

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-FRANÇOIS COLOMBEAU

Quelques applications des fonctions implicites dans les espaces bornologiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 109-115

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__109_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS
 IMPLICITES DANS LES ESPACES BORNOLOGIQUES

par

Jean François COLOMBEAU

Nous montrons comment on peut étendre les résultats obtenus par le théorème d'Ovcyannikov ([3] etc) à des situations plus générales et aussi "concrètes" grâce aux théorèmes des fonctions implicites du calcul différentiel dans les espaces bornologiques ([2] chap. XIII) en leur appliquant la méthode de majorations utilisée dans le théorème d'Ovcyannikov. Les notations et la terminologie sont conformes à [2]

§ 1 - Fonctions implicites dans les e.b.c. polaires complets.

THEOREME (1.1). - Soit f continuellement différentiable de $E_1 \times E_2$ dans E_3 et $(a,b) \in E_1 \times E_2$ tel que $f(a,b) = 0$ et $f'_y(a,b) \in \text{Isom}(E_2, E_3)$.

A) Existence : On suppose que pour tout B_1 disque borné de E_1 il existe $\tau_0 > 0$ et C_0 disque borné de E_2 fermé pour TE_2 tel que :

- 1) $f(a + \tau B_1, b) \subset \tau f'_y(a, b) C_0$ si $\tau \leq \tau_0$ et
- 2) qu'il existe une suite (C_n) de disques bornés de E_2 fermés pour TE_2 telle que :

$$\left. \begin{array}{l} x \in a + \tau_0 B_1 \\ y \in b + \tau_0 (C_0 + C_1 + \dots + C_n) \end{array} \right\} = [f'_y(x, y) - f'_y(a, b)] C_n \subset f'_y(a, b) C_{n+1}$$

et telle que si $F_n = \bigcap_{q \geq n} C_q$ $F_n \rightarrow 0$ au sens de Mackey dans E_2 si $n \rightarrow +\infty$.

Alors si $P_1 = \bigcup_{B_1} \tau_0 B_1$ il existe une application $u : a + P_1 \rightarrow E_2$ telle que :

- 1) $u(a) = b$
- 2) $f(x, u(x)) = 0$ pour tout x de $a + P_1$, et
- 3) u est différentiable au point a et $u'(a) = -f'_y(a, b)^{-1} \circ f'_x(a, b)$.

B) Unicité : On suppose que pour B_1 disque borné de E_1 et pour C_0 disque de E_2 fermé pour TE_2 il existe une suite (C_n) de disques de E_2 fermés pour TE_2 telle que :

$$\left. \begin{array}{l} x \in a + B_1 \\ y \in b + C_0 \end{array} \right\} = [f'_y(x, y) - f'_y(a, b)] C_n \subset f'_y(a, b) C_{n+1}$$

et telle que $\bigcap_n C_n = \{0\}$.

Alors si $x \in a + B_1$ et si y_1 et $y_2 \in b + C_0$
 $f(x, y_1) = 0 = f(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Démonstration :

A) On suppose $a = b = 0$; soit $T_0 = f'_y(0, 0)$; soit $g : E_1 \times E_2 \rightarrow E_2$ définie par $g(x, y) = y - T_0^{-1} f(x, y)$; donc $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x, y)$. $g(x, y_1) - g(x, y_2) = y_1 - y_2 - T_0^{-1} f(x, y_1) + T_0^{-1} f(x, y_2) = T_0^{-1} A(x, y_1, y_2)$ si $A(x, y_1, y_2) = f'_y(0, 0)(y_1 - y_2) - f(x, y_1) + f(x, y_2)$, donc d'après le théorème des accroissements finis ([2] p. 142) :

$$(I) \quad A(x, y_1, y_2) \in \overline{\tau_{y=y_1+t(y_2-y_1)} \{ [f'_y(x, y) - f'_y(0, 0)] (y_2 - y_1) \}} \\ 0 \leq t \leq 1$$

Soit B_1 un disque borné de E_1 et soit $x \in B_1$; soit $u_0(x) = 0$, soit $u_1(x) = g(x, u_0(x)) = g(x, 0)$ donc $u_1(x) = -T_0^{-1} f(x, 0)$ donc si $0 < \tau \leq \tau_0$ $u_1(\tau B_1) \subset \tau C_0$; soit $u_2(x) = g(x, u_1(x))$; $u_2(x) - u_1(x) = g(x, u_1(x)) - g(x, u_0(x)) = T_0^{-1} A(x, u_1(x), u_0(x))$; $u_1(x) \in \tau C_0$ (si $x \in \tau B_1$ avec $0 < \tau \leq \tau_0$) et $u_0(x) = 0$ donc $u_1(x) - u_0(x) \in \tau C_0$ et donc d'après (I) et les hypothèses, $u_2(x) - u_1(x) \in \tau C_1$; on définit ainsi une suite $u_n(x)$ par $u_{n+1}(x) = g(x, u_n(x))$; par récurrence on montre que $u_{n+1}(x) - u_n(x) \in \tau C_n$; donc comme la base de filtre $F_n \rightarrow 0$ au sens de Mackey si $n \rightarrow +\infty$, et comme E_2 est complet, si $P_1 = \bigcup_{B_1} \tau_0 B_1$ on définit une

application $u : P_1 \rightarrow E_2$ par $u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$; $u_{n+1}(x) \in \tau(C_0 + \dots + C_n)$ si

$x \in \tau B_1$ donc $u(x) \in \overline{\tau \bigcap_{n \geq 0} C_n}$ donc u est presque lipschitzienne au point 0 ; pour tout n $u_n(0) = 0$ donc $u(0) = 0$; comme f est M -continue dans $E_1 \times E_2$ g l'est aussi, donc par M -continuité $u(x) = g(x, u(x))$ pour tout $x \in P_1$ donc $f(x, u(x)) = 0$ pour tout $x \in P_1$. Donc d'après le lemme (1.2) (ci-dessous) u est différentiable au point 0 et $u'(0) = -f'_y(0, 0)^{-1} \circ f'_x(0, 0)$.

B) Soient $x \in B_1$, y_1 et $y_2 \in C_0$ tels que $f(x, y_1) = 0 = f(x, y_2)$; $y_1 - y_2 = g(x, y_1) - g(x, y_2) = T_0^{-1} A(x, y_1, y_2) \in \tau C_1$ d'après (I) et les hypothèses car $y_1 - y_2 \in \tau C_0$; par récurrence, on montre que pour tout n $y_1 - y_2 \in \tau C_n$ donc $y_1 - y_2 = 0$.

LEMME (1.2) (Différentiabilité de la fonction implicite).

Soit f continuellement différentiable de $E_1 \times E_2$ dans E_3 et $(a,b) \in E_1 \times E_2$ tel que $f(a,b) = 0$ et $f'_y(a,b) \in \text{Isom}(E_2, E_3)$. Soient P_1 une partie bornivore de E_1 et u une application de $a+P_1$ dans E_2 telle que $u(a) = b$ et $f(x, u(x)) = 0$ pour tout $x \in a + P_1$; si u est presque lipschitzienne au point a , alors u est différentiable au point a et $u'(a) = -f'_y(a,b)^{-1} \circ f'_x(a,b)$.

Démonstration : On suppose $a = b = 0$; $f(h,k) - f(h,0) - f'_y(0,0).k \in \bar{F}$
 $0 \leq t \leq 1$

$[f'_y(h,tk) - f'_y(0,0)].k$ donc comme f est continuellement différentiable dans U l'application $(h,k) \rightarrow f(h,k) - f(h,0) - f'_y(0,0).k$ est tangente à zéro; soient $S_0 = f'_x(0,0)$ et $T_0 = f'_y(0,0)$; $f(h, u(h)) = 0$ si $h \in P_1$ donc $S_0 h + T_0 u(h) = -[f(h, u(h)) - f(h,0) - T_0 u(h)] - [f(h,0) - f(0,0) - S_0 h]$; l'application $h \rightarrow f(h,0) - f(0,0) - S_0 h$ est tangente à zéro; comme u est presque lipschitzienne au point 0 , l'application $h \rightarrow f(h, u(h)) - f(h,0) - T_0 u(h)$ est tangente à zéro donc l'application $h \rightarrow u(h) + T_0^{-1} S_0 h$ est tangente à zéro, d'où le résultat.

Remarque (1.3) : On montre par un exemple que dans le lemme (1.2) on ne peut pas en général remplacer " u est presque lipschitzienne au point a " par " u est M -continue au point a " (comme on le fait dans le cas des espaces de Banach).

Remarque (1.4) : Si E_1 , E_2 et E_3 sont des espaces de Banach, le théorème (1.1) se réduit au théorème classique car les hypothèses techniques de (A) et (B) sont toujours vérifiées :

soient B_1 et B_2 les boules unités fermées de E_1 et E_2 ; f étant continuellement différentiable, il existe $\tau_0 > 0$, $\mu > 0$, $0 < k < 1$, $\lambda \geq 0$ tels que

$$\left. \begin{array}{l} x \in a + \tau_0 B_1 \\ y \in b + \mu B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'_y(a,b)^{-1} [f'_y(x,y) - f'_y(a,b)] B_2 \subset k B_2$$

et $f(a + \tau B_1, b) \subset \tau f'_y(a,b)(\lambda B_2)$ si $0 < \tau \leq \tau_0$; si on prend $\tau_0 > 0$ assez petit

pour que $\frac{\tau_0 \lambda}{1-k} \leq \mu$ on peut prendre $C_n = k^n \lambda B_2$ donc $F_n \subset \frac{k^n \lambda}{1-k} B_2$; de même, pour l'unicité.

Remarque (1.5) : Les hypothèses techniques du théorème (1.1) ne sont absolument pas superflues car on sait bien que le théorème des fonctions implicites tel qu'il s'énonce dans les espaces de Banach devient faux dans le cadre des espaces de Fréchet ([1] p. 761). On peut évidemment énoncer des théorèmes un peu plus généraux que (1.1) ([2] p. 150).

§ 2 - Applications à des équations fonctionnelles.

Le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach permet notamment d'étudier des équations intégrales. Nous allons montrer sur un exemple très simple comment le théorème des fonctions implicites dans les espaces bornologiques permet d'étudier des équations intégral-différentielles, permettant ainsi d'obtenir toute une gamme de résultats nouveaux en généralisant à des équations intégral-différentielles (notamment) les applications du théorème d'Ovcyannikov ou de théorèmes apparentés.

Soient v, a, b et c des fonctions analytiques définies au voisinage du point $(x_0, 0)$ de $\mathbb{E}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{E}$. Soit H une fonction analytique définie au voisinage du point $(0, 0, x_0)$ de $\mathbb{E}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{E}$. On cherche une fonction u analytique au voisinage du point $(x_0, 0)$ de $\mathbb{E}^2$, à valeurs dans $\mathbb{E}$ et satisfaisant l'équation :

$$(E) \quad u(x, t) = v(x, t) + \int_0^t H(t, s, x) [a(x, s) \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) + b(x, s)u(x, s) + c(x, s)] ds$$

($\int_0^t$ signifie l'intégrale sur le segment $[0, t] = \{ \theta t \mid 0 \leq \theta \leq 1 \} \subset \mathbb{E}$; les fonctions intégrées sont analytiques); cette équation contient l'équation aux dérivées partielles très simple considérée à titre d'exemple dans [2] p. 157.

I_δ désigne le disque ouvert de $\mathbb{E}$ défini par $|t| < \delta$; K désigne un compact de $\mathbb{E}$ dont l'intérieur contient le point $x_0^{(*)}$; si $s > 0$ on définit $K+s = \{ x \in \mathbb{E} \text{ tels que } d(x, K) \leq s \}$ (où $d(x, K)$ est la distance de x au compact K dans $\mathbb{R}^2$); K est choisi assez petit pour qu'il existe $s > 0$ et $\delta > 0$ tels que les fonctions v, a, b et c (respectivement H) sont définies dans un voisinage de $(K+s) \times I_\delta$ (respectivement de $I_\delta^2 \times (K+s)$).

On définit la bornologie de l'espace $\mathcal{H}(K)$ des germes de fonctions analytiques autour du compact K par la base de la bornologie constituée (si M et s décrivent $[0, +\infty]$) par les $\{ \{ M, s \} \} = \{ \varphi \text{ analytiques à l'intérieur de } K+s, \text{ continues sur } K+s \text{ et majorées par } M \text{ sur } K+s \}$ et $\mathcal{H}(K)$ est ainsi un ebc de Silva (donc polaire et complet).

Une partie $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathcal{C}_\infty(I_\delta, \mathcal{H}(K))$ (voir [2] p. 146) est bornée si elle est constituée d'applications indéfiniment différentiables de I_δ dans $\mathcal{H}(K)$ équibornées ainsi que leurs dérivées successives sur tout I_δ ($0 < \delta < \delta_0$); mais la variable t est complexe et donc d'après les formules intégrales de Cauchy (pour les applications analytiques à valeurs dans un ebc polaire): pour qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}_\infty(I_\delta, \mathcal{H}(K))$ soit bornée, il faut et il suffit qu'elle soit constituée d'applications indéfiniment différentiables de I_δ dans $\mathcal{H}(K)$ équibornées

(*) K est supposé assez régulier pour que $d(K+s, \partial(K+s+s')) = s'$ (si s, s' assez petits).

sur tout I_δ ($0 < \delta < \delta_0$) (car il en est alors de même pour leurs dérivées successives). Donc une base de la bornologie de l'espace $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ est constituée (si

$(B_\delta)_\delta \in]0, \delta_0[$ désigne une famille variable de disques bornés B_δ de l'espace $\mathbb{H}(K)$) par les disques bornés $C = \{ \xi \in \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K)) \text{ tels que pour tout}$

$\delta \in]0, \delta_0[$, $t \in I_\delta = \xi(t) \in B_\delta \}$. Les disques bornés $\{ \{M, s\} \}$ sont fermés dans $T\mathbb{H}(K)$ et si les B_δ sont fermés dans $T\mathbb{H}(K)$ le disque borné C correspondant est fermé dans $T\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$. $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ est un ebc polaire complet ([2] p. 146).

Soit K' un compact de $\mathbb{E}^2$ contenant $(K+s) \times I_\delta$ (avec $\delta > \delta_0$) et tel que v soit analytique dans un voisinage de K' ; soit l'application F :

$[\mathbb{H}(K') \times \mathbb{E}] \times \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K)) \rightarrow \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ définie par :

$$F(v, \lambda; X)(t)(x) = X(t)(x) - v(x, t) - \lambda \int_0^t H(t, s, x) \left[a(x, s) \frac{d}{dx} X(s)(x) + b(x, s) X(s)(x) + c(x, s) \right] ds.$$

Il est immédiat de vérifier que F est $\mathcal{C}_\infty$; $F(0, 0; 0) = 0$; $D_2 F(0, 0; 0)$ est l'application identique de $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ dans $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ et $D_2 F(v, \lambda; X) \cdot \xi(t)(x) = \xi(t)(x) - \lambda \int_0^t H(t, s, x) \left[a(x, s) \frac{d}{dx} \xi(s)(x) + b(x, s) \xi(s)(x) \right] ds$.

Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F au point $(0, 0)$ avec $E_1 = \mathbb{H}(K') \times \mathbb{E}$ et $E_2 = E_3 = \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$. Nous allons vérifier le critère d'existence (A).

$F(v, \lambda; 0)(t)(x) = -v(x, t) - \lambda \int_0^t H(t, s, x) c(x, s) ds$; soit B_1 un disque borné de $\mathbb{H}(K') \times \mathbb{E}$; il existe donc $M_0 > 0$ et $s_0 > 0$ tels que si $(v, \lambda) \in B_1$ nous pouvons prendre :

$C_0 = \{ \xi \in \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K)) \text{ tels que } \xi(t) \in \{ \{M_0, s_0\} \} \text{ pour tout } t \in I_{\delta_0} \}$,
(et si nous changeons de disque borné B_1 nous pouvons garder le même s_0 car $K' \supset (K+s) \times I_\delta$ (où $s > 0$) et $\delta > \delta_0$).

$$(I) \quad [D_2 F(v, \lambda; X) - D_2 F(0, 0; 0)](\xi)(t)(x) = -\lambda \int_0^t H(t, s, x)$$

$$\left[a(x, s) \frac{d}{dx} \xi(s)(x) + b(x, s) \xi(s)(x) \right] ds;$$

X et v n'interviennent pas dans la formule (I); $(v, \lambda) \in B_1$ donc dans toute la suite $|\lambda| \leq \lambda_0$. Soient $H_0 \geq \sup_{(t, s, x) \in I_{\delta_0}^2 \times (K+s_0)} |H(t, s, x)|$ et A tel que :

$$\sup_{(x,t) \in (K+s_0) \times I_{\delta_0}} |a(x,t)| \leq \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{(x,t) \in (K+s_0) \times I_{\delta_0}} |b(x,t)| \leq \frac{A}{2}.$$

Pour la construction de la suite (C_n) nous prenons :

$$C_1 \supset \overline{\Gamma}_{|\lambda| \leq \lambda_0} [D_2 F(v, \lambda; X) - D_2 F(0, 0; 0)] C_0; \xi \in C_0 = |\lambda \int_0^t H(t, s, x) [a(x, s) \frac{d}{dx} \xi(s)(x) + b(x, s) \xi(s)(x)] ds| \leq \lambda_0 H_0 |t| \left| \int_0^1 \left(\frac{A}{2} \frac{M_0}{d} + \frac{A}{2} M_0 \right) d\theta \right| \leq \frac{\lambda_0 H_0 A M_0 |t|}{d} \quad \text{si } x \in K + s_0 - d \text{ (pour } d \text{ tel que } 0 < d < \inf(1, s_0)) \text{ car } \varphi \in \{M_0, s_0\} = \frac{d\varphi}{dx} \in \left\{ \frac{M_0}{d}, s_0 - d \right\} \text{ (d'après la formule intégrale de Cauchy) et } M_0 \leq \frac{M_0}{d}. \text{ Donc si } B_\delta^1 = \bigcap_{\substack{0 < d < 1 \\ s=s_0-d>0}} \left\{ \frac{\lambda_0 H_0 A M_0 \delta}{d}, s \right\}, C_1 \subset \{ \xi \in C_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K)) \text{ tels que pour tout } \delta \in]0, \delta_0[, t \in I_\delta \Rightarrow \xi(t) \in B_\delta^1 \}.$$

Nous allons montrer par récurrence sur n que si :

$$C_n \supset \overline{\Gamma}_{|\lambda| \leq \lambda_0} [D_2 F(v, \lambda; X) - D_2 F(0, 0; 0)] C_{n-1}, \text{ si } B_\delta^n = \bigcap_{\substack{0 < d < 1 \\ s=s_0-d>0}} \left\{ \frac{\lambda_0^n H_0^n A^n M_0 \delta^n}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2}) \dots (1-\frac{1}{n})}, s \right\}$$

on peut prendre $C_n = \{ \xi \in C_\infty(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K)) \text{ tels que pour tout } \delta \in]0, \delta_0[, t \in I_\delta \Rightarrow \xi(t) \in B_\delta^n \}.$

$$\text{Supposons donc } B_\delta^{n-1} = \bigcap_{\substack{0 < d < 1 \\ s=s_0-d>0}} \left\{ \frac{\lambda_0^{n-1} H_0^{n-1} A^{n-1} M_0 \delta^{n-1}}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2}) \dots (1-\frac{1}{n-1})}, s \right\};$$

$$\text{changeons } d \text{ en } d(1-\frac{1}{n}) : B_\delta^{n-1} \subset \bigcap_{\substack{0 < d < 1 \\ s=s_0-d>0}} \left\{ \frac{\lambda_0^{n-1} H_0^{n-1} A^{n-1} M_0 \delta^{n-1}}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2}) \dots (1-\frac{1}{n})}, s + \frac{d}{n} \right\}$$

$$\text{donc } \varphi \in B_\delta^{n-1} = \varphi \text{ et } \frac{d\varphi}{dx} \in \left\{ \frac{\lambda_0^{n-1} H_0^{n-1} A^{n-1} M_0 \delta^{n-1}}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2}) \dots (1-\frac{1}{n})}, n, s \right\}$$

(d'après la formule intégrale de Cauchy).

$$\text{Donc } \xi \in C_{n-1} \Rightarrow |\lambda \int_0^t H(t, s, x) [a(x, s) \frac{d}{dx} \xi(s)(x) + b(x, s) \xi(s)(x)] ds| \leq \lambda_0 H_0 \left| \int_0^1 A \frac{\lambda_0^{n-1} H_0^{n-1} A^{n-1} M_0 \theta^{n-1} |t|^{n-1}}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2}) \dots (1-\frac{1}{n})} |t| d\theta \right| \leq \frac{\lambda_0^n H_0^n A^n M_0 |t|^n}{d^n(1-\frac{1}{2}) \dots (1-\frac{1}{n})}$$

d'où la formule annoncée pour B_{δ}^n .

$F_n = (\overline{f} \sum_{q \geq n} C_q) \subset \{ \xi \in \mathcal{C}_{\infty}(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K)) \text{ tels que pour tout } \delta \in]0, \delta_0[$
 $t \in I_{\delta} \Rightarrow \xi(t) \in \overline{f} \sum_{q \geq n} B_{\delta}^q \}$; on sait que pour tout $n: \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^{n-1}} < e$ (e étant la
 base des logarithmes népériens), donc :

$$B_{\delta}^n \subset \left\{ \left\{ \frac{M_0}{e} \left(\frac{\lambda_0 H_0 A \delta e}{d} \right)^n, s \right\} \right\}$$

donc, si on fixe d avec $0 < d < 1$ et $s = s_0 - d > 0$, pour δ_0 assez petit la base
 de filtre F_n converge vers 0 au sens de Mackey dans $\mathcal{C}_{\infty}(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ (et comme
 on l'a remarqué, si on change le disque borné de $\mathbb{H}(K')$ en gardant $|\lambda| \leq \lambda_0$ on ne
 change pas ce δ_0 car on ne change pas s_0 , donc d) d'où : si $\delta_0 > 0$ est assez
 petit, il existe une application $U: \mathbb{H}(K') \rightarrow \mathcal{C}_{\infty}(I_{\delta_0}, \mathbb{H}(K))$ telle que $U(0) = 0$
 et pour tout $v \in \mathbb{H}(K')$ $F(v, 1, U(v)) = 0$; si on définit une fonction u par
 $u(x, t) = U(t)(x)$, u est solution de l'équation (E) et u est analytique en x
 et t . On peut vérifier de manière analogue le critère d'unicité.

Au cours des calculs pour la construction de la suite des disques bor-
 nés C_n nous avons utilisé une méthode qui est fondamentale dans la démonstration
 du théorème d'Ovcyannikov.

Il est bien évident que si on était parti d'une application plus "éla-
 borée" du théorème d'Ovcyannikov on aurait pu de même la généraliser à des équa-
 tions intégral-différentielles, obtenant ainsi des résultats nouveaux.

On peut aussi obtenir un théorème de Frobenius et lui appliquer la méthode
 de majoration d'Ovcyannikov et étudier ainsi des équations fonctionnelles nouvelles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EELLS (J.). - A setting for global analysis. Bull. Amer. Math. Soc. t. 72
 (1966), p. 751-807.
- [2] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications. Berlin-Springer,
 Lecture Notes in Mathematics, Vol. 213.
- [3] TREVES (F.). - Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators. IMPA,
 Rio de Janeiro (1968).

Université de Bordeaux-I
 U.E.R. Mathématiques et Informatique
 351 cours de la Libération
 33 - TALENCE (France)