JACQUES CHAZARAIN

Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 83-88
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__83_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 83-88.

CARACTERISATION DES PROBLEMES MIXTES HYPERBOLIQUES BIEN POSES

par

Jacques CHAZARAIN (1)

0. - Introduction.

Récemment, R. Sakamoto [5] a démontré sous une hypothèse dite de Lopatinski uniforme, l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte hyperbolique dans des espaces de Sobolev convenables ; mais cette hypothèse de Lopatinski uniforme exclut par exemple le cas de l'équation des ondes avec condition de dérivée oblique sur le bord. Dans ce travail, on se propose, en se restreignant au cas des opérateurs homogènes à coefficients constants, d'étendre les résultats de [5] sous une hypothèse de Lopatinski non nécessairement uniforme et de caractériser les problèmes mixtes hyperboliques bien posés.

I. - Notations et énoncé du problème.

Le point générique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est (x,y,t) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$; la variable duale de (x,y,t) est (ξ,η,τ) et pour abréger, on pose $z = (y,t)$ et $\zeta = (\eta,\tau)$. On note $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{ (x,y,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x>0\}$ et on désigne par $C^\infty_+(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ (resp. $C^\infty_+(\mathbb{R}^n)$) l'espace des fonctions $u = u(x,y,t)$ de $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ (resp. $v = v(y,t)$ de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui sont nulles pour $t < 0$.

Soit $P(D_x , D_y , D_t)$ un opérateur différentiel homogène d'ordre m ($D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, ...) à coefficients constants tel que :

(A) l'opérateur P est hyperbolique dans la direction du "temps" $N_o = (o,o,1)$ et l'hyperplan $x = o$ n'est pas caractéristique pour P .

On se donne $\tilde{\mu}$ opérateurs différentiels homogènes à coefficients constants $B_j(D_x , D_y , D_t)$ de degré B_j $j = o,\dots, \tilde{\mu}-1$ et d'ordre au plus $m-1$ par rapport à D_x .

On considère le PROBLEME MIXTE (※) :

$$(※) \quad \begin{cases} P(D_x , D_y , D_t)\, u = f(x,y,t) & \text{pour } x > 0 \\ B_j(D_x , D_y , D_t)\, u\big|_{x = 0} = g_j(y,t) & \text{sur le bord } x = 0 . \end{cases}$$

(1) Ces résultats ont été en collaboration avec Alain Piriou [2] et seront détaillés dans un article en commun à paraître aux Annales Institut Fourier.

On traduira éventuellement les conditions de Cauchy en imposant que u soit nul pour $t < 0$.

On se propose de caractériser les opérateurs frontières (B_j) dans les deux cas suivants :

a) Le problème (*) est bien posé dans les espaces de fonctions C^∞.

b) Le problème (*) est bien posé dans des espaces de Sobolev convenables.

II. - Enoncé des résultats.

Pour énoncer ces caractérisations, on doit introduire ce que nous appellerons la "matrice de Lopatinski".

Désignons par Γ la composante connexe de N_o dans l'ensemble des $N \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(N) \neq 0$ et posons $\Gamma_o = \Gamma \cap \{\xi = o\}$, on sait que (cf. [3]) P est hyperbolique par rapport à tout $N \in \Gamma$ et il est clair que le nombre μ de zéros en ξ de $P(\xi,\zeta) = 0$ tels que $\operatorname{Im} \xi > 0$ est indépendant de $\zeta \in \mathbb{R}^n - i\Gamma_o$, on les note $\xi_j^+(\zeta)$ $j = 0,\dots, \mu-1$. On suppose que l'on a :

(B) Le nombre $\tilde{\mu}$ d'opérateurs frontières est précisément μ.

Posons $P_+(\xi,\zeta) = \prod_{j=o}^{\mu-1} (\xi-\xi_j^+(\zeta))$ et désignons par B_j' le reste de la division du polynôme en ξ B_j par le polynôme P_+, les polynômes B_j' sont de degré $\leqslant \mu-1$ et on pose :

$$B_j'(\xi,\zeta) = \sum_{k=o}^{\mu-1} B_{j,k}'(\zeta)\xi^k$$

et la matrice carrée $B'(\zeta)$ des $B_{j,k}'(\zeta)$ $\begin{array}{l} j=0,\dots,\mu-1 \\ k=0,\dots,\mu-1 \end{array}$

est appelée matrice de Lopatinski et son déterminant $R(\zeta)$ est le déterminant de Lopatinski associé au système de polynômes en ξ $\{P_+, B_j\}$; enfin, notons $A(\zeta) = (A_{j,k}(\zeta))$ l'inverse de la matrice de Lopatinski quand $R(\zeta) \neq 0$.

Pour le problème (*) dans les espaces de fonctions C^∞ on utilisera la condition suivante :

(L) Il existe un cône ouvert connexe $\tilde{\Gamma}_o$ avec $N_o \in \tilde{\Gamma}_o \subset \Gamma_o$ et tel que pour tout cône "fermé" épointé $K \subset \tilde{\Gamma}_o$ il existe $C > 0$ et $\theta \geqslant 0$ satisfaisant

$$|A_{j,k}(\zeta)| \leqslant \frac{C}{\gamma^\theta} \quad \text{pour } \zeta \in \mathbb{R}^n - i\,K \text{ et } |\zeta| = 1 .$$

On peut alors énoncer le :

THEOREME 1. - On se place sous les hypothèses (A) et (B). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'étant donnés $f \in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, $g_j \in C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ il existe $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ unique solution de (*) est que la condition (L) soit satisfaite.

Avant d'énoncer le résultat relatif aux espaces de Sobolev rappelons la définition des espaces suivants (cf. [31]).

Pour $s,r \in \mathbb{R}$ et $\gamma>0$ désignons par $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace des $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tels que $e^{-\gamma t}\, u \in H_{s,r}(\mathbb{R}^{n+1})$ avec la norme
$||u||^2_{s,r;\gamma} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2+\xi^2)^s\,(\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2)^r\,|\widehat{e^{-\gamma t}u}(\zeta,\eta,\sigma)|^2\, d\xi\, d\eta\, d\sigma$, on définit de même $H_{s;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ avec sa norme notée
$<v>^2_{s;\gamma} = \int (\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2)^s |\widehat{e^{-\gamma t}\, u}(\eta,\sigma)|^2\, d\eta\, d\sigma$, enfin $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ est l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+^{n+1}$ des éléments de $H_{s,r;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ la norme quotient correspondante est notée $|u|_{s,r;\gamma}$. Lorsque $r=0$, on posera $H_{s,r;\gamma} = H_{s;\gamma}$ et $|u|_{s,r;\gamma} = |u|_{s,\gamma}$.

On remplace la condition (A) par la condition plus forte

(A') l'opérateur P est strictement hyperbolique par rapport à N_o et l'hyperplan $x=0$ n'est pas caractéristique pour P .

Etant donné un réel $\theta \geqslant 0$ on considère la condition

(L_θ) Il existe $C>0$ telle que la matrice $A(\zeta)$ vérifie $|A_{j,k}(\zeta)| \leqslant \frac{C}{\gamma\theta}$ pour $\zeta = (\eta,\sigma - i\gamma)$ avec $\gamma>0$, $(\eta,\sigma) \in \mathbb{R}^n$ et $|\zeta| = 1$.

Remarquons que la condition dite de Lopatinski uniforme [5] n'est autre que (L_θ) pour $\theta=0$; si $\theta>0$ on dit que (L_θ) est une condition de Lopatinski non uniforme.

THEOREME 2. - On se place sous les hypothèses (A') et (B). Soit $\theta \geqslant 0$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'étant donnés $f \in H_{o,\theta;\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ $g_j \in H_{m-1-b_j+\theta;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ il existe $u \in H_{m-1;\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, unique, solution de (*) et satisfaisant à l'inégalité à priori

$$\gamma|u|^2_{m,-1;\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} <(D_x^j\, u)_{/x=0}>^2_{m-1-j;\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma^{2\theta}} \left[\frac{1}{\gamma}\, |f|^2_{o,\theta;\gamma} + \sum_{j=o}^{\mu-1} <g_j>^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right]$$

(avec une constante C indépendante de f, g_j , $\gamma>0$) est que la condition

(L_θ) soit satisfaite ; et dans ces conditions on a de plus que si f et les g_j sont nulles pour $t<0$ alors u l'est aussi.

Notons que dans le cas particulier $\theta=0$ la partie suffisante de ce théorème est contenue dans le travail de Sakamoto [5] et dans certains cas non uniformes il y a des résultats moins précis dans Agemi et Shirota [1].

Donnons un exemple de cas non uniforme en considérant l'équation des ondes mais avec une condition de dérivée oblique au bord.

On considère :

$$P(D_x,D_y,D_t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \text{ ici } \mu = 1 \quad ,$$

$$B(D_x,D_y,D_t) = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}$$ où $(\beta_j \in \mathbb{R})$; alors on démontre que les conditions (A'), (B), (L_θ) sont satisfaites avec $\theta=1$, et la condition (L) est satisfaite en prenant pour $\tilde{\Gamma}_0$ le cône des $N=(N_y,N_t)$ $N_y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $N_t \in \mathbb{R}$ tels que

$$|N_y| < \frac{N_t}{\sqrt{1+\Sigma\beta_j^2}} \quad .$$

On peut donc appliquer le théorème 1 et le théorème 2 avec $\theta=1$.

III. - Méthodes de démonstration.

Le résultat essentiel est le théorème 2, néanmoins, il nous a semblé utile de mentionner au préalable le théorème 1, car dans la démonstration de ce dernier on utilise, de façon un peu formelle, la méthode du projecteur de Calderon (cf. [4]) ce qui prépare le terrain pour la démonstration assez technique du théorème 2.

On se bornera ici à esquisser la méthode de démonstration de la suffisance de la condition (L) pour le théorème 1.

Tout d'abord, on peut supposer dans le problème (*) que f est nulle car on sait bien résoudre le problème de Cauchy pour P. On est donc ramener au

PROBLEME 1. - Etant donnés des $g_j \in C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ trouver $u \in C_+^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ solution de :

$$P\,u = 0$$
$$B_j u = g_j \quad .$$

Supposons que u soit une solution et posons $u^\circ = \begin{cases} u & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$, la formule des sauts s'écrit :

$$P\,u^o = \tilde{P}\,\gamma u$$

avec $\gamma u = (\gamma_o u, \dots, \gamma_{m-1} u)$ $\gamma_{ju} = D^j u/_{x=0}$ $P = \Sigma\, P_j(D_z)\, D_x^j$ et

$\tilde{P}\,\gamma u = \frac{1}{i} \sum\limits_{j+r+1 \leqslant m} P_{j+r+1}(D_z)\, \gamma_j u \otimes D_x^r\, \delta$ (cf. [3]). On désigne par E la solution élémentaire de P à support dans le cône d'ordre Γ^* , il vient

$$(1) \qquad u^o = E * \tilde{P}\gamma u\ ,$$

et en prenant les m-traces γ

$$\gamma u = E * \tilde{P}\gamma u\ .$$

On démontre alors la :

PROPOSITION. - <u>L'application</u> $v = (v_o, \dots, v_{m-1}) \to \gamma(E * \tilde{P}\, v)$ <u>envoie</u> $[C_+^\infty(\mathbb{R}^n)]^m$ <u>dans lui-même. Cette application sera notée</u> $Q = (Q_{j,k})$ <u>et est appelée projecteur de Calderon</u>.

La dernière égalité devient :

$$(2) \qquad \gamma u = Q\gamma u\ .$$

D'autre part, si $C^+(\zeta)$ est un contour qui entoure les racines $\xi_j^+(\zeta)$ dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ alors on montre que pour $\gamma > 0$ $x \geqslant 0$, l'égalité (1) s'écrit :

$$\hat{u}(x,\zeta) = \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\ \Sigma\, P_{j+r+1}(\zeta)\, \xi^r \gamma_{ju}\ (\zeta)}{P(\xi,\zeta)}\ \frac{d\zeta}{2i\pi}$$

d'où l'on déduit :

$$(3) \qquad P^+\,(D_x\ ,\ \zeta)\ \hat{u}(x,\zeta) = 0 \qquad \text{pour} \quad x > 0$$

et par conséquent,

$$B_j(D_x,\ \xi)\ \hat{u}(x,\zeta) = B'_j(D_x,\ \zeta)\ \hat{u}(x,\zeta) \qquad x \geqslant 0$$

et en prenant les traces pour $x = 0$, il vient le système :

$$(4) \qquad \sum_{k=o}^{\mu-1} B'_{j,k}(\zeta)\ \gamma_k\ \hat{u}\ (\zeta) = g_j(\zeta) \quad j = o, \dots, \mu = 1\ ;$$

on déduit de même de (3) que γu vérifie :

$$(5) \qquad \gamma_{\mu+k} u\ (\zeta) = - \sum_{j=o}^{\mu-1} P_j^+\ (\zeta)\ \gamma_{j+k}\mu \qquad k \geqslant 0$$

où l'on a posé $P^+(D_x,\ \zeta) = \sum\limits_{j=o}^{\mu} P_j^+(\zeta)\ D_x^j$.

Enfin, de (4) et (5), on déduit que $(\gamma_k u)_{k=o,\dots,\ m-1}$ est solution du :

PROBLEME 2.

$$(4') \qquad \sum_{k=o}^{\mu-1} B'_{j,k} * \gamma_k u = g_j \quad ,$$

$$(5') \qquad \gamma_{\mu+k}\, u = - \sum_{j=o}^{\mu-1} P_j^+ * \gamma_{j+k} u \qquad k=o,\dots, m-\mu \quad .$$

Et on démontre que réciproquement, si γu est solution du problème 2, alors u défini par (1) est solution du problème 1. Tout revient donc à l'étude du système d'équation de convolution (4') ; or l'hypothèse (L) implique que $A(\zeta) = B'(\zeta)^{-1}$ est la transformée de Laplace d'une distribution A à support dans un cône de $\mathbb{R}^n_+$, on a donc existence et unicité de la solution de (4') et cette solution est donnée par :

$$\gamma_k u = \sum_{j=o}^{\mu-1} A_{k,j} * g_j \qquad k=o,\dots, \mu-1 \quad ,$$

et de (5') on déduit $\gamma_k u$ $k=\mu,\dots, m-1$. Ce qui résoud par conséquent le problème 1.

On ne peut donner ici une idée de la démonstration du théorème 2 car cela nécessiterait de trop longs développements.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGEMI (R.) et SHIROTA (T.). - On necessary and sufficient conditions for L^2-well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations. Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Vol. 21, N° 2 (1970).

[2] CHAZARAIN (J.) et PIRIOU (A.). - Problèmes mixtes hyperboliques. Note C.R.A.S. t. 272, p. 868 (1971).

[3] HÖRMANDER (L.). - Linear partial differential operators. Springer(1963) .

[4] HÖRMANDER (L.). - Non-elliptic boundary problems. Ann. of Math. N° 83 (1966), p. 129.

[5] SAKAMOTO (R.). - Mixed problems for hyperbolic equations I et II. J. Math., Kyoto Univ.,10-3 et 10-4 (1970).

Université de Nice
Département de Mathématiques
Parc Valrose - 06 NICE (France)