MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ENNIO DE GIORGI

Sur l'existence de solutions analytiques d'équations à coefficients constants

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 133-135
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__133_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 133-135.

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS ANALYTIQUES D'ÉQUATIONS À COEFFICIENTS CONSTANTS

par

Ennio DE GIORGI

Dans cette conférence, j'expose quelques résultats que j'ai établis en collaboration avec Lamberto Cattabriga.

Le théorème principal est le suivant :

THEOREME. - Soit $f(x, y)$ une fonction analytique en R^2 et A un opérateur linéaire à dérivées partielles avec coefficients constants (réels ou complexes). Alors il existe au moins une fonction $u(x, y)$ analytique en R^2 qui satisfait à l'équation

$$Au = f(x, y)$$

pour chaque $(x, y) \in R^2$.

La démonstration de ce théorème se fonde sur le lemme de représentation (analogue à des résultats de G. Mantovani et S. Spagnolo) qui s'énonce dans la forme suivante :

LEMME 1. - Soit $f(x, y)$ une fonction analytique en R^2 à valeurs réelles ou complexes et ϕ une fonction positive non croissante définie en R . Alors il existe une fonction $g : R^3 \to C$ indéfiniment différentiable en R telle que les conditions suivantes soient satisfaites

$$f(x, y) = \int_{R^3} \frac{g(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\tau^2)^2} \quad \text{pour chaque} \quad (x, y) \in R^2 ,$$

existe une fonction $\psi : R \to R$ telle que

$$0 < \psi(s) \leqslant \phi(s) \quad \text{pour chaque} \quad s \in R ,$$

$$\operatorname{supp} g \subseteq \{(\xi, \eta, \tau) \; ; \; \psi(\xi^2 + \eta^2) \leqslant \tau \leqslant 2\psi(\xi^2 + \eta^2)\} ,$$

$$\psi(\xi^2 + \eta^2) \geqslant \int_0^{+\infty} |g(\xi, \eta, \tau)|\, d\tau \quad \text{pour chaque} \quad (\xi, \eta) \in R^2 .$$

Outre le lemme 1, on emploie un deuxième lemme relatif à une équation de type spécial :

LEMME 2. - Considérons l'équation différentielle à dérivées partielles avec coefficients constants réels ou complexes

$$(1)\quad \frac{\partial^n v}{\partial y^n} + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{\partial^n v}{\partial y^h \partial x^{n-h}} + \sum_{0\leqslant h+k\leqslant n-1} b_{hk} \frac{\partial^{h+k} v}{\partial y^h \partial x^k} = \frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\tau^2)^2}$$

où ξ, η, τ sont des nombres réels et $\eta \geqslant 4$, $\tau > 0$. Soient $\mu_1, \dots, \mu_n$ les racines de l'équation

$$\mu^n + \sum_{h=0}^{n-1} b_h \, i^{n-h} \mu^h = 0 ,$$

où $i = \sqrt{-1}$. En plus, soit δ un nombre positif tel que :

$$0 < \delta < 1/4$$

et,

$$\delta \leqslant |\mathrm{Re}\ \mu_h|/2$$

pour chaque h tel que $\mathrm{Re}\ \mu_h \neq 0$, et mettons

$$m = 2 + \sum_{h=0}^{n-1} |b_h| + \sum_{0\leqslant h+k\leqslant n-1} |b_{hk}| .$$

Alors il existe une solution v de l'équation (1) telle que pour chaque $(x,y) \in R^2$ et chaque $s = 0, 1, \dots, r = 0, \dots, n$

$$\left|\frac{\partial^{s+r} v}{\partial x^s \partial y^r}\right| \leqslant C_1 (s+r)!\ \alpha_1^s \beta_1^r \qquad \text{si} \quad |y| \leqslant \eta/4m$$

$$\left|\frac{\partial^{s+r} v}{\partial x^s \partial y^r}\right| \leqslant C_2 (s+r)!\ \alpha_2^s \beta_2^r \qquad \text{si} \quad |y| \geqslant \eta/4m \quad ,$$

où C_1 , α_1 , β_1 dépendent d'une manière continue de m , δ , y , mais sont indépendantes de τ , tandis que C_2 , α_2 , β_2 dépendent d'une manière continue de m , δ , y , τ et sont décroissantes avec τ .

Remarquons enfin que le théorème démontré ci-dessus semble faillir, même pour des opérateurs simples, si le nombre des variables indépendantes est plus grand que deux. Par exemple, nous avons de sérieux doutes sur l'existence d'une solution analytique en R^3 de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, t)$$

où

$$f = \sum_{h,k}^{1,\infty} \exp(\phi(h,k)\ (ix+ih^2t - (y-h)^2-1)),$$

$$\phi(h,k) = (((p(h))^k)!)\ !\ , \quad p(h) = \text{the } (h+1)\text{-th nombre premier.}$$

SCUOLA NORMALE SUPERIORE
PISA
(Italie)