MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Sur la notion de trace - application aux problèmes elliptiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 47-49

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__47_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France.
Mémoire 31-32, 1972, p. 47-49.

SUR LA NOTION DE TRACE - APPLICATION AUX PROBLÈMES ELLIPTIQUES

par

Louis BOUTET DE MONVEL

Cette conférence reprend certains points du travail présenté en collaboration avec G. Geymonat au congrès sur les équations hypoelliptiques (Rome, Janvier 1971). Le but est d'utiliser une généralisation de la notion de trace d'une fonction sur une sous-variété (due à S. Lojaciewicz [7]) pour donner un sens, et éventuellement, résoudre un problème aux limites :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A\, f = g & \text{dans } X \\ B_j\, f = U_j & \text{dans } \partial X \qquad (j = 1,\dots,\mu) \end{cases}$$

dans des cas où les seconds membres sont trop irréguliers pour que les traces $B_j\, f /\partial X$ soient définies à priori (X est une variété à bord C^∞ , de bord ∂X) par exemple, le demi espace $x_n > 0$ de R^n ; A est un opérateur différentiel, elliptique dans les exemples que nous avons en vue ; $B_j (j = 1,\dots, \mu)$ sont des opérateurs différentiels définis près du bord ∂X , ou plus généralement des opérateurs trace au sens de (3)).

La définition de S. Lojaciewicz est la suivante :

DEFINITION 1. - <u>Soit</u> k <u>un entier</u> (<u>positif ou négatif</u>). <u>On dit qu'une distribution</u> $f \in \mathcal{D}'(R^n_+)$ (<u>définie sur le demi espace ouvert</u> $x_n > 0$) <u>est nulle à l'ordre</u> k <u>au bord</u> $x_n = 0$ <u>si</u> $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^R f(x' , x_n/ \lambda) = 0$ (<u>on a noté</u> $x = (x', x_n)$ <u>où</u> $x' = x_1 ,\dots, x_{n-1}$ <u>est la composante tangentielle</u>).

On note alors E_k l'espace des distributions $f \in \mathcal{D}'(R^n_+)$ qui se décomposent sous la forme :

$$\text{(1)} \qquad f = \sum_0^k f_j(x')\ x_n^j / j! \ + \ R_k(x)$$

où f_j est une distribution de la variable x' seule, que nous appellerons <u>trace de la j-ième dérivée normale de</u> f , et R_k est nulle à l'ordre k au bord. (Pour $k<0$, on conserve cette définition ; la première somme est nulle par convention, et f est donc réduite au reste R_k) .

Une telle distribution est prolongeable à R^n tout entier (i.e. est la restriction au demi espace d'une distribution $f \in \mathcal{D}'(R^n)$). On constate que la définition 1 (ainsi que la définition des E_k) ne dépend pas du choix des coordonnées (pourvu qu'on ait $x_n = 0$ sur le bord) ; ceci permet de définir l'espace $E_k(X)$ quand X est une variété à bord. On a les résultats suivants, très faciles :

(2) si $f \in E_k$, alors $x_n f \in E_{k+1}$

(3) $f \in E_k$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial X_n} \in E_{k-1}$

PROPOSITION 1. - Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial X})$ un opérateur différentiel d'ordre m sur X . Supposons que le bord ∂X est non caractéristique. Alors si $f \in \mathcal{D}'(X)$ est une distribution prolongeable, on a $f \in E_k$ si et seulement si $Pf \in E_{k-m}$.

Preuve : On peut supposer que X est le demi espace R^n_+ . Le résultat est immédiat par récurrence sur k , grâce à (3) et au fait que si $Q(x, \frac{\partial}{\partial X})$ est d'ordre $m-1$ par rapport à x_n , on a $Qf \in E_{k-m+1}$ si $f \in E_k$. Le point de départ est le fait que $f \in E_k$ pour k assez petit si elle est prolongeable .

Revenons maintenant au problème aux limites (I) : supposons que P est d'ordre m , B_j d'ordre m_j , et posons $m^+ = \sup m_j$. Si $g \in E_{m-m^+}$ toute solution prolongeable de $Af = g$ est dans E_{m^+} . Si on se borne à la recherche des solutions prolongeables, on voit donc que le problème a un sens (i.e. les $B_j f / \partial X$ sont bien définis).

Exemple : L'inégalité de Hölder montre que pour $1 \leqslant p < \infty$, la fonction $x_n^{1/p} f$ est dans E_0 si $f \in L^p$. Il en est alors de même pour la distribution $\Sigma(\frac{\partial}{\partial X_n})^k \; x_n^{k+1/p} \; f_k$ ($f_k \in L^p$, $k = 0, 1, \ldots, N$) d'après (2) , (3) (cf. aussi [5], [6], où cet exemple est traité par une méthode de dualité).

Il est alors intéressant d'avoir des méthodes pour exhiber une solution de (I), ou pour contrôler la régularité de la solution en fonction de celle des données, ou inversement. Pour cela, on a le résultat suivant : si le problème (I) est elliptique, l'opérateur inverse (ou à défaut la parametrix) se prolonge continûment : $E_{m^+-m}(X) \oplus \mathcal{D}'(\partial X)^{\mu} \to E_m(X)$.

Comme on dispose de bonnes descriptions de la parametrix (cf. [3]), ceci est la source de beaucoup de résultats du genre évoqué plus haut (cf. [4]).

L'hypothèse que f est une distribution prolongeable est en grande partie superflue. Par exemple, si le bord ∂X est compact, A à coefficients analytiques, on prouve (cf. [6]) que toute solution f de l'équation $Af = 0$ a des traces sectionnelles qui sont des fonctionnelles analytiques sur ∂X (i.e. si on identifie X à $\partial X \times [0, 1]$ près de ∂X, $(\frac{\partial}{\partial t})^k f(x,t)$ a une limite quand $t \to +0$, dans $\mathcal{H}'(\partial X)$, pour tout k). En outre, pour une telle f, la trace au sens de Lojaciewicz, si elle existe, coïncide évidemment avec la trace sectionnelle ci-dessus ; et le problème (I) a encore un sens si $g \in E_{m^+-m}$, sans aucune hypothèse restrictive sur f. (La parametrix, si elle est bien choisie, continue à opérer dans ce cadre).

Par contre, l'hypothèse que g est une distribution prolongeable semble plus dure à éliminer. On trouvera dans [6] des exemples où g est une hyperdistribution d'une classe non quasi-analytique. Il est vraisemblable que l'étude de la parametrix donne encore de bons résultats dans ce cas. Mais nous n'avons pas pour le moment de méthode qui permette l'étude du cas le plus général tout en préservant la symétrie entre l'espace où varie le premier membre f et celui où varie le second membre g.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI (M. S.) et GEYMONAT (G.). - Résultats de dualité dans les problèmes aux limites elliptiques. A paraître dans J. Diff. Equations, et C. R. Acad. Sc. Paris 270 (1970), 370-373.

[2] BAOUENDI (M. S.) et GEYMONAT (G.). - Conférence au congrès sur les équations hypoelliptiques. C. I. M. Rome 1971. A paraître dans les annales du congrès Symposia Math.).

[3] BOUTET DE MONVEL (L.). - Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. 126 (1971), 11-51.

[4] BOUTET DE MONVEL (L.) et GEYMONAT (G.). - Solutions irrégulières d'un problème aux limites elliptiques. Congrès sur les équations hypoelliptiques. C. I. M. Rome 1971, à paraître dans les annales du congrès, Symposia Math.).

[5] LIONS (J. L.) et MAGENES (E.). - Remarques sur les problèmes aux limites elliptiques. C. R. Ac. Nat. dei Lincei, Ser. VIII, XXXII, 6 (Juin 1962), p. 873-883.

[6] LIONS (J. L.) et MAGENES (E.). - Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. III, Dunod, Paris.

[7] LOJACIEWICZ (S.). - Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point. Studia Math. 16 (1957), p. 1-36.

Université de PARIS VII, 2 Place Jussieu - PARIS 5ème (France)