MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LUC TARTAR

Interpolation non linéaire

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 375-380
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__375_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 375-380.

INTERPOLATION NON LINEAIRE

par

Luc TARTAR

INTRODUCTION.

On s'intéresse ici à certaines généralisations de l'interpolation linéaire à diverses situations non linéaires.

Un premier type d'interpolation non linéaire consiste à considérer des applications lipschitziennes entre espaces de Banach. On peut aussi introduire des applications holdériennes. Browder [1], Lions [1], Lorentz-Shimogaki [1],[2], Peetre [1], Shimogaki [1], Tartar [1].

Un deuxième type consiste à considérer des espaces non vectoriels : espaces métriques en général. Justarsson [1], Peetre [1], Peetre-Sparr [1], Tartar [2].

Certains théorèmes du premier type peuvent être obtenus avec des espaces d'interpolation très généraux mais on ne sait obtenir les autres qu'en utilisant les méthodes d'interpolation réelles : méthode des traces de J.L. LIONS ou méthode de J. PEETRE.

La méthode K peut être généralisée au cas des espaces métriques ; la méthode des traces demande des structures plus fines. Dans la situation envisagée ci-dessous les deux méthodes peuvent être utilisées. Comme dans le cas linéaire elles conduisent aux mêmes espaces. En utilisant la méthode des traces on arrive à caractériser certains de ces espaces.

RAPPELS D'INTERPOLATION LINEAIRE.

Soient A_o et A_1 deux espaces de Banach plongés dans un espace localement convexe $\mathcal{a}$.

1. Méthode K , Peetre [2].

Pour $t > o$ on définit sur $A_o + A_1$ la norme suivante

$$K(t,a) = \operatorname*{Inf.}_{a=a_o+a_1} \left(\| a_o \|_{A_o} + t \| a_1 \|_{A_1} \right)$$

Il est facile de voir que $t \to K(t,a)$ est une fonction croissante concave.

Définition 1 . Pour $o < \theta < 1$; $1 \leq p \leq +\infty$ on note $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ l'espace des a tels que $\int_o^\infty (t^{-\theta} K(t,a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$.

Nous aurons besoin d'une variante de cette méthode, introduite aussi par Peetre, qui est la suivante

2. Méthode L . Peetre [3].

Pour $o < p_o, p_1 < +\infty$ et $t > o$ on définit sur $A_o + A_1$ la quantité suivante : $$Lp_o, p_1(t, a) = \operatorname*{Inf.}_{a=a_o+a_1} \left(\| a_o \|^{p_o}_{A_o} + t \, \| a_1 \|^{p_1}_{A_1} \right)$$

Définition 2 . Pour $o < \theta < 1$, $o < p \leqslant +\infty$ on note $(A_o, A_1)_{\theta, p\,;\,L}$ l'espace des a tels que $\int_o^\infty (t^{-\theta} Lp_o, p_1(t,a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$.

3. Méthode des traces. Lions [2].

Pour $\alpha_o, \alpha_1, p_o, p_1$ vérifiant les conditions $1 \leqslant p_o, p_1 \leqslant +\infty$; $\alpha_o + \frac{1}{p_o} > o$; $\alpha_1 + \frac{1}{p_1} < 1$ on définit l'espace suivant :

$$W(A_o, A_1) = \{ u \in L^1_{loc}(\theta , \infty ; A_o + A_1) \mid t^{\alpha_o} u \in L^{p_o}(o, \infty, A_o)$$
$$t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \in L^1(o, \infty, A_1) \}$$

$W(A_o, A_1) \subset C^o([o, \infty[, A_o + A_1)$ et donc on peut donner la

Définition 3 . $T(\alpha_o, p_o, \alpha_1, p_1 ; A_o, A_1) = \{ u(o) \mid u \in W(A_o, A_1) \}$

Le lieu entre ces 3 méthodes est donné par le résultat suivant. Peetre [3], [4]

Proposition 1. a) $(A_o, A_1)_{\theta, p\,;\,L} = (A_o, A_1)_{\tilde\theta, \tilde p}$ où

$$\frac{1-\tilde\theta}{\tilde\theta} = \frac{1-\theta}{\theta} \, \frac{p_o}{p_1} \quad ; \quad \tilde p = ((1-\theta)\, p_o + \theta\, p_1)\; p.$$

b) $T(\alpha_o, p_o, \alpha_1, p_1 ; A_o, A_1) = A_o, A_1)_{\theta, p}$ où

$$\theta = \frac{\alpha_o + \frac{1}{p_o}}{\alpha_o + \frac{1}{p_o} + 1 - \alpha_1 - \frac{1}{p_1}} \quad ; \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$$

EXEMPLES.

1 . $A_o = L^1(\Omega)$; $A_1 = L^\infty(\Omega)$.

On définit $(A_o, A_1)_{1-\frac{1}{p}, q} = L^{p,q}(\Omega)$ espaces de Lorentz et $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

2 . $A_o = L^{p_o,q_o}(\Omega)$; $A_1 = L^{p_1,q_1}(\Omega)$ $p_o \neq p_1$ alors

$$(A_o, A_1)_{\theta, q} = L^{p,q}(\Omega) \text{ où } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$$

3. $A_o = W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ , \ i=1 \dots n \} \ \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$A_1 = L^p(\Omega) \qquad 1 \leqslant p \leqslant +\infty$

On définit $(A_o, A_1)_{\theta, q} = B_q^{1-\theta,p}(\Omega)$ espaces de Besov

On a $B_p^{s,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+s\,p}} \, dx\, dy < +\infty \}$

pour $o < s < 1$; $1 \leqslant p < +\infty$

Si $p = 2$ on note $B_2^{s,2} = H^s(\Omega)$ espace de restriction à Ω des fonctions de $H^s(\mathbb{R}^n) = \{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^s)\, \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$ où $\hat{u}$ désigne la transformée de Foùrier.

INTERPOLATION NON LINEAIRE : 1^{er} type.

Supposons pour simplifier $A_o \subset A_1$ et $B_o \subset B_1$.

Théorème 1 : Peetre [1], Tartar [3].

Soit T une application de A_1 dans B_1, qui applique A_o dans B_o et qui vérifie :

$$\|T a - T b\|_{B_1} \leqslant c \, \|a - b\|_{A_1}^{\alpha} \qquad o < \alpha \leqslant 1 . \qquad \forall a, b \in A_1$$

$$\|T a - T b\|_{B_o} \leqslant c \, \|a - b\|_{A_o}^{\beta} \qquad o < \beta \leqslant 1 . \qquad \forall a, b \in A_o$$

alors si $o < \theta < 1$; $1 \leqslant p < +\infty$ T applique $(A_o, A_1)_{\theta, p} = X$ dans

$Y = (B_o, B_1)_{\eta,q}$ où $\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{\alpha}{\beta}$ et $q = \max\left(1, \frac{p}{(1-\eta)\beta + \eta\,\alpha}\right)$

et on a $\|T a - T b\|_Y \leqslant c \, \|a - b\|_X^{(1-\eta)\beta + \eta\,\alpha} \quad \forall a, b \in X .$

Plusieurs généralisations sont possibles. Pour les applications il est utile de supprimer l'hypothèse : T holdérienne de A_o dans B_o pour la remplacer par T bornée au sens $\|T a\|_{B_o} \leqslant c \, \|a\|_{A_o}^{\beta}$. $\forall a \in A_o$.

En particulier on peut montrer : Tartar [3]

Théorème 2 : On suppose que

$$\|T a - T b\|_{B_1} \leqslant f(\|a\|_{A_1}, \|b\|_{A_1}) \, \|a - b\|_{A_1}^{\alpha} \qquad \forall a, b \in A_1 \qquad o < \alpha \leqslant 1$$

$$\|T a\|_{B_o} \leqslant g(\|a\|_{A_1}) \, \|a\|_{A_o}^{\beta} \qquad \forall a \in A_o . \quad o < \beta .$$

où f et g sont des fonctions continues sur $\overline{R_+}^2$ et $\overline{R_+}$.

Alors T applique $X = (A_o, A_1)_{\theta, p}$ dans $Y = (B_o, B_1)_{\eta, q}$ avec η et q comme au théorème 1. De plus on a

$\|T\ a\|_y \leqslant h\ (\|a\|_{A_1})\ \|a\|_X^{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}$ où la fonction h vaut

$h(t) = c\ \ g(2t)^{1-\eta}\ \ f(t,2t)^{\eta}$.

INTERPOLATION NON LINEAIRE : 2ème type.

On peut développer une théorie générale pour les espaces métriques : Gustarsson [1]. On considère ici une définition un peu différente et dans un cas assez particulier où les 3 méthodes linéaires introduites plus haut peuvent être généralisées.

Soit $\lambda > -1$; $1 \leqslant q_o$, $q_1 \leqslant +\infty$. $o \leqslant s_o \leqslant 1$

$A_o = \{u\ :\ |u|^{\lambda} u \in B_{q_o}^{s_o,q_o}(\Omega)\}$ muni de la distance

$d(u,v) = \|\ |u|^{\lambda}\ u - |v|^{\lambda}\ v\|_{B_{q_o}^{s_o,q_o}(\Omega)}$

$A_1 = L^{q_1}(\Omega)$.

Remarquons que A_o et A_1 sont plongés dans $L^1 + L^{\infty}$.

1 pour $t > o$ et $a \in A_o + A_1$ on définit

$$K\ (t,a) = \operatorname*{Inf.}_{a=a_o+a_1}\ (\|\ |a_o|^{\lambda}\ a_o\|_{B_{q_o}^{s_o,q_o}} + t\ \|a_1\|_{L^{q_1}}$$

Définition 1 bis . Pour $o < \theta < 1$; $o < p \leqslant +\infty$ on note $(A_o, A_1)_{\theta, p}$

l'ensemble des a : $\int_o^{\infty} (t^{-\theta}\ K(t,a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$.

2 pour $t > o$; $o < p_o, p_1 < +\infty$ et $a \in A_o + A_1$ on définit

$$L_{p_o,\ p_1}(t,a) = \operatorname*{Inf.}_{a=a_o+a_1}\ (\|\ |a_o|^{\lambda}\ a_o\|^{p_o}_{B_{q_o}^{s_o,q_o}} + t\ \|a_1\|^{q_1}_{L^{q_1}})$$

Définition 2 bis . Pour $o < \theta < 1$; $o < p \leqslant +\infty$ on note $(A_o, A_1)_{\theta,\ p\ ;\ L}$

l'ensemble des a : $\int_o^{\infty} (t^{-\theta}\ L_{p_o,\ p_1}(t,a))^p \frac{dt}{t} < +\infty$.

3 pour α_o, p_o, α_1 p_1 vérifiant $1 \leqslant p_o, p_1 \leqslant +\infty$; $\alpha_o + \frac{1}{p_o} \quad o$; $\alpha_1 + \frac{1}{p_1} < 1$

on définit $W(A_o, A_1) = \{ u : [o,\infty[\to A_o + A_1 : t^{\alpha_o} |u|^{\lambda} u \in L^{p_o}(o,\infty ; B_{q_o}^{s_o,q_o})$

$$t^{\alpha_1} \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(o,\infty ; L^{p_1}) \}$$

Définition 3 bis : $T(\alpha_o, p_o, \alpha_1, p_1, A_o, A_1) = \{ u(o) \; ; \; u \in W(A_o, A_1) \}$.

Proposition 1 bis : identique à la proposition 1.

Ces espaces introduits ont la propriété d'interpolation suivante (dont la démonstration est identique à celle du théorème 2).

On suppose $A_o \subset A_1$ (on utilisera pour montrer cela le théorème de Sobolev fractionnaire Peetre [5]).

On suppose $B_o \subset B_1$ où B_o et B_1 sont soit un couple d'espaces de Banach soit un couple ayant des propriétés analogues à A_o, A_1 c'est à dire

$$B_o = \{ a : \quad |a|^{\mu} \, a \in B_{r_o}^{t_o,r_o} \} \qquad B_1 = L^{r_1}$$

Soit T une application de A_1 dans B_1 et de A_o dans B_o vérifiant

$$\| T a - T b \|_{B_1} \leqslant f(\| a \|_{A_1}, \| b \|_{A_1}) \; \| a - b \|_{A_1}^{\alpha}$$

$$||| T a |||_{B_o} \leqslant g(\| a \|_{A_1}) \; ||| a |||_{A_o}^{\beta}$$

où $||| a |||_{A_o} = \| \, |a|^{\lambda} a \, \|_{B_{q_o}^{s_o,q_o}}$ et la définition analogue pour $||| T a |||_{B_o}$

si B_o est un espace analogue.

Théorème 2 bis : Sous les hypothèses ci-dessus T envoie $(A_o, A_1)_{\theta, p}$ dans $(B_o, B_1)_{\eta, q}$ où $\;$, q sont définis au théorème 1.

Remarquons pour finir que l'on sait caractériser certains des espaces obtenus. Plus précisément on a le

Théorème 3 : Soit $A_o = \{ a \, | \, . \, |a|^{\lambda} \, a \in B_{q_o}^{s_o,q_o} \}$ $A_1 = L^{q_1}$. Pour $o < \theta < 1$

On définit q_θ par $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_o} + \frac{\theta}{q_1}$. Alors on a

$$(A_o, A_1)_{\theta, q_o} = \{ a \, | \, . \quad |a|^{\lambda(1-\theta)} \, a \in (B_{q_o}^{s_o,q_o}, L^{q_1})_{\theta, q_\theta} \}$$

Notons que si $S_o < 1$. cet espace est $B_{q_\theta}^{s_o(1-\theta),q_\theta}$

On trouvera dans Tartar [3] d'autres généralisations et quelques applications.

BIBLIOGRAPHIE

BROWDER (F.E.) [1] Remarks on Nonlinear Interpolation in Banach Spaces. Journal of Functional Analysis 4, 390-403 (1969).

GUSTARSSON (J.) [1] Interpolation of Metric Spaces. University of Lund 1971

LIONS (J.L.) [1] Some Remarks on Variational Inequalities. Proceedings of International Conference on Functional Analysis. Tokyo. April 1969.

[2] Théorèmes de Traces et d'Interpolation. I - V. Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa (3) 13, 389-403 (1959) ; ibidem 14, 317-331 (1960) ; J Maths Pures Appl. (9) 42, 195-203 (1963) ; Math. Ann. 151, 42-56 (1963) ; An. Acad. Brasil. Ci (1963).

LORENTY.(G.G.), SHIMOGAKI (T.) [1] Majorants for Interpolation Theorems. Publ. Ramanujan Inst. n° 1 (1968/69) 115-122.

[2] Interpolation theorems for Operators in Function Spaces. Journal of Functional Alalysis 2. 31-51 (1968).

PEETRE (J.) [1] Interpolation of Lipschitz Operators and Metric Spaces. Mathematica Cluj. 12 (1970) 325-334.

[2] A theory of Interpolation of Norme d Spaces. Lectures Notes Brasilia (1963) (Notas de Matematica n° 39. 1968).

[3] A New Approach in Interpolation Spaces. Studia Matematica T. XXXIV (1970) 23-42.

[4] Sur le Nombre de Paramètres dans la Définition de Certains Espaces d'Interpolation. Ricerche. Mat. 12 (1963) 248-261.

[5] Espaces d'Interpolation et Théorème de Sobolev. Ann. Inst. Fourier 16 (1966) 279-317.

PEETRE (J.) SPARR (G.) [1] Interpolation of Normed Abelian Groups. A paraître dans Ann. Math. Pures. Appl.

SHIMOGAKI (T.) [1] An Interpolation Theorem on Banach Function Spaces. Studia Mathematica T. XXXI (1968) 233-240.

TATAR (L.) [1] Théorèmes d'Interpolation Non Linéaire et Application. C.R.A.S. t 270 (1970) 1729-1731.

[2] Théorèmes de Traces Non Linéaires et Applications. C.R.A.S. t 271 (1970) 789-791.

[3] Thèse PARIS. avril 1971.

11, rue Servandoni
PARIS 6ème (France)