MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN SCHMETS

Espaces $C(X)$ tonnelé, infra-tonnelé et σ-tonnelé

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 351-355

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__351_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 351-355.

ESPACES $C(X)$ TONNELÉ, INFRA-TONNELÉ ET σ-TONNELÉ

par

Jean SCHMETS

1. Soit X un espace topologique complètement régulier et séparé et soit $C(X)$ l'espace des fonctions continues dans X, muni de la topologie "compact-ouvert", c'est-à-dire du système des semi-normes p_K [2] où K parcourt l'ensemble des compacts de X, p_K étant défini par :

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \ , \ \forall f \in C(X) \ .$$

Nous désignons par $C^*(X)$ [resp. $C_s^*(X)$] le dual de $C(X)$ {resp. le dual de $C(X)$ muni de la topologie $\sigma[C^*(X) \ , \ C(X)]$} .

Nous notons τ les éléments de $C^*(X)$. En particulier, pour tout $x \in X$, la loi τ_x définie dans $C(X)$ par :

$$\tau_x(f) = f(x) \ , \ \forall f \in C(X) \ ,$$

appartient à $C^*(X)$.

On sait que tout $\tau \in C^*(X)$ admet un support compact, que nous allons noter $[\tau]$, tel que $[c\tau] = [\tau]$ pour tout nombre complexe $c \neq 0$ et pour lequel il existe $C>0$ tel que :

$$|\tau(f)| \leq C \sup_{x \in [\tau]} |f(x)| \ , \ \forall f \in C(X) \ .$$

De plus, si $F \subset X$ est fermé et tel que $\tau(f) = 0$ pour tout $f \in C(X)$ nul sur F, on a $[\tau] \subset F$.

Si $\mathfrak{B}$ est un sous-ensemble de $C^*(X)$, posons :

$$[\mathfrak{B}] = \overline{\bigcup_{\tau \in \mathfrak{B}} [\tau]} \ .$$

LEMME 1. - _Si_ $\mathfrak{B} \subset C^*(X)$ _est équicontinu_, $[\mathfrak{B}]$ _est compact dans_ X.

LEMME 2. - _Si_ $\mathfrak{B}$ _est borné dans_ $C_s^*(X)$, _tout_ $f \in C(X)$ _est borné sur_ $[\mathfrak{B}]$.

LEMME 3. - _Si_ $\mathfrak{B}$ _est borné dans_ $C_s^*(X)$ _et si_ $[\mathfrak{B}]$ _est compact dans_ X, $\mathfrak{B}$ _est équicontinu._

Pour le premier lemme, on note que si $\mathfrak{B}$ est équicontinu, il existe un compact $K \subset X$ et une constante $C>0$ tels que :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{B}} |\tau(f)| \leqslant C p_K(f) \ , \ \forall f \in C(X) \ .$$

Dès lors, on a $[\tau] \subset K$ pour tout $\tau \in \mathcal{B}$ et $[\mathcal{B}]$ est un sous-ensemble fermé de K.

Le lemme 2 est établi dans [5] (cf. Lemme 2, p. 294).

Le lemme 3 résulte quant à lui de la première partie de la démonstration du théorème 1 dans [4].

2. Suivant [3], $C(X)$ est :

- <u>infra-tonnelé</u> si toute union dénombrable d'ensembles équicontinus, bornée dans $C_s^*(X)$ est équicontinue. L'espace $C(X)$ est donc infra-tonnelé si et seulement si tout tonneau qui est intersection dénombrable de voisinages de 0, fermés et absolument convexes, est un voisinage de 0.

- <u>σ-tonnelé</u> si tout ensemble dénombrable et borné dans $C_s^*(X)$ est équicontinu.

THEOREME 1. - <u>L'espace</u> $C(X)$ <u>est tonnelé si et seulement si, pour tout fermé non compact</u> $F \subset X$, <u>il existe</u> $f \in C(X)$ <u>non borné sur</u> F.

C'est un des résultats fondamentaux de [4] et [5] (cf. théorème 2).

THEOREME 2. - <u>L'espace</u> $C(X)$ <u>est infra-tonnelé si et seulement si, pour toute union dénombrable de compacts dans</u> X, <u>dont l'adhérence n'est pas compacte dans</u> X, <u>il existe</u> $f \in C(X)$ <u>non borné sur cette union</u>.

La condition est nécessaire. Soient $K_m (m \in \mathbb{N})$ des compacts dont l'adhérence de l'union ne soit pas compacte dans X. Les ensembles

$$\mathcal{K}_m = \{\tau_x : x \in K_m\}$$

sont évidemment équicontinus et on a :

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m} = [\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m] \ .$$

De là, par le lemme 1, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m$ n'est pas équicontinu, donc n'est pas borné dans $C_s^*(X)$. D'où la conclusion.

La condition est suffisante. Soient $\mathcal{B}_m \subset C^*(X)$ $(m \in \mathbb{N})$ des ensembles équicontinus, dont l'union est bornée dans $C_s^*(X)$. Par le lemme 1, $[\mathcal{B}_m]$ est compact pour tout m. Par le lemme 2, $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_m]$ est tel que tout $f \in C(X)$ y soit borné, donc est compact vu l'hypothèse sur X. On conclut alors par le lemme 3.

THEOREME 3. - <u>L'espace $C(X)$ est σ-tonnelé si et seulement si, pour toute suite $\tau_m \in C^*(X)$ telle que $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$ ne soit pas compact, il existe $f \in C(X)$ non borné sur $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$.</u>

La condition est nécessaire. Soit τ_m une suite de $C^*(X)$ telle que $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$ ne soit pas compact. Pour tout m, il existe un nombre complexe $c_m \neq 0$ tel que :

$$|c_m \tau_m(f)| \leq \sup_{x \in [\tau_m]} |f(x)| , \ \forall f \in C(X) .$$

Vu que $[c_m \tau_m] = [\tau_m]$ pour tout m, on a

$$[\bigcup_{m=1}^{\infty} c_m \tau_m] = [\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m] .$$

De là, si tout $f \in C(X)$ est borné sur $[\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]$, la suite $c_m \tau_m$ est bornée dans $C_s^*(X)$ car on a :

$$\sup_m |c_m \tau_m(f)| \leq \sup_{x \in [\bigcup_{m=1}^{\infty} \tau_m]} |f(x)| < \infty , \ \forall f \in C(X) .$$

Mais alors, comme $C(X)$ est σ-tonnelé, la suite $c_m \tau_m$ est équicontinue et, par le lemme 1, $[\bigcup_{m=1}^{\infty} c_m \tau_m]$ est compact. D'où une contradiction.

La suffisance de la condition s'établit comme dans le théorème 2.

3. Considérons le renforcement "$C(X)$ σ-tonnelé entraîne $C(X)$ infra-tonnelé". Il a lieu si, pour tout compact K, il existe $\tau \in C^*(X)$ tel que $[\tau] = K$.

Ceci pose le problème de savoir quels sont les compacts dans X qui sont support d'une fonctionnelle linéaire continue dans $C(X)$.

Une réponse partielle est donnée par la considération des compacts séparables car si $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le compact K, la fonctionnelle

$$\tau = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \tau_{x_m}$$

est telle que $[\tau] = K$. Comme tout compact métrisable est séparable et que $C(X)$ est séparable par semi-norme si et seulement si tout compact $K \subset X$ est métrisable, on voit que si $C(X)$ est σ-tonnelé et séparable par semi-norme, il est infra-tonnelé. En fait, ceci relève d'une propriété générale.

PROPOSITION 1.- Si un espace vectoriel topologique localement convexe est σ-tonnelé et séparable par semi-norme, il est infra-tonnelé.

Désignons par E l'espace considéré et munissons son dual E^* de la topologie $\sigma(E^*, E)$.

Tout ensemble équicontinu du dual a son adhérence compacte et la topologie y est équivalente à une distance. Tout ensemble équicontinu est donc séparable. De là, toute union dénombrable d'ensembles équicontinus est séparable. D'où la conclusion si l'espace est σ-tonnelé.

4. Le renforcement " $C(X)$ infra-tonnelé entraîne $C(X)$ tonnelé" a lieu si tout fermé dans X est l'adhérence d'une union dénombrable de compacts dans X. C'est notamment le cas si tout fermé est séparable.

Cependant, en ce qui concerne le renforcement " $C(X)$ σ-tonnelé entraîne $C(X)$ tonnelé", signalons le résultat suivant, établi dans [3].

PROPOSITION 2. - Si un espace vectoriel topologique localement convexe est σ-tonnelé et séparable, il est tonnelé.

5. Voici enfin une démonstration très simple d'un exemple assez général d'espaces $C(X)$ tonnelés; on peut aussi recourir aux μ-espaces [1] pour l'établir.

PROPOSITION 3. - S'il existe dans X une métrique plus faible, $C(X)$ est tonnelé.

Soit F un fermé dans X tel que tout $f \in C(X)$ soit borné sur F ; établissons que F est compact.

Désignons par d la métrique plus faible.

Etablissons tout d'abord que si la suite $x_m \in F$ converge pour d vers $x_0 \in X$, alors x_m converge vers x_0 dans X. Procédons par l'absurde : soit $x_m \in F$ une suite convergente pour d vers $x_0 \in X$ et non-convergente dans X ; quitte à considérer une sous-suite, on peut évidemment supposer qu'il existe un voisinage V de x_0 qui ne contient aucun des x_m. Il existe alors $f' \in C(X)$ égal à 1 dans $X \setminus V$ et à 0 dans un voisinage de x_0. Dès lors, la fonction f définie dans X par :

$$f(x) = \begin{cases} f'(x)[d(x,x_0)]^{-1} & \text{si } x \in X \setminus \{x_0\} \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

appartient à $C(X)$ et n'est pas bornée sur F, d'où une contradiction.

Cela étant, F est fermé pour d et d y est équivalent à la topologie induite par X .

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que F est pseudo-compact pour la distance d car toute fonction f continue pour d dans F admet un prolongement $\tilde{f}$ continu pour d à X , donc $\tilde{f}$ appartient à $C(X)$ et $\tilde{f}$ est borné sur F .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUCHWALTER (H.). - Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier, Séminaire Choquet, 9 (1969-1970), 14-01, 14-15.

[2] DE WILDE (M.), GARNIR (H.G.), SCHMETS (J.). - Analyse Fonctionnelle, I, Birkhaüser, Basel, 1968.

[3] DE WILDE (M.), HOUET (C.). - On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces, Math. Ann., 192, (1971), 257-261.

[4] NACHBIN (L.). - Topological vector spaces of continuous functions, Proc. of the Nat. Acad. of Sc., 40, (1954), 471-474.

[5] SHIROTA (T.). - On locally convex vector spaces of continuous functions, Proc. Japan Acad. 30, (1954), 294-298.

[6] WARNER (S.). - The topology of compact convergence on continuous functions spaces, Duke Math. J., 25, 1958, 265-282.

Jean SCHMETS
Université de Liège
Institut de Mathématiques
15 avenue des Tilleuls
B 4000 LIÈGE (Belgique)