o^{\min(k-1,p)}$.
Ce qui achève la démonstration du théorème 2-2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI (M.S.) et GOULAOUIC (C.).- Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.- *Arch. Rat. Méc. Anal. 34, n° 5, 1969, p. 361-379.*

[2] BAOUENDI (M.S.) et GOULAOUIC (C.).- Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés. Applications.- *à paraître au Journal of Functional Analysis.*

[3] BOERO (P.) et PAVEC (R.).- Coercivité des formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids.- *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 270, 1970, p. 1416-1419.*

[4] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.).- Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable.- *J. Math. pures et appl., t. 51, 1972, p. 429-463.*

[5] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.).- Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable.- *Publications des Séminaires de Mathématiques, Université de Rennes, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Année 1971-1972.*

[6] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.).- Sur certains problèmes aux limites, elliptiques et dégénérés.- *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 271, 1970, p. 980-983.*

[7] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.).- Une classification de problèmes elliptiques dégénérés à une ou plusieurs variables.- *Exposé n° 22, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris, 1970-1971.*

[8] FICHERA (G.).- On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. Boundary value problems in differential equations.- *Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1960, p. 97-120.*

[9] GEYMONAT (G.) et GRISVARD (P.).- Problemi ai limiti lineari ellitici negli spazi di Sobolev con peso.- *Le Matematiche, Vol. XXII, Fasc. 2, 1967.*

[10] GLOUCHKO (V.P.).- *Travaux scientifiques de la Société Mathématique de Moscou. t. 23, 1970, p. 113-173.*

[11] GOUDJO (C.).- Problèmes aux limites dans les espaces de Sobolev avec poids.- *Thèse de 3ème cycle, Nice, 1970.*

[12] HARDY, LITTLEWOOD et POLYA.- Inequalities.- *Cambridge University Press, 1967.*

[13] KOHN (J.J.) et NIRENBERG (L.).- Degenerate elliptic parabolic equations of second order.- *Comm. Pure Appl. Math., Vol. XX, 1967, p. 797-872.*

[14] LIONS (J.L.) et MAGENES (E.).- Problèmes aux limites non homogènes et applications.- *Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.*

[15] OLEINIK (O.A.).- On linear second order equations with non negative characteristic form.- *Mat. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 69, 1966, p. 111-140.*

[16] PEETRE (J.).- A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators.- *Comm. Pure Appl. Math. Vol. XIV, 1961, p. 737-744.*

[17] PEETRE (J.).- Another approach to elliptic boundary value problems.- *Comm. Pure Appl. Math. Vol. XIV, 1961, p. 711-731.*

[18] SHIMAKURA (N.).- Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré.- *J. Math. Kyoto Univ., Vol. 9, n° 2, 1969, p. 275-335.*

[19] SHIMAKURA (N.).- Une remarque sur la régularité des solutions des problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré.- *Proc. Japan Acad. Vol. 47, n° 3, 1971.*

[20] SHIMAKURA (N.).- Problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques dégénérés du 2ème ordre.- *Proc. Japan Acad. 1971.*

[21] TRIEBEL (H.).- Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ durch einen elliptishen differential operatoren zweiter ordnung.- *Math. Ann. 177, 1968, p. 247-264.*

[22] VISIK (M.I.) et GRUSIN (V.V.).- Boundary value problems of elliptic equations degenerate on the boundary of a domain.- *Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 9, n° 4, 1969.*

[23] ZUILY (C.).- Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du 2ème ordre.- *Thèse de 3ème cycle, Paris (1969).*

Pierre BOLLEY et Jacques CAMUS
Département de Mathématiques
Université de Rennes
Avenue du Général Leclerc
B.P. 25 A
35031 RENNES-CEDEX

Rédaction et administration
11, rue Pierre et Marie Curie, 75 231 PARIS CEDEX 05 **(France).**

Abonnements et tomes antérieurs :
Centrale des Revues Dunod-Gauthier-Villars, 24, Boulevard de l'Hôpital , 75.005 — PARIS
OFFILIB, 48, rue Gay-Lussac, 75 240 PARIS CEDEX 05

Abonnement pour 1973
Bulletin, tome 101 **avec suppléments : 200 F.**