MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GEORGES DUVAUT

Problèmes unilatéraux en élasticité

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 151-158
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__151_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 151-158.

PROBLÈMES UNILATÉRAUX EN ÉLASTICITÉ

par

Georges DUVAUT

I. - Introduction.

Nous donnons ici un résumé des résultats et méthodes mathématiques pour l'étude des problèmes classiques et non classiques d'élasticité linéaire. Nous distinguons trois parties dans cet exposé :

i) Notations et problèmes classiques.

ii) Deux types de problèmes unilatéraux stationnaires (Frottement et Signorini).

iii) Les cas dynamiques correspondants. Un problème mal posé.

Les résultats annoncés dans i) remontent à des travaux de K.O. Friedrichs [4]. L'existence d'une solution au problème de Signorini, exposé au ii), a été obtenue directement par G. Fichera [3] et résulte aussi d'un théorème abstrait de J. L. Lions et G. Stampacchia [6]. Le problème avec conditions de frottement à la frontière et les situations évoquées au iii) ont été étudiés par G. Duvaut et J.L. Lions [1] [2] ; on trouvera également dans cette dernière référence les démonstrations détaillées.

II. - Notations.

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ régulière ($N = 2$ ou 3) ; la normale extérieure unitaire à Γ est $\vec{n}$ de composantes n_i, $i = 1 \dots N$. Les indices i, $j, \dots$ qui interviennent dans la suite prennent toujours les valeurs 1 à N et on utilise la convention de sommation sur les couples d'indices répétés (exemple : $x_i y_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$) .

L'ouvert Ω est l'emplacement occupé par le corps élastique avant déformation ; on cherche, compte-tenu des contraintes imposées, le champ des vecteurs déplacements $u = \{u_i\}$ des points de Ω et le champ des déformations $\{\varepsilon_{ij}(u)\}$ et des contraintes $\{\sigma_{ij}\}$ dans Ω .

On a les équations :

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ (eq. d'équilibre)} .$$

(2) $$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) \,.$$

(3) $$\varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right),$$

les coefficients d'élasticité a_{ijkh} satisfaisant

(4) $$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \;,\quad a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}\, \varepsilon_{ij} \geqslant \alpha\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} \,,$$
(α constante > 0) .

Dans les cas dynamiques, on remplace (1) par :

(1 bis) $$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\, \sigma_{ij} + f_i \,.$$

Dans tous les cas $\{f_i\}$ représente une densité volumique de forces données.

<u>Problèmes classiques</u>.

Ce sont ceux où on se donne les conditions aux limites suivantes sur Γ : $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F$, $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset$,

(5) $u_i = U_i$ sur Γ_U (U_i : déplacements donnés sur Γ_U)

(6) $\sigma_{ij} n_j = F_i$ sur Γ_F (F_i : densité de forces données sur Γ_F) .

On établit alors que : si $u(x)$ est un champ de vecteurs solution du problème (1) → (6) alors $u(x)$ minimise

$$I_1(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx - \int_\Omega f_i v_i dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma$$

parmi les v tels que $v_i = U_i$ sur Γ_U .

Cette propriété formelle permet de poser le problème de façon précise. On introduit :

(7) $$V = (H^1(\Omega))^N$$

(8) $$\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx \\ (f,g) = \int_\Omega f_i g_i dx \end{cases}$$

(9) $$L_1(v) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma$$

et on suppose que les données satisfont

$$(10)\qquad \begin{cases} f_i \in L^2(\Omega)\ ,\ F_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) & (^{*}) \\ U_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (^{*})\ ,\ a_{ijkh} \in L^{\infty}(\Omega)\ . \end{cases}$$

On pose :

$$(11)\qquad \mathcal{U}ad = \{ v \mid v \in V\ ,\ v_{i/\Gamma_U} = U_i \}$$

et on vérifie que $\mathcal{U}ad$ est un ensemble convexe fermé de V (espace linéaire affine).

On peut alors formuler le problème en termes précis :

<u>PROBLEME 1</u> :

<u>Trouver</u> $u \in \mathcal{U}ad$ <u>qui minimise</u> $I_1(v)$ <u>donné par</u> :

$$(12)\qquad I_1(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - L_1(v)$$

<u>sur</u> $\mathcal{U}ad$,

ou bien (énoncé quivalent),

<u>Trouver</u> $u \in \mathcal{U}ad$ <u>tel que</u> :

$$(13)\qquad a(u,\ v-u) \geqslant L_1(v-u)\ ,\ \forall v \in \mathcal{U}ad\ .$$

On résoud de la façon suivante :

α) L'espace V est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\| = \left(\int_\Omega v_i v_i\, dx + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx\right)^{1/2}$$

qui est équivalente à la norme classique sur $(H^1(\Omega))^3$, d'après l'inégalité de Korn (**) .

β) Si Mes $\Gamma_U > 0$, alors $I_1(v)$ est infinie à l'infini sur $\mathcal{U}ad$.

On en déduit immédiatement <u>existence et unicité d'une solution du problème 1</u>.

(*) Lire : F_i (resp. U_i) est restriction à Γ_F (resp. Γ_U) d'un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp. $H^{1/2}(\Gamma)$) .

(**) Ce résultat a été obtenu pour la première fois par K. O. Friedrichs [4]. La démonstration la plus générale est due à Gobert [5]. Lorsque Γ est régulière, on a une démonstration un peu plus simple et valable pour Ω non borné, (cf. Duvaut-Lions [2]).

γ) Si $\Gamma_U = \emptyset$, on introduit

(14) $$\mathcal{R} = \{ v | v = a + b.x \ , \ a \in \mathbb{R}^N \ , \ b \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ , \ b \ \text{antisymétrique} \}.$$

On a alors une condition nécessaire sur les données pour qu'il y ait une solution,

(15) $$\int_\Omega f_i \rho_i \, dx + \int_\Gamma F_i \rho_i \, d\Gamma = 0 \qquad \forall \rho \in \mathcal{R} \ ,$$

ce qui exprime que l'ensemble des forces appliquées constitue un torseur équivalent à zéro.

La forme bilinéaire $a(u,v)$ et $L_1(v)$ sont alors définies sur l'espace quotient $V/_{\mathcal{R}}$, qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\left(\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

équivalente à la norme quotient.

Alors il est immédiat que le problème 1 possède une solution unique dans $V/_{\mathcal{R}}$.

III. - Les problèmes unilatéraux.

3.1 - Condition de frottement sur Γ .

On conserve (1) $\rightarrow$ (4) et on pose, pour tout champ de vecteur v sur Γ,

$$v_N = v_i \, n_i \quad , \quad v_T = v - v_N \, n \ ;$$

$v_N \, n$ (resp. v_T) est la composante normale (resp. tangentielle) de v sur Γ .

De plus, on désigne par σ le vecteur de composantes $\{\sigma_i\}$, $\sigma_i = \sigma_{ij} \, n_j$ sur Γ .

Les conditions à la frontière sont alors :

(16) $$\sigma_N = F_N \qquad (F_N \ \text{donné} < 0 \ \text{sur} \ \Gamma) \ ,$$

(17) $$\begin{cases} |\sigma_T| < g \ \Rightarrow \ u_T = 0 \\ |\sigma_T| = g \ \Rightarrow \ \exists \, \lambda \geqslant 0 \ \text{tel que} \ u_T = - \lambda \sigma_T \ . \end{cases}$$

La condition (17) traduit la loi de frottement de Coulomb dans le cas statique (dans le cas dynamique on remplacera u_T par $\frac{\partial}{\partial t} u_T$ dans (17). Le scalaire positif g est égal à $f|F_N|$ où f est le coefficient de frottement.

. On a alors la propriété : <u>si</u> u <u>est solution de</u> (1) - (4), (16), (17), <u>alors</u> u <u>minimise :</u>

$$(18) \qquad I_2(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L_2(v) + j(v)$$

parmi tous les $v \in V$; (on a posé

$$(19) \qquad L_2(v) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_\Gamma F_N v_N d\Gamma \ , \ j(v) = \int_\Gamma g|v_T| \, d\Gamma) \ .$$

Il en résulte une nouvelle formulation (précise) du problème.

<u>PROBLEME 2 :</u>

<u>On donne</u> $F_N \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $g > 0$. <u>Trouver</u> u <u>de</u> V <u>qui minimise</u> $I_2(v)$ <u>dans</u> V .

ou bien (énoncé équivalent)

<u>Trouver</u> $u \in V$ <u>tel que</u>

$$(20) \qquad a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geqslant L_2(v-u) \ , \quad \forall v \in V \ .$$

On déduit immédiatement de (20) la condition <u>nécessaire</u> pour l'existence d'une solution,

$$(21) \qquad |L_2(\rho)| \leqslant \int_\Gamma g|\rho^T| \, d\Gamma \ , \ \forall \rho \in \mathcal{R} \ .$$

Nous supposerons que les données f_i , F_N , g satisfont à la condition plus forte

$$(22) \qquad |L_2(\rho)| < \int_\Gamma g|\rho^T| \, d\Gamma \ , \quad \forall \rho \in \mathcal{R} - \{0\} \ .$$

Moyennant l'hypothèse (22) on montre que $I_2(v)$ tend vers $+\infty$ si $\|v\|_V$ tend vers $+\infty$, donc <u>il existe</u> $u \in V$ <u>solution du problème 2</u>. L'unicité de la solution n'est pas établie, mais si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $u_1 - u_2 \in \mathcal{R}$ et par conséquent les champs de déformations et contraintes sont uniques.

3.2 - <u>Problème de Signorini.</u>

Il s'agit d'un ancien problème posé par Signorini [7] . Un corps élastique qui occupe une région Ω de $\mathbb{R}^N$ dans son état non déformé, est en contact avec un support S rigide par une partie Γ_S de sa frontière Γ (Mes $\Gamma_S > 0$) . On pose $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_S$. On soumet le corps élastique à des forces $\{f_i\}$ sur Ω et

$\{F_i\}$ sur Γ_F , et on cherche u qui satisfasse (1) - (4), (6) et

(23) $\sigma_T = 0$ sur Γ_S ,

(24) $u_N \leqslant 0$, $\sigma_N \leqslant 0$, $u_N \sigma_N = 0$ sur Γ_S .

On est alors conduit à formuler le

PROBLEME 3 :

Trouver u qui minimise

(25) $$I_3(v) = \frac{1}{2} a(V,V) - L_3(v)$$

parmi tous les V tels que $v \in V$, $v_N \leqslant 0$ sur Γ_S ; (on a posé $L_3(v) = \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_S} F_i v_i \, d\Gamma$) ;
ou bien (énoncé équivalent) :

Trouver $u \in V$, $u_N \leqslant 0$ sur Γ_S tel que,

(26) $$a(u, v-u) \geqslant L_3(v-u), \quad \forall v \in V , \; v_N \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_S .$$

On obtient alors (cf. G. Fichera [3] ou Lions-Stampacchia [6]) .

Si les données $\{f_i\}$ et $\{F_i\}$ satisfont

(27) $$L_3(\rho) < 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R} - \{0\} , \; \rho_N \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_S$$

il existe u solution du problème 3. Les champs de déformations et contraintes associés sont uniques.

IV. - Cas dynamiques.

4.1 - Problème de frottement.

On est conduit, remplaçant l'équation (1) par (1 bis) à trouver $u = \{u_i(x,t)\}$ qui satisfasse

(28) $$(u''(t), v-u'(t)) + a(u(t), v-u'(t)) + j(v)-j(u'(t)) \geqslant L_2(v-u'(t))$$

$$\forall v \in V \quad (\text{on a posé } u''(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \; u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}) ,$$

avec des conditions initiales

(29) $$u(0) = u'(0) = 0 .$$

On obtient alors le résultat (cf. Duvaut-Lions [2]).

<u>Si les données</u> f_i , F_N , g <u>sont choisies dans la classe,</u>

f_i , f'_i , $f''_i \in L^2(0,T \,;\, L^2(\Omega))$

F_N , F'_N , $F''_N \in L^2(0,T \,;\, L^2(\Gamma))$

g indépendant de t , $g \in L^2(\Gamma)$,

<u>alors il existe</u> u <u>unique avec</u>

u , $u' \in L^\infty(0,T \,;\, V)$, $u'' \in L^\infty(0,T \,;\, (L^2(\Omega))^N)$

<u>solution de</u> (27) <u>et</u> (28).

4.2 - <u>Problème de Signorini dynamique.</u>

Introduisons l'ensemble convexe fermé $K \subset V$,

(30) $$K = \{ v | v \in V \;,\; v_N \leq 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_S \} \;.$$

On est alors conduit à chercher $u = \{ u_i(x,t)\}$ tel que ,

(31) $$u(t) \in K \;,$$

(32) $$(u''(t), v-u(t)) + a(u(t), v-u(t)) \geq L_2(v-u(t)) \quad \forall v \in K$$

(33) $$u(0) = u'(0) = 0 \;.$$

Le problème (31), (32), (33) est ouvert, de surplus mal posé très probablement, comme on peut s'en convaincre en examinant une situation analogue de la théorie des inéquations différentielles ordinaires. Considérons un point matériel M de coordonnées x_i , $\{x_i\} \in \mathbb{R}^N$, soumis à un champ de forces $\{ f_i\}$ et assujetti à rester dans un convexe fermé K de $\mathbb{R}^N$. Le contact du point M avec la frontière ∂K ayant lieu sans frottement, on est conduit à trouver $x(t) = \{ x_i(t)\}$ tel que :

(34) $$\begin{aligned} &x(t) \in K \\ &(x''(t) \;,\; \xi - x(t)) \geq (f, \xi - x(t)) \quad \forall \xi \in K \\ &x(0) = x'(0) = 0 \;. \end{aligned}$$

Si on complète (34) en imposant une loi de réflexion de M sur ∂K qui permette de calculer la vitesse réfléchie en fonction de la vitesse incidente, on obtient une solution unique sous des conditions classiques de régularité des données. On a donc autant de solutions de (34) que de lois de réflexion imaginables.

Il y a alors tout lieu de penser que le système (31) - (33), de même nature que (34), est également un système incomplet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUVAUT (G.), LIONS (J.L.). - Elasticité avec frottement. Journal de Mécanique. Vol. 10, n° 3, Sept. 1971. p. 409 - 420.

[2] DUVAUT (G.), LIONS (J.L.). - Les inéquations en Mécanique et en physique. Dunod. (1972).

[3] FICHERA (G.). - Problemi elastostatici con vincoli unilaterali il problema di Signorini con ambique condizioni al contorno. Mem. Accad. Naz. Lincei, 8 (7), 1964, p. 91-140.

[4] FRIEDRICHS (K.O.). - On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Annals of Math. , Vol. 48, 1947.

[5] GOBERT. - Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, n° 3 et 4, 1962.

[6] LIONS (J.L.), STAMPACCHIA (G.). - Variational inequalities. Com. m. pure applied Math. XX, (1967), p. 493-519.

[7] SIGNORINI (A.). - Sopra alcune questioni di elastostatica. Atti. della Soc. Ital. per il progresso delle Scienze, 1933.

Université de Paris
Faculté des Sciences
Mécanique Théorique
Tour 66 - 9 Quai Saint-Bernard
75 - PARIS 5ème (France)