CHARLES GOULAOUIC

Approximation polynomiale des fonctions C^∞ et analytiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 187-190
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__187_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 187-190.

APPROXIMATION POLYNOMIALE DES FONCTIONS C^∞ ET ANALYTIQUES.

par

Charles GOULAOUIC

L'approximation des fonctions par des polynômes sur un intervalle de la droite réelle a été abondamment étudiée (cf. [2] [3] [4] et leurs bibliographies). Récemment, des caractérisations des fonctions C^∞ et analytiques par leurs distances aux fonctions propres d'opérateurs elliptiques dégénérés ont été obtenues dans [1], ce qui donne l'approximation polynomiale, par exemple, dans le cas d'une boule de $\mathbb{R}^n$. La caractérisation des fonctions C^∞ par leurs distances aux polynômes, a été obtenue, plus généralement dans [5] sur l'adhérence d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord lipschitzien. Ici, on montre que toute fonction C^∞ (resp. analytique) sur un compact de $\mathbb{R}^n$ est à distance des polynômes dans $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ à décroissance rapide (resp. exponentielle), et que sur des compacts assez réguliers la réciproque est vraie. Enfin, on étudie des classes de fonctions intermédiaires entre les fonctions C^∞ et analytiques, voisines des classes de Gevrey et caractérisées par leurs distances aux polynômes ; ces espaces ont des propriétés d'interpolation et sont décrits dans [1] dans les cas "très réguliers". Les résultats annoncés ici ont été obtenus en collaboration avec M. S. Baouendi et font l'objet d'une rédaction détaillée à paraître aux Annales de l'Institut Fourier (Grenoble).

I - Notations et cas du pavé de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients complexes et de degré $\leqslant k$.

Soient D un sous-ensemble intégrable borné de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et $f \in L^p(D)$. On note :

$$d_{p,D}(f, \mathcal{P}_k) = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \| f-P \|_{L^p(D)} .$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $C^\infty(\Omega)$ (resp. $\mathcal{A}(\Omega)$) l'ensemble des fonctions complexes de classe C^∞ (resp. analytiques) dans Ω.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $C^\infty(K)$ (resp. $\mathcal{A}(K)$) l'ensemble des restrictions à K de fonctions C^∞ (resp. analytiques) définies au voisinage de K.

Rappelons une caractérisation des fonctions C^∞ et analytiques sur un pavé de $\mathbb{R}^n$; ce résultat est essentiellement dû à Bernstein [2] et on peut aussi l'obtenir rapidement comme corollaire de théorèmes sur des opérateurs elliptiques dégénérés.

PROPOSITION 1 : Soient π un pavé ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $f \in L^p(\pi)$.

1) Pour que f soit C^∞ sur $\overline{\pi}$, il faut et il suffit que la suite $k \mapsto d_{p,\pi}(f, \mathcal{P}_k)$ soit dans l'espace $\underline{s}$ des suites à décroissance rapide.

2) Pour que f soit analytique sur $\overline{\pi}$, il faut et il suffit qu'il existe deux constantes $L>0$ et $a \in]0,1[$ telles que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,\pi}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant L\, a^k .$$

II - Cas d'un compact de $\mathbb{R}^n$.

On a d'abord le résultat :

THEOREME 1 : Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et K un compact de $\mathbb{R}^n$.

1) Si $f \in C^\infty(K)$, la suite $k \mapsto d_{p,K}(f, \mathcal{P}_k)$ est dans $\underline{s}$.

2) Si $f \in \mathcal{A}(K)$, il existe $L>0$ et $a \in]0,1[$ telles que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,K}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant L\, a^k .$$

La démonstration du point 1) est immédiate ; pour démontrer le point 2), on procède par étapes :

i) On suppose que K est convexe et on se ramène à l'intersection d'un nombre fini de pavés compacts de $\mathbb{R}^n$.

ii) On suppose que K est une "couronne" (compact compris entre deux sphères concentriques) et on se ramène, par des arguments de symétrie, à l'étape i).

iii) Pour un compact quelconque, on se ramène à l'intersection d'un nombre fini de couronnes.

Les réciproques du théorème 1 ne sont pas vraies pour tout compact de $\mathbb{R}^n$. Mais on a, par exemple :

THEOREME 2 : Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord lipschitzien(*) , $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(\Omega)$; on a :

1) La fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ si et seulement si la suite $k \mapsto d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k)$ est à décroissance rapide.

(*) On fait cette hypothèse pour simplifier les énoncés ; elle peut être remplacée par des hypothèses plus faibles, surtout pour le point 2). On rappelle que, sous cette hypothèse-ci, le point 1) est démontré dans [5] .

2) <u>La fonction</u> $f \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$ <u>si et seulement s'il existe</u> $L>0$ <u>et</u> $a \in]0,1[$ <u>vérifiant pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant L\, a^k .$$

La démonstration repose essentiellement sur des inégalités sur les polynômes du type "inégalités de Markov" et le passage par des ouverts où on sait déjà conclure (par exemple, des pavés).

III - Espaces du type Gevrey et interpolation.

Nous considérons des espaces de fonctions dont la distance aux polynômes décroit "moins vite" que dans le cas analytique.

DEFINITION 1 : <u>Soient</u> s <u>un nombre réel</u> $\geqslant 1$ <u>et</u> K <u>un compact de</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Pour tout</u> p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, <u>on désigne par</u> $\mathcal{A}_{s,p}(K)$ <u>l'espace des fonctions</u> f <u>de</u> $L^p(K)$ <u>vérifiant</u> :

<u>il existe</u> $L>0$ <u>et</u> $a \in]0,1[$ <u>telles que l'on ait pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,K}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant L\, a^{k^{1/s}} .$$

On a alors le résultat :

THEOREME 3 : <u>Soient</u> Ω <u>un ouvert borné de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>à bord lipschitzien et</u> s <u>un nombre réel</u> $\geqslant 1$. <u>Les espaces</u> $\mathcal{A}_{s,p}(\overline{\Omega})$ <u>sont indépendants de</u> p <u>pour</u> $1 \leqslant p \leqslant \infty$. <u>De plus,</u> $\mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega})$ <u>est un espace d'interpolation entre</u> $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ <u>et</u> $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Etant donnée une base de polynômes orthonormale dans $L^2(\Omega)$, le développement de Fourier sur cette base est un isomorphisme des espaces $C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$, $\mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega})$ sur des espaces de suites, pour lesquels on a des résultats d'interpolation ; ce qui entraîne la seconde partie du théorème. La première partie utilise des inégalités du type "inégalités de Sobolev" .

Pour les espaces $\mathcal{A}_{s,p}(\overline{\Omega})$ on a aussi les propriétés suivantes :

Si Ω_1 est un ouvert relativement compact dans Ω , la restriction à Ω_1 de $\mathcal{A}_{s,p}(\overline{\Omega})$ coïncide avec celle de l'espace de Gevrey d'ordre s dans Ω .

Si $\overline{\Omega}$ est une variété à bord analytique, on a $\mathcal{A}_{s,p}(\overline{\Omega}) = \mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$, espace introduit dans [1] et caractérisé par des propriétés de différentiabilité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI (M.S.) et GOULAOUIC (C.). - Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications ; Journal of Functional Analysis (à paraître).

[2] BERNSTEIN (S.). - Oeuvres complètes.

[3] LORENTZ (G.G.). - Approximation of functions ; Elsevier 1965.

[4] TIMAN (A.F.). - Theory of approximation of functions of a real variable ; Pergamon Press (1963).

[5] ZERNER (M.). - Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables ; C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268.

Département de Mathématiques
Université Paris - Sud
91 - ORSAY
(France)